1. Proveu aquesta versió senzilla del teorema de Whitney:
Tota varietat compacta té un *embedding* en un espai euclidià.

Procedirem de la manera següent. Sigui M una varietat compacta i sigui $\{(U_i, \varphi_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ un atles finit de M. Existeix un recobriment obert $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ de M tal que $\overline{V_i} \subset U_i$. Sigui $h_i \colon M \to \mathbf{R}$ una funció diferenciable tal que $h_i|_{V_i} = 1$, amb $\mathrm{Supp}(h_i) \subset U_i$. L'aplicació $h_i\varphi_i \colon M \to \mathbf{R}^m$, on $m = \dim M$, està ben definida i és diferenciable. Considereu
$$F = (h_1\varphi_1, \ldots, h_n\varphi_n, h_1, \ldots, h_n) \colon M \to \mathbf{R}^{n(m+1)}.$$
Proveu que és un *embedding*.

Podeu usar les indicacions següents:

- Per a provar que és una immersió en p, observeu que $\mathrm{T}_pF \colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{F(p)}\mathbf{R}^{n(m+1)}$ s'identifica amb $\mathrm{T}_pF = (\mathrm{T}_p(h_1\varphi_1), \ldots, \mathrm{T}_p(h_n\varphi_n), \mathrm{T}_ph_1, \ldots, \mathrm{T}_ph_n)$; si $p \in V_i$, estudieu el component i-èsim d'aquesta darrera expressió.
- Per a provar que F és injectiva, considereu p, q tals que $F(p) = F(q)$. Hi ha un índex i tal que $h_i(p) \neq 0$ (per què?). Deduïu-ne que $h_i(p) = h_i(q)$ i $\varphi_i(p) = \varphi_i(q)$.

2. Sigui $\omega = g_1\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + g_2\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + g_3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \in \Omega^2(\mathbf{R}^3)$, on $g_i \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^3)$, una 2-forma diferencial arbitrària de $\mathbf{R}^3$. Considerem també una subvarietat $M \subset \mathbf{R}^3$ amb $\dim M = 2$ i la 2-forma $\hat{\omega} = i^*(\omega) \in \Omega^2(M)$, on $i \colon M \to \mathbf{R}^3$ és la injecció canònica.

(a) Proveu que $\hat{\omega}(p) = 0$ si i només si $g_1(p)\, \left.\dfrac{\partial}{\partial x}\right|_p + g_2(p)\, \left.\dfrac{\partial}{\partial y}\right|_p + g_3(p)\, \left.\dfrac{\partial}{\partial z}\right|_p \in \mathrm{T}_pM$.

(b) Sigui $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funció diferenciable i suposem que la subvarietat M és el graf de f, és a dir, $M = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$. Considerem la carta de M donada per la projecció $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Trobeu l'expressió de la 2-forma $\hat{\omega} \in \Omega^2(M)$ en aquesta carta.

(c) Suposem que $\omega = \mathrm{d}\sigma$, on $\sigma = (y + z^2)\mathrm{d}x + (x + z^2)\mathrm{d}y + f(x, y)\mathrm{d}z \in \Omega^1(\mathbf{R}^3)$. Trobeu l'expressió de $\hat{\omega} \in \Omega^2(M)$ respecte de la mateixa carta de M que en l'apartat anterior.

(d) Prenguem ara més concretament $f(x, y) = x^2 + y^2$ i considerem el camp vectorial $X = -y\,\partial/\partial x + 2x\,\partial/\partial y + 2xy\,\partial/\partial z \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^3)$. Proveu que X restringeix a un camp $\hat{X} \in \mathfrak{X}(M)$. Expresseu el camp vectorial $\hat{X}$ en la mateixa carta. Calculeu $i_{\hat{X}}\hat{\omega}$ i també $\mathcal{L}_{\hat{X}}\hat{\omega}$.

3. Sigui $\mathbf{P}_2$ el pla projectiu sobre $\mathbf{R}$. És a dir, $\mathbf{P}_2 = (\mathbf{R}^3 - \{0\})/\sim$, on la relació d'equivalència $\sim$ està definida per: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si i només si existeix $\lambda \in \mathbf{R} - \{0\}$ tal que $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$. Posem $[x_1, x_2, x_3] \in \mathbf{P}_2$ per la classe d'equivalència del vector $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Posem $U_i = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbf{P}_2 \mid x_i \neq 0\}$ i considerem l'atles de $\mathbf{P}_2$ format per les tres cartes

- $\varphi_1 \colon U_1 \to \mathbf{R}^2$, on $\varphi_1[x_1, x_2, x_3] = (x_2/x_1, x_3/x_1) = (u_1, u_2)$,
- $\varphi_2 \colon U_2 \to \mathbf{R}^2$, on $\varphi_2[x_1, x_2, x_3] = (x_1/x_2, x_3/x_2) = (v_1, v_2)$,
- $\varphi_3 \colon U_3 \to \mathbf{R}^2$, on $\varphi_3[x_1, x_2, x_3] = (x_1/x_3, x_2/x_3) = (w_1, w_2)$.

(a) Considerem els camps vectorials $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{P}_2)$ que, en la carta (U_1, φ_1), s'expressen com
$$X = -u_1\frac{\partial}{\partial u_1}, \quad Y = -u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2}.$$
Determineu el flux del camp X sobre U_1.

(b) Trobeu l'expressió local del camp vectorial $[X, Y]$ en la carta (U_1, φ_1) i determineu-ne els valors en els punts de la recta $x_1 = 0$.

(c) Proveu que, per a qualsevol $\eta \in \Omega^2(\mathbf{P}_2)$, existeix un punt $p \in \mathbf{P}_2$ tal que $\eta(p) = 0$.
(Això prova que $\mathbf{P}_2$ no és orientable.)