

Эллипсоидальный бильярд с квадратичным потенциалом*

© 2001. Ю. Н. ФЕДОРОВ

Введение

Одна из наиболее известных дискретных интегрируемых систем — бильярд внутри $(n - 1)$ -мерного эллипсоида (более общо, квадрики)

$$Q = \left\{ \frac{X_1^2}{a_1} + \dots + \frac{X_n^2}{a_n} = 1 \right\} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}^n = (X_1, \dots, X_n), \quad 0 < a_1 < \dots < a_n,$$

с упругими отражениями, который, следуя Биркгофу [1], можно рассматривать как предел геодезического потока на n -мерном эллипсоиде

$$\tilde{Q} = \left\{ \frac{X_1^2}{a_1} + \dots + \frac{X_{n+1}^2}{a_{n+1}} = 1 \right\}, \quad 0 < a_{n+1} < a_1 < \dots < a_n, \quad (1)$$

когда одна из его полуосей (a_{n+1}) стремится к нулю. При этом прямолинейные траектории эллипсоидального бильярда наследуют замечательное свойство геодезических на \tilde{Q} , описываемое известной теоремой Шаля: продолжения траекторий до и после отражений одновременно касаются $n - 1$ фиксированных квадриков, конфокальных с Q . Параметры квадриков являются первыми интегралами данной дискретной системы.

В работе [2] А. П. Веселов дал описание бильярдного отображения в терминах дискретного лагранжева формализма и показал, что его комплексные инвариантные многообразия есть открытые подмножества накрытий якобианов гиперэллиптических кривых, а ограничение отображения на них описывается сдвигами на постоянный вектор. Явные решения задачи в тэта-функциях были найдены в [2] с использованием спектральной теории разностных операторов, а в [3, 14] — с помощью найденного там представления Лакса и метода факторизации матричных полиномов.

Позднее, в [11], автор получил эти же решения непосредственно из тэта-функционального решения задачи о геодезических на \tilde{Q} путем их вырождения при $a_{n+1} \rightarrow 0$. Там же были найдены решения, описывающие двояко-асимптотические траектории бильярда, стремящиеся к осцилляциям вдоль максимальной оси эллипсоида, а также общие тэта-функциональные решения для бильярда в области, ограниченной двумя конфокальными эллипсоидами.

С другой стороны, как было отмечено самим Якоби и позднее многими другими авторами (см., например, [16]), существует бесконечная иерархия интегрируемых обобщений геодезического потока на \tilde{Q} , описывающих движение материальной точки в силовом поле некоторых базисных полиномиальных потенциалов

* Работа выполнена при поддержке Программы поддержки научных школ Российской Федерации, грант 00-15-96146.

$\mathcal{V}_p(X_1, \dots, X_{n+1})$ степени $2p$, $p \in \mathbb{N}$, и их линейных комбинаций. Простейший интегрируемый потенциал — потенциал Гука, или потенциал идеальной пружины, соединяющей центр эллипсоида \tilde{Q} с подвижной точкой:

$$\mathcal{V}_1(X) = \sigma(X_1^2 + \dots + X_{n+1}^2)/2, \quad \sigma = \text{const}.$$

В пределе при $a_{n+1} \rightarrow 0$ движение на \tilde{Q} под действием силы Гука переходит в движение внутри эллипсоида Q с квадратичным потенциалом $\mathcal{V} = \sigma(X_1^2 + \dots + X_n^2)/2$. Однако, в отличие от случаев $\sigma = 0$ или $\sigma < 0$, для того чтобы материальная точка имела соударения с Q при $\sigma > 0$ (притягивающий потенциал Гука), полная энергия h должна быть достаточно велика. А именно, должна существовать положительная константа ε , такая, что внутри Q

$$h + \sigma(X_1^2 + \dots + X_n^2)/2 > \varepsilon > 0. \quad (2)$$

Если условие (2) выполнено, то движение на \tilde{Q} в пределе стремится к движению внутри эллипсоида Q с отражениями на его поверхности. Можно показать (см. [12]), что эти отражения снова являются упругими. Таким образом, мы приходим к эллипсоидальному бильярду с потенциалом Гука, описываемым отображением $\mathcal{B}: (x, v) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{v})$, где $x \in Q$, $v \in \mathbb{R}^n$ суть соответственно координаты точки соударения на Q и вектор скорости *исходящей* из нее траектории, а \tilde{x}, \tilde{v} — аналогичные векторы в следующей точке соударения. Как было отмечено в [12], данная дискретная система, а также бильiardные пределы движений на \tilde{Q} с потенциалами более высокого порядка $\mathcal{V}_p(X_1, \dots, X_n, X_{n+1})$ являются вполне интегрируемыми.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В отличие от классического (геодезического) бильярда, в бильярде с квадратичным потенциалом вектор скорости материальной точки между соударениями уже не является постоянным. Более того, теперь через любые последовательные точки соударения x, \tilde{x} на Q проходит целое однопараметрическое семейство траекторий с различной энергией, а именно дуги коник (при $\sigma > 0$ эллипсов), лежащих в плоскости Π , проходящей через x, \tilde{x} и начало координат в \mathbb{R}^n . Данное семейство образует *пучок* коник с базисными точками x, \tilde{x} (в случае плоского бильярда в \mathbb{R}^2 оно изображено на рис. 1). В частности, при $\sigma > 0$ такой пучок содержит эллипс $\Pi \cap Q$, а также отрезок, соединяющий x с \tilde{x} (траектория с бесконечной энергией).

Можно показать, что после соударения в \tilde{x} данное семейство траекторий уже не образует пучок коник: их следующие точки соударения зависят не только от x, \tilde{x} , но также и от значений первых интегралов, в частности, энергии. Другими словами, две последовательные точки соударения на Q не определяют всю последовательность таких точек. Таким образом, в отличие от классического геодезического бильярда, дискретный аналог лагранжева формализма, разработанный в [2], применим к потенциальному бильярду лишь при определенных ограничениях на начальные условия.

В данной статье впервые указываются явные формулы для отображения \mathcal{B} , его представление в форме Лакса, производящая функция (дискретный лагранжиан) его ограничения на уровень интеграла типа энергии и решение в θ -функциях. Мы показываем, что добавление квадратичного потенциала в бильiard существенно меняет геометрические и симплектические свойства данной дискретной системы.

Метод, с помощью которого были получены тэта-функциональные решения, отличается от использовавшихся в [2, 3] и основывается на вычислениях предельных значений мероморфных функций на обобщенных якобианах.

§1. Отображение \mathcal{B} , представление Лакса и первые интегралы

ТЕОРЕМА 1. *Отображение \mathcal{B} , описывающее бильярд с квадратичным потенциалом, имеет вид*

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= -\frac{1}{\nu}[(\sigma - (v, a^{-1}v))x + 2(x, a^{-1}v)v], \\ \tilde{v} &= -\frac{1}{\nu}[(\sigma - (v, a^{-1}v))v - 2\sigma(x, a^{-1}v)x] + \mu a^{-1}\tilde{x} \\ &= -\frac{1}{\nu}[(\sigma - (v, a^{-1}v))(v + \mu a^{-1}x) + 2(x, a^{-1}v)(\mu a^{-1}v - \sigma x)], \\ \nu &= \sqrt{4\sigma(x, a^{-1}v)^2 + (\sigma - (v, a^{-1}v))^2}, \quad \mu = \frac{2(\tilde{v}, a^{-1}\tilde{x})}{(\tilde{x}, a^{-2}\tilde{x})}.\end{aligned}\tag{3}$$

Заметим, что эти соотношения задают бильярдное отображение однозначно, и в пределе при $\sigma \rightarrow 0$ оно переходит в стандартное бильярдное отображение, указанное в [1, 2],

$$\tilde{x} = x - \frac{2(x, a^{-1}v)}{(v, a^{-1}v)}v, \quad \tilde{v} = v + \frac{2(\tilde{v}, a^{-1}\tilde{x})}{(\tilde{x}, a^{-2}\tilde{x})}a^{-1}\tilde{x}.\tag{4}$$

Как следует из формул (3), (4), оба отображения имеют первый интеграл

$$(v, a^{-1}x) = (\tilde{v}, a^{-1}\tilde{x}).\tag{5}$$

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим участок траектории бильярда между двумя последовательными соударениями на Q , полагая, что $\sigma > 0$ (случай $\sigma < 0$ разбирается аналогично). Пусть, как и выше, (x, v) — радиус-вектор и вектор скорости материальной точки в начале участка, а (\tilde{x}, v') — соответствующие векторы в его конце. Продолжение траектории в \mathbb{R}^n есть эллипс, параметризуемый выражениями

$$X(\phi) = \cos(\phi)x + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\sin(\phi)v, \tag{6}$$

$$V(\phi) = \cos(\phi)v - \sin(\phi)\sqrt{\sigma}x. \quad \phi = \sqrt{\sigma}t, \tag{7}$$

Подставляя (6) в уравнение эллипсоида $(X, a^{-1}X) = 1$, получаем параметр ϕ , координаты и скорость в конечной точке траектории

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= -\frac{(\sigma - (v, a^{-1}v))x + 2(x, a^{-1}v)v}{\sqrt{4\sigma(x, a^{-1}v)^2 + (\sigma - (v, a^{-1}v))^2}}, \\ v' &= -\frac{-2\sigma(x, a^{-1}v)x + (\sigma - (v, a^{-1}v))v}{\sqrt{4\sigma(x, a^{-1}v)^2 + (\sigma - (v, a^{-1}v))^2}}.\end{aligned}\tag{8}$$

С другой стороны, в силу упругости отражения в точке \tilde{x}

$$\tilde{v} - v' = \mu a^{-1}\tilde{x}, \quad \mu = \frac{(\tilde{v}, a^{-1}\tilde{x}) - (v', a^{-1}\tilde{x})}{(\tilde{x}, a^{-2}\tilde{x})} = \frac{2(\tilde{v}, a^{-1}\tilde{x})}{(\tilde{x}, a^{-2}\tilde{x})}.\tag{9}$$

В результате из (8), (9) получаем соотношения (3).

Оказывается, что с точностью до действия группы, порожденной отражениями $(x_i, v_i) \rightarrow (-x_i, -v_i)$, $i = 1, \dots, n$, отображение \mathcal{B} , описывающее бильярд с потенциалом Гука, эквивалентно следующим уравнениям, заданным 2×2 -матрицами с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\lambda) &= M(\lambda)L(\lambda)M^{-1}(\lambda), \\ L(\lambda) &= \begin{pmatrix} q_\lambda(x, v) & q_\lambda(v, v) - \sigma \\ -q_\lambda(x, x) + 1 & -q_\lambda(x, v) \end{pmatrix}, \quad q_\lambda(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\lambda - a_i}, \quad (10) \\ M(\lambda) &= \begin{pmatrix} [\sigma - (v, a^{-1}v)]\lambda + 2(x, a^{-1}v)\mu & 2\sigma(x, a^{-1}v)\lambda - [\sigma - (v, a^{-1}v)]\mu \\ -2(x, a^{-1}v)\lambda & [\sigma - (v, a^{-1}v)]\lambda \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\tilde{L}(\lambda)$ зависит от \tilde{x} , \tilde{v} так же, как $L(\lambda)$ от x , v . Заметим, что $\det M(\lambda) = \lambda\nu^2$, где множитель ν определен в (3). Проверка соотношений (10) легко осуществляется непосредственно.

Следуя общепринятой терминологии, в дальнейшем соотношения (10) будем называть дискретной парой Лакса.

При $\sigma = 0$ представление (10) сводится к 2×2 -представлению Лакса для классического бильярда (4).

Уравнение $|L(\lambda) - wI| = 0$ определяет гиперэллиптическую спектральную кривую Γ рода $n - 1$, а коэффициенты полинома $(\lambda - a_1) \cdots (\lambda - a_n) \det L(\lambda)$ дают n независимых интегралов бильярдного отображения. При условии $(x, a^{-1}x) = 1$ свободный член этого полинома совпадает с интегралом (5). Полагая в $\det L(\lambda)$ последовательно $\lambda = a_1, \dots, \lambda = a_n$ и вычисляя вычет, находим интегралы

$$\sum_{j \neq i} \frac{(x_i v_j - x_j v_i)^2}{a_i - a_j} + v_i^2 + \sigma x_i^2, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

сумма которых дает $(v, v) + \sigma(x, x)$ — аналог интеграла энергии для движения с гуковским потенциалом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Матрица $L(\lambda)$ является дуальной матрице размера $n \times n$

$$\mathcal{L}(s) = (s^2 + \sigma)a + s(x \otimes v - v \otimes x) + v \otimes v + \sigma x \otimes x, \quad s \in \mathbb{C},$$

в том смысле, что спектральные кривые, задаваемые уравнениями $|L(\lambda) - wI| = 0$ и $|\mathcal{L}(s) - \lambda I| = 0$, бирационально эквивалентны; при этом параметр λ служит параметром собственных значений для $\mathcal{L}(s)$ (соотношение Вайнштайна–Аронзьяна; см., например, [5]). Отметим, что при $\sigma = 0$, $s = 1$ матрица $\mathcal{L}(s)$ образует найденное Мозером представление Лакса для геодезического потока на Q [13], а ее факторизация использовалась в [14] для построения дискретной пары Лакса размера $n \times n$ для классического бильярда в Q . Вопрос о факторизации дуальной матрицы $\mathcal{L}(s)$ при $\sigma \neq 0$ остается открытым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Характеристическое уравнение*

$$\det L(\lambda) \equiv q_\lambda(x, x)q_\lambda(v, v) - q_\lambda^2(x, v) - \sigma q_\lambda(x, x) - q_\lambda(v, v) + \sigma = 0 \quad (12)$$

является условием того, что эллипс, определяемый начальными условиями (x, v) , касается квадрики $Q_\lambda = \{q_\lambda(X, X) = 1\}$.

Действительно, данное уравнение эквивалентно следующей паре уравнений на параметр ϕ^* в точке касания:

$$q_\lambda(X(\phi^*), X(\phi^*)) = 1, \quad \left. \frac{d}{d\phi} q_\lambda(X(\phi), X(\phi)) \right|_{\phi=\phi^*} = 0.$$

С учетом параметризации эллипса (6) исключаем отсюда ϕ^* и после некоторых вычислений получаем следующее алгебраическое уравнения относительно λ :

$$q_\lambda^2(x, v)[(q_\lambda(x, x) - q_\lambda(v, v))^2 + 4q_\lambda^2(x, v)] \det L(\lambda) = 0. \quad (13)$$

Заметим, что билинейная форма $q_\lambda(x, v)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда квадрика Q_λ совпадает с эллипсоидом Q , а вектор начальной скорости v_0 направлен по касательной к нему. Этот случай соответствует тривиальному периодическому движению по некоторому эллипсу на Q и, таким образом, исключается из рассмотрения. Выражение в квадратных скобках в (13) всегда отлично от нуля. В результате мы заключаем, что условие касания задается исключительно уравнением $\det L(\lambda) = 0$, что и требовалось доказать.

Поскольку коэффициенты полинома $(\lambda - a_1) \cdots (\lambda - a_n) \det L(\lambda)$ суть интегралы бильярдного отображения, а степень самого полинома равна n , то мы получаем такое

СЛЕДСТВИЕ. Эллипсы, являющиеся продолжениями кусков траектории бильярда с потенциалом Гука в $Q \subset \mathbb{R}^n$, касаются n фиксированных квадрик, конфокальных с эллипсоидом Q . Параметры квадрик суть корни характеристического полинома $(\lambda - a_1) \cdots (\lambda - a_n) \det L(\lambda)$.

Данное следствие обобщает известное свойство эллипсоидального бильярда без потенциала в $Q \subset \mathbb{R}^n$, траектории которого (или их продолжения) касаются $n - 1$ фиксированных конфокальных квадрик.

Случай плоского бильярда с квадратичным потенциалом и $\sigma > 0$ проиллюстрирован на рис. 1, где эллипсы, продолжающие участки траектории, обозначены пунктирными линиями.

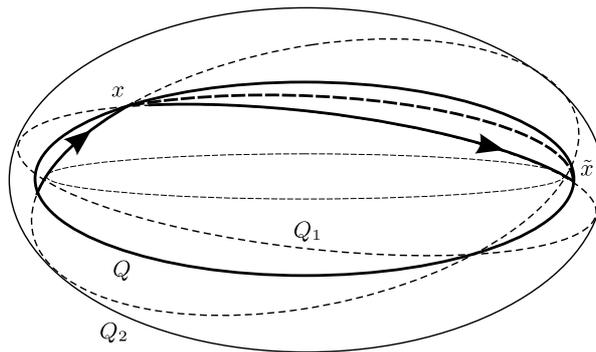


Рис. 1. Эллипсы, продолжающие траекторию до и после отражения в точке X касаются конфокальных квадрик Q_1, Q_2 .

§2. Пуассоновость

В силу принципа Мопертюи при фиксированном значении полной энергии материальной точки, удовлетворяющей условию (2), движение в потенциальном

поле внутри эллипсоида Q приводится к *геодезическому* движению с некоторой невырожденной метрикой.

Естественно предположить, что при фиксированном значении интеграла $(v, v) + \sigma(x, x)$ отображения \mathcal{B} точки соударения x, \tilde{x} уже однозначно определяют всю последовательность точек соударения.

ТЕОРЕМА 2. (1) *Четномерное многообразие $\mathcal{S}_h \subset \mathbb{R}^{2n} = (x, v)$ — совместный уровень интегралов $f_1 = (x, a^{-1}x) = 1$, $f_2 = (v, v) + \sigma(x, x) = h$ — является симплектическим подмногообразием. Ограничение отображения \mathcal{B} на \mathcal{S}_h сохраняет на нем симплектическую структуру и в канонически сопряженных избыточных переменных x, v задается выражениями*

$$v = \frac{\partial S_h(x, \tilde{x})}{\partial x}, \quad \tilde{v} = -\frac{\partial S_h(x, \tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \quad (14)$$

с производящей функцией (дискретным аналогом лагранжиана) на $Q \times Q$

$$S_h(x, \tilde{x}) = \frac{h}{2\sqrt{\sigma}} \hat{\phi} + \frac{h}{2\sqrt{\sigma}} \sin \hat{\phi} \cos \hat{\phi} - \sqrt{\sigma} \sin \hat{\phi}(x, \tilde{x}),$$

где $\hat{\phi}$ есть значение параметра ϕ в конечной точке бильярдной траектории, определяемое выражением

$$\cos \hat{\phi} = \frac{1}{h} \sigma(x, \tilde{x}) + \frac{1}{h} \sqrt{\sigma^2(x, \tilde{x})^2 - \sigma h((x, x) + (\tilde{x}, \tilde{x})) + h^2}. \quad (15)$$

(2) *Отображение (3) сохраняет вырожденную пуассонову структуру на пространстве (x, v) , заданную скобками*

$$\{x_i, x_j\} = 0, \quad \{x_i, v_j\} = \delta_{ij} - \frac{v_i a_j^{-1} x_j}{(x, a^{-1}v)}, \quad \{v_i, v_j\} = \sigma \frac{(a_i^{-1} - a_j^{-1})x_i x_j}{(x, a^{-1}v)}, \quad (16)$$

а интегралы (11) относительно нее коммутируют.

Из данной теоремы вытекает, что ограничение отображения \mathcal{B} на каждое многообразие \mathcal{S}_h — симплектический лист вырожденной скобки (16) — интегрируемо в силу дискретного аналога теоремы Лиувилля (см. [2]). Таким образом, оно интегрируемо и на всем пространстве (x, v) , а его инвариантные многообразия общего положения суть $(n-1)$ -мерные торы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что, согласно формуле (15), в пределе при $\sigma \rightarrow 0$ угол $\hat{\phi}$ устремляется к нулю. При этом, с учетом соотношения $\phi = \sqrt{\sigma}t$ в (6) и естественного условия $h = (v, v) = 1$, производящая функция $S_h(x, \tilde{x})$ переходит в $t = |\tilde{x} - x|$, т.е. дискретный лагранжиан для бильярда без потенциала.

С другой стороны, для описания непрерывного предела производящей функции положим $\tilde{x} = x + \dot{x}\Delta t + O((\Delta t)^2)$, где $\Delta t \ll 1$. Подставляя это выражение в (15), находим разложения

$$\cos \hat{\phi} = 1 - \frac{\sigma(\dot{x}, \dot{x})(\Delta t)^2}{h - \sigma(x, x)} + O((\Delta t)^3), \quad \hat{\phi} = \frac{\sqrt{2\sigma}|\dot{x}|\Delta t}{\sqrt{h - \sigma(x, x)}} + O((\Delta t)^3),$$

с учетом которых S_h принимает вид

$$\sin \hat{\phi} \left(\frac{h}{\sqrt{\sigma}} \cos \hat{\phi} - \sqrt{\sigma}(x, x) \right) + O((\Delta t)^3) = \sqrt{h - \sigma(x, x)} \sqrt{2(\dot{x}, \dot{x})} \Delta t + O((\Delta t)^3).$$

Первый член в правой части есть дифференциал действия по Мопертюи (или *укороченного* действия) в задаче о движении точки по эллипсоиду Q с гуковским потенциалом и скоростью \dot{x} при фиксированной энергии h .

Подчеркнем, что теорема 2 не означает, что бильярдное отображение \mathcal{B} является дискретной лагранжевой системой. Она лишь утверждает, что его *ограничение* на каждый фиксированный уровень интеграла типа энергии описывается производящей функцией. Для отображения на всем фазовом пространстве такой функции (которая зависела бы только от старых и новых координат) не существует (см. замечание 1 выше).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. (1) В силу параметризаций (6), (7) имеем

$$v = \sqrt{\sigma} \frac{\tilde{x} - \cos \hat{\phi} x}{\sin \hat{\phi}}, \quad v' = -\sqrt{\sigma} \frac{x - \cos \hat{\phi} \tilde{x}}{\sin \hat{\phi}}, \quad (17)$$

где $\hat{\phi}$ — значение ϕ в точке \tilde{x} , а $v' = V(\hat{\phi})$. Чтобы выразить $\hat{\phi}$ через x , \tilde{x} , h , вычислим квадрат обеих частей равенства (7) и, используя первое соотношение в (17), а также $(v, v) = h - \sigma(x, x)$, приходим к квадратному уравнению относительно $\cos \hat{\phi}$, одно из решений которого дается формулой (15). Оно выбирается из условия $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \cos \hat{\phi} = 1$.

Отметим, что в силу (9) ограничения скоростей \tilde{v} и v' на \mathcal{S}_h совпадают. С учетом этого, а также формулы (15) и соотношения $\sin \hat{\phi} = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{\phi}}$, выражения (17) становятся эквивалентными выражениям (14).

Отображение (14) сохраняет стандартную симплектическую 2-форму $\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dv_i$ в $\mathbb{R}^{2n} = (x, v)$, а относительно канонической скобки Пуассона в $\mathbb{R}^{2n} = (x, v)$ справедливо равенство $\{f_1, f_2\} = (x, a^{-1}v) \neq 0$. Таким образом, подмногообразие \mathcal{S}_h симплектическое, и ограничение отображения (14) на него также является симплектическим.

(2) Вычисляя ограничение стандартной скобки Пуассона в \mathbb{R}^{2n} на многообразии \mathcal{S}_h согласно процедуре Дирака, получаем соотношения (16). Коммутативность интегралов (11) проверяется затем прямыми вычислениями.

§3. Линеаризация на обобщенном якобиане

Рассмотрим теперь предел потока с потенциалом Гука на n -мерном эллипсоиде $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ при $a_{n+1} \rightarrow 0$ с алгебро-геометрической точки зрения.

Известно (см., например, [16]), что в этом случае движение на \tilde{Q} разделяется в эллиптических координатах $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (полная энергия принимает штеккелеву форму), и при переходе к новому параметру τ , такому, что

$$dt = \lambda_1 \cdots \lambda_n d\tau, \quad (18)$$

оно линеаризуется на многообразии Якоби гиперэллиптической кривой рода n

$$\tilde{\Gamma} = \{\mu^2 = \lambda(\lambda - a_1) \cdots (\lambda - a_{n+1})[c_0(\lambda - c_1) \cdots (\lambda - c_{n-1}) - \sigma\lambda^{n+1}]\},$$

где c_0, \dots, c_{n-1} — константы интегралов, которые положительны при действительных движениях.

В случае $\sigma = 0$ (геодезический поток на \tilde{Q}) c_0 есть значение первого интеграла (\dot{X}, \dot{X}) , а константы c_1, \dots, c_{n-1} допускают прозрачную геометрическую

интерпретацию: касательная к соответствующей геодезической на эллипсоиде одновременно касается конфокальных квадрик $\tilde{Q}(c_1), \dots, \tilde{Q}(c_{n-1})$ (теорема Шаля). При этом параметр τ был впервые введен в [15].

В пределе при $a_{n+1} \rightarrow 0$ кривая $\tilde{\Gamma}$ становится сингулярной (приобретает двойную точку при $\lambda = 0$). Ее регуляризация есть гиперэллиптическая кривая рода $g = n - 1$

$$\Gamma = \{w^2 = \rho(\lambda)\}, \quad (19)$$

$$\rho(\lambda) = -(\lambda - a_1) \cdots (\lambda - a_n)[c_0(\lambda - c_1) \cdots (\lambda - c_{n-1}) - \sigma\lambda^{n+1}],$$

которая совпадает со спектральной кривой представления Лакса (10). Снабдим Γ парой выделенных точек $E_{\pm} = (0, \pm\sqrt{\rho(0)})$, возникших из двойной точки на $\tilde{\Gamma}$.

В результате данной регуляризации n независимых голоморфных дифференциалов на $\tilde{\Gamma}$ преобразуются в линейные комбинации независимых нормированных голоморфных дифференциалов $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ на Γ и нормированного дифференциала третьего рода $\Omega_{E_{\pm}}$ с парой простых полюсов в E_{-}, E_{+} . Согласно теории, изложенной в [4, 9, 10], в указанном пределе n -мерный якобиан кривой $\tilde{\Gamma}$ преобразуется в *обобщенный якобиан* $\text{Jac}(\Gamma, E_{\pm})$ — фактор пространства \mathbb{C}^n по решетке Λ_{2n-1} , порожденной $2n - 1$ независимыми векторами периодов дифференциалов $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \Omega_{E_{\pm}}$. Многообразие $\text{Jac}(\Gamma, E_{\pm})$ есть алгебраическое расширение классического $(n - 1)$ -мерного якобиана $\text{Jac}(\Gamma)$ с помощью группы $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

С другой стороны, координаты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на \tilde{Q} переходят в эллиптические координаты в $\mathbb{R}^n = (X_1, \dots, X_n)$, такие, что

$$X_i^2 = \frac{(a_i - \lambda_1) \cdots (a_i - \lambda_n)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (20)$$

В указанном пределе квадратуры, линеаризующие движение точки на эллипсоиде \tilde{Q} под действием потенциала \mathcal{V}_1 (см., например, [16]), переходят в *обобщенное отображение Абеля–Якоби*

$$\int_{P_0}^{P_1} \omega + \cdots + \int_{P_0}^{P_n} \omega = z, \quad \int_{P_0}^{P_1} \Omega_{E_{\pm}} + \cdots + \int_{P_0}^{P_n} \Omega_{E_{\pm}} = Z, \quad (21)$$

$$P_i = (\lambda_i, w_i), \quad z = \text{const}, \quad Z = \sqrt{\rho(0)}\tau + \text{const}, \quad (22)$$

где $z \in \mathbb{C}^{n-1}$, $Z \in \mathbb{C}$ — координаты на универсальной накрывающей якобиана $\text{Jac}(\Gamma)$ и на \mathbb{C}^* соответственно, такие, что $\{e^Z\} = \mathbb{C}^*$, P_0 — произвольная фиксированная точка на $\Gamma \setminus \{E_{-}, E_{+}\}$, а новый параметр τ определен в (18). При этом, независимо от знака σ , $\sqrt{\rho(0)} \in \mathbb{R}$. В дальнейшем будем полагать, что P_0 — точка Вейерштрасса на Γ .

Квадратуры (21), (22) описывают движение внутри эллипсоида Q в поле потенциала Гука между последовательными соударениями. В силу формулы (22) оно представляется прямолинейным потоком на $\text{Jac}(\Gamma, E_{\pm})$, направленным вдоль вещественной оси на \mathbb{C}^* : Z и τ изменяются от $-\infty$ до ∞ (заметим, что в силу формулы (18) бесконечный промежуток между соударениями в этих переменных соответствует конечному интервалу в первоначальном времени t).

Согласно (21), при $Z = \pm\infty$ одна из точек P_i на Γ (предположим без потери общности, что это P_n) совпадает с полюсом E_{\pm} дифференциала $\Omega_{E_{\pm}}$. Таким образом, при фиксированных константах интегралов координаты точек соударения на Q описываются дивизором P_1, \dots, P_{n-1} на Γ , т.е. (при фиксированной точке P_0) точкой в обычном многообразии Якоби $\text{Jac}(\Gamma)$. Явные формулы для этих координат даются выражениями (20) при $\lambda_n = 0$. Поскольку в силу (22) вдоль каждой траектории на $\text{Jac}(\Gamma, E_{\pm})$ координаты z не меняются, две последовательные точки соударения описываются дивизорами, различающимися на вектор $q = \int_{E_-}^{E_+} \omega \in \mathbb{C}^{n-1}$. В силу известных соотношений Римана последний также является вектором периодов дифференциала $\Omega_{E_{\pm}}$ по каноническим b -циклам на Γ . С другой стороны, конечная точка участка бильярдной траектории с $Z = \infty$ является началом следующего участка с $Z = -\infty$ и некоторой фазой z . Рассуждая по индукции, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Ограничение отображения \mathcal{B} на каждый неособый якобиан кривой Γ есть сдвиг на вектор q .*

Ниже данное свойство будет использовано для построения тэта-функциональных решений бильярда с квадратичным потенциалом.

Отметим, что в случае отсутствия потенциала ($\sigma = 0$) кривая Γ имеет уже нечетный порядок и одну бесконечно удаленную точку, однако все рассуждения данного параграфа и теорема 3 остаются в силе.

§4. Тэта-функциональное решение

Пусть $x(N)$, $v(N)$ есть результат N -й итерации отображения \mathcal{B} . Их явные выражения в тэта-функциях могут быть получены различными способами, в частности, с помощью вычисления вектор-функций Бейкера–Ахиезера оператора $L(\lambda)$ в (10). В случае гиперэллиптической спектральной кривой существует более простой способ, использующий следующий результат, полученный в [11] (с целью дальнейших ссылок сформулируем его в виде теоремы, используя обозначения настоящей статьи).

ТЕОРЕМА 4. *Обращение обобщенного отображения Абеля–Якоби (21), связанного с кривой (19) влечет за собой следующие соотношения*

$$\frac{(a_i - \lambda_1) \cdots (a_i - \lambda_n)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)} = \kappa_i^2 \frac{\tilde{\theta}^2[\delta + \eta_{(i)}](z, Z)}{\tilde{\theta}[\delta](z - \xi/2, Z - S/2) \tilde{\theta}[\delta](z + \xi/2, Z + S/2)}, \quad (23)$$

$$i = 1, \dots, n,$$

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n = \kappa_0^2 \frac{\theta^2[\delta](z)}{\tilde{\theta}[\delta](z - \xi/2, Z - S/2) \tilde{\theta}[\delta](z + \xi/2, Z + S/2)}, \quad (24)$$

$$z \in \mathbb{C}^g, \quad Z \in \mathbb{C}, \quad \xi = \int_{\infty_-}^{\infty_+} \omega, \quad S = \int_{\infty_-}^{\infty_+} \Omega_{E_{\pm}},$$

где $\theta[\delta + \eta_{(i)}](z)$, $\theta[\delta](z)$ — стандартные связанные с данной кривой тэта-функции с матрицей Римана B и полуцелыми тэта-характеристиками $\delta =$

$(\delta'', \delta')^T$, $\eta_{(i)} = (\eta''_{(i)}, \eta'_{(i)})^T \in \mathbb{R}^{2g}/2\mathbb{R}^{2g}$, такими, что по модулю решетки периодов якобиана кривой Γ

$$2\pi i \eta''_{(i)} + B \eta'_{(i)} = \int_{P_0}^{(a_i, 0)} \omega, \quad 2\pi i \delta'' + B \delta' = \mathcal{K}, \quad (25)$$

где \mathcal{K} есть вектор римановых констант, а

$$\tilde{\theta}[\delta + \eta_{(i)}](z, Z) = e^{-Z/2} \theta[\delta + \eta_{(i)}] \left(z - \frac{q}{2} \right) + e^{Z/2} \theta[\delta + \eta_{(i)}] \left(z + \frac{q}{2} \right), \quad q = \int_{E_-}^{E_+} \omega \quad (26)$$

суть обобщенные тета-функции с теми же характеристиками. Наконец, κ_i , κ_0 — постоянные множители, зависящие только от модулей кривой Γ .

Соотношения (23), (24) обобщают аналогичные тета-функциональные выражения (так называемые Wurzelfunktionen) найденные Якоби для случая гиперэллиптических якобианов (см., например [6, 7]). Определение и свойства обобщенных тета-функций можно найти в [8, 10, 11].

Сравнивая теперь левые части равенства (23) с выражениями для эллиптических координат (20) и учитывая (22), заключаем, что движение материальной точки между последовательными соударениями параметризуется выражениями

$$X_i(Z) = \kappa_i \frac{\tilde{\theta}[\delta + \eta_{(i)}](z, Z)}{\sqrt{\tilde{\theta}[\delta](z - \xi/2, Z - S/2) \tilde{\theta}[\delta](z + \xi/2, Z + S/2)}}, \quad (27)$$

где Z пробегает вещественную прямую, а постоянный фазовый вектор z определяет положение траектории внутри Q .

Кроме того, дифференцируя (27) по Z и учитывая формулы (26), (24), находим параметризацию скорости точки между теми же соударениями:

$$\begin{aligned} V_i(Z) &= \frac{\sqrt{\rho(0)}}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} \frac{dX_i}{dZ} \\ &= \kappa'_i \frac{e^{Z/2} F_+(z) + e^{-Z/2} F_-(z)}{\theta^2[\delta](z) \sqrt{\tilde{\theta}[\delta](z - \xi/2, Z - S/2) \tilde{\theta}[\delta](z + \xi/2, Z + S/2)}}, \quad (28) \\ \kappa'_i &= \sqrt{\rho(0)} \kappa_i / \kappa_0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_+(z) &= e^{-S/2} \theta[\delta + \eta_{(i)}](z + q/2) \theta[\delta](z + q/2 - \xi/2) \theta[\delta](z - q/2 + \xi/2) \\ &\quad + e^{S/2} \theta[\delta + \eta_{(i)}](z + q/2) \theta[\delta](z - q/2 - \xi/2) \theta[\delta](z + q/2 + \xi/2) \\ &\quad - 2\theta[\delta + \eta_{(i)}](z - q/2) \theta[\delta](z + q/2 - \xi/2) \theta[\delta](z + q/2 + \xi/2), \\ F_-(z) &= -e^{-S/2} \theta[\delta + \eta_{(i)}](z - q/2) \theta[\delta](z + q/2 - \xi/2) \theta[\delta](z - q/2 + \xi/2) \\ &\quad - e^{S/2} \theta[\delta + \eta_{(i)}](z - q/2) \theta[\delta](z - q/2 - \xi/2) \theta[\delta](z + q/2 + \xi/2) \\ &\quad + 2\theta[\delta + \eta_{(i)}](z + q/2) \theta[\delta](z - q/2 - \xi/2) \theta[\delta](z - q/2 + \xi/2). \end{aligned}$$

Полагая теперь в (27), (28) последовательно $Z = -\infty$, $Z = \infty$, находим координаты и скорость материальной точки соответственно в начале и в конце участка траектории, которые теперь зависят только от z и являются мероморфными функциями на некотором разветвленном накрытии якобиана кривой Γ .

Как следует из (27), тэта-функциональные выражения для координат последовательных точек соударения отличаются лишь сдвигом $z \rightarrow z+q$, что согласуется с теоремой 3. В силу этой теоремы то же самое справедливо для компонент скорости v . По индукции получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. *Координаты и скорость в точках соударения, а также скорость $v'(N)$ в конце N -го участка бильярдной траектории имеют вид*

$$\begin{aligned} x_i(N) &= \kappa_i \frac{\theta[\delta + \eta_{(i)}](z_N)}{\sqrt{\theta[\delta](z_N - \zeta/2) \theta[\delta](z_N + \zeta/2)}}, \\ v_i(N) &= \kappa'_i \frac{F_-(z_N + q/2)}{\theta^2[\delta](z_N + q/2) \sqrt{\theta[\delta](z_N - \zeta/2) \theta[\delta](z_N + \zeta/2)}}, \\ v'_i(N) &= \kappa'_i \frac{F_+(z_N + q/2)}{\theta^2[\delta](z_N + q/2) \sqrt{\theta[\delta](z_N - \zeta/2) \theta[\delta](z_N + \zeta/2)}}, \\ z_N &= z - q/2 + qN \in \mathbb{C}^{n-1}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (29)$$

где z — постоянный фазовый вектор траектории, а характеристики $\delta, \eta_{(i)}$ определены в (25).

Для определения множителей κ_i положим в отображении (21)

$$\{P_1, \dots, P_n\} = \{(a_1, 0), \dots, (a_n, 0), (0, \sqrt{\rho(0)})\} \setminus (a_i, 0).$$

При этом $Z = \infty$, а левая часть i -го соотношения в (23) становится равной 1. Используя затем определение тэта-функций с характеристиками, а также формулу (26), находим

$$\kappa_i = \varepsilon_i \frac{\theta[\delta + \hat{\eta} + \eta_{(i)}](\zeta/2)}{\theta[\delta + \hat{\eta}](0)}, \quad \hat{\eta} = \sum_{s=1}^n \eta_{(s)} \bmod \mathbb{Z}^{2g},$$

где ε_i суть некоторые корни из единицы.

В заключение отметим, что в случае классического бильярда без потенциала ($\sigma = 0$) решения, найденные в [2, 11], имеют вид

$$x_i(N) = \varkappa_i \frac{\theta[\delta + \eta_{(i)}](z_N)}{\theta[\delta](z_N)}, \quad v_i(N) = \varkappa'_i \frac{\theta[\delta + \eta_{(i)}](z_N + q/2)}{\theta[\delta](z_N + q/2)}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (30)$$

с некоторыми константами $\varkappa_i, \varkappa'_i$. Так как в этом случае траектория состоит из прямолинейных отрезков, то $v'(N) = v(N)$. Таким образом, в отличие от решений (29), при $\sigma = 0$ нули (полюсы) координат и скоростей как мероморфных функций на некотором накрытии якобиана $\text{Jac}(\Gamma)$ отличаются лишь сдвигом на $q/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. Гостехиздат, М.-Л., 1941.
2. Веселов А. П. Интегрируемые системы с дискретным временем и разностные операторы. Функци. анализ и его прил., **22**, вып. 2, 1–13 (1988).
3. Веселов А. П. Интегрируемые лагранжевы соответствия и факторизация матричных полиномов. Функци. анализ и его прил., **25**, вып. 2, 38–49 (1991).
4. Серр Ж. Алгебраические группы и поля классов. Мир, М., 1982.

5. *Adams M. R., Harnad J., Hurtubise J.* Dual moment maps into loop algebras. *Lett. Math. Phys.*, **20**, 299–308 (1990).
6. *Buchstaber V. M., Enol'skii V. Z., Leikin D. V.* Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications. *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol. 179*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 1–33.
7. *Clebsch A., Gordan P.* Theorie der abelschen Funktionen. Teubner, Leipzig, 1866.
8. *Gagnon L., Harnad J., Hurtubise J., Winternitz P.* Abelian integrals and the reduction method for an integrable Hamiltonian system. *J. Math. Phys.*, **26**, 1605–1612 (1985).
9. *Gavrilov L.* Generalized Jacobians of spectral curves and completely integrable systems. *Math. Z.*, **47** (1998).
10. *Fay J.* Theta-functions on Riemann surfaces. *Lect. Notes in Math.*, Vol. 352, Springer-Verlag, 1973.
11. *Fedorov Yu.* Classical integrable systems related to generalized Jacobians. *Acta Appl. Math.*, **55**, No. 3, 151–201 (1999).
12. *Kozlov V. V., Treshchev D. V.* Billiards. A generic introduction to the dynamics of systems with impacts. *Transl. Math. Monographs*, Vol. 89, Providence, RI, 1991.
13. *Moser J.* Geometry of quadrics and spectral theory. In: *Chern Symposium (Berkeley 1979)*, 1980, pp. 147–188.
14. *Moser J., Veselov A.* Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials. *Comm. Math. Phys.*, **139**, 217–243 (1991).
15. *Weierstrass K.* Über die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid. *Mathematische Werke I*, New York, 1967, pp. 257–266.
16. *Rauch-Wojciechowski S., Tsiganov A. V.* Integrable one-particle potentials related to the Neumann system and the Jacobi problem of geodesic motion on an ellipsoid. *Phys. Lett. A*, No. 3, **107**, 106–111 (1985).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
29 сентября 2000 г.