

Varietats Diferenciables

Definicions i resultats

apunts per a l'assignatura de Varietats Diferenciables
del grau de Matemàtiques de la FME

Xavier Gràcia

`xavier.gracia@upc.edu`

`https://web.mat.upc.edu/xavier.gracia/vardif`

Departament de Matemàtiques
Facultat de Matemàtiques i Estadística (FME)
Universitat Politècnica de Catalunya

gener 2015 / versió 13 octubre 2024



© Xavier Gràcia Sabaté 2015–2024

Document subjecte a la llicència de Reconeixement –
NoComercial – CompartirIgual 4.0 Internacional

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Sumari

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Varietats diferenciables | 7 |
| 1.1 | Cartes, atlas, varietats | 7 |
| 1.2 | Exemples | 9 |
| 1.3 | Aplicacions diferenciables | 10 |
| 1.4 | Difeomorfismes | 12 |
| 1.5 | L'àlgebra de les funcions diferenciables | 12 |
| 1.6 | Funcions altiplà | 14 |
| 1.7 | Particions de la unitat | 15 |
| 2 | Vectors tangents i cotangents | 19 |
| 2.1 | Vectors tangents i espai tangent | 19 |
| 2.2 | L'aplicació tangent | 20 |
| 2.3 | Expressions coordenades | 21 |
| 2.4 | Derivació definida per un vector tangent | 22 |
| 2.5 | Derivacions puntuals | 23 |
| 2.6 | Espai cotangent i diferencial d'una funció en un punt | 26 |
| 3 | Subvarietats i aplicacions | 29 |
| 3.1 | Subvarietats regulars | 29 |
| 3.2 | Restricció i extensió d'aplicacions | 30 |
| 3.3 | Rang d'una aplicació i teorema de la funció inversa | 30 |
| 3.4 | Estudi local de les immersions | 31 |
| 3.5 | Estudi local de les submersions | 32 |
| 3.6 | Subvarietats immerses i immersions difeomorfes | 34 |
| 3.7 | Varietats quocient | 35 |
| 4 | Els fibrats tangent i cotangent | 37 |
| 4.1 | El fibrat tangent | 37 |
| 4.2 | L'aplicació tangent | 38 |
| 4.3 | Camps vectorials | 39 |
| 4.4 | Camps vectorials com a derivacions | 42 |
| 4.5 | Camps vectorials relacionats per aplicacions | 44 |
| 4.6 | El fibrat cotangent | 45 |
| 4.7 | Formes diferencials i diferencial d'una funció | 46 |
| 4.8 | Dualitat entre camps vectorials i 1-formes diferencials | 47 |
| 4.9 | Pull-back de formes diferencials | 48 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5 | Equacions diferencials i fluxos | 51 |
| 5.1 | Aixecament d'un camí al fibrat tangent | 51 |
| 5.2 | Corbes integrals d'un camp vectorial | 51 |
| 5.3 | Flux d'un camp vectorial | 52 |
| 5.4 | Camps vectorials complets | 53 |
| 5.5 | Grups uniparamètrics de transformacions | 54 |
| 5.6 | Òrbites d'una equació diferencial | 56 |
| 5.7 | Derivada de Lie de funcions i de camps vectorials | 58 |
| 6 | Camps tensorials | 61 |
| 6.1 | Camps tensorials | 61 |
| 6.2 | Operacions amb camps tensorials | 63 |
| 6.3 | Formes diferencials | 65 |
| 6.4 | La diferencial exterior | 68 |
| 6.5 | Derivada de Lie de camps tensorials | 70 |
| 6.6 | Derivada de Lie de formes diferencials | 72 |
| 7 | Distribucions tangents | 73 |
| 7.1 | Distribucions tangents | 73 |
| 7.2 | Distribucions integrables i distribucions involutives | 75 |
| 7.3 | Teorema de Frobenius | 76 |
| 7.4 | Aplicació: equacions en derivades parcials de primer ordre | 78 |
| 7.5 | Sistemes de Pfaff | 80 |
| 7.6 | Distribucions tangents no integrables | 81 |
| 8 | Connexions | 83 |
| 8.1 | Connexions en una varietat | 83 |
| 8.2 | Derivació covariant de camps tensorials | 85 |
| 8.3 | Derivació covariant al llarg de camins | 86 |
| 8.4 | Transport paral·lel i geodèsiques | 88 |
| 8.5 | Torsió i curvatura d'una connexió | 90 |
| 9 | Varietats pseudoriemannianes | 93 |
| 9.1 | Varietats pseudoriemannianes | 93 |
| 9.2 | Algunes construccions en varietats pseudoriemannianes | 94 |
| 9.3 | La connexió de Levi-Civita | 95 |
| 9.4 | Subvarietats d'una varietat riemanniana | 96 |
| 9.5 | Curvatura en una varietat pseudoriemanniana | 98 |
| 9.6 | Distància en una varietat riemanniana | 100 |

| | |
|---|------------|
| 10 Varietats simplèctiques | 101 |
| 10.1 Varietats simplèctiques. Teorema de Darboux | 101 |
| 10.2 Camps vectorials hamiltonians | 102 |
| 10.3 Claudàtor de Poisson | 103 |
| 10.4 Simplectomorfismes i transformacions canòniques | 105 |
| 10.5 Varietats de Poisson | 106 |
| A Complements | 111 |
| A.1 Producte de varietats | 111 |
| A.2 Grups de Lie | 112 |
| A.3 Orientabilitat | 115 |
| A.4 Equacions diferencials de segon ordre | 116 |
| A.5 Les formes diferencials canòniques del fibrat cotangent . . . | 117 |
| A.6 Fluxos dependents del temps | 118 |
| Índex terminològic | 121 |
| Índex de notacions | 127 |

Prefaci

L'origen llunyà d'aquestes notes es troba en uns apunts similars de l'assignatura de Geometria Diferencial 2, amb l'addició d'alguns capítols d'Ampliació de Models Matemàtics de la Física, ambdues dins l'antiga llicenciatura de Matemàtiques de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC. D'aquesta manera el document actual abraça de forma baldera els continguts de l'assignatura de Varietats Diferenciables del grau de Matemàtiques establert l'any 2009 a la FME.

No hi ha demostracions, ni gairebé exemples; només les definicions i els resultats, d'importància diversa. Aquestes notes no substitueixen els apunts, ni els llibres, ni, encara menys, el treball personal.

Us agrairé que em feu arribar correccions i suggeriments.

Les *definicions* hi apareixen indicades així. La resta d'enunciats són proposicions, teoremes, corollaris, ... Alguns comentaris i resultats auxiliars també hi apareixen, amb una lletra més petita.

1 Varietats diferenciables

El concepte de varietat diferenciable es pot definir partint d'un conjunt, d'un espai topològic, o d'una varietat topològica. Partirem del segon.

1.1 Cartes, atles, varietats

(1.1.1) Sigui M un espai topològic. Una **carta** (o carta local) m -dimensional de M és un parell (U, φ) on $U \subset M$ és un subconjunt obert i $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbf{R}^m$ és un homeomorfisme amb un obert de \mathbf{R}^m .

La dimensió d'una carta està determinada per la topologia de M , ja que dos oberts no-buits de \mathbf{R}^m i \mathbf{R}^n amb $m \neq n$ no poden ser homeomorfs, pel *teorema de la invariància de la dimensió*.

(1.1.2) Una carta (U, φ) també s'anomena **sistema de coordenades**. El domini U s'anomena **obert coordinat** i les funcions components φ^i de φ s'anomenen **funcions coordinades** de la carta.

Si $p \in U$, els nombres $\varphi(p) = (\varphi^1(p), \dots, \varphi^m(p))$ s'anomenen **coordinades** (locals) de p en la carta (U, φ) .

(1.1.3) Siguin (U, φ) , (V, ψ) dues cartes m -dimensionals de M . Anomenem **canvi de carta** (o **canvi de coordenades**) l'aplicació, entre oberts de \mathbf{R}^m , que denotem (abusant de la notació) per

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V).$$

(1.1.4) Dues cartes (U, φ) , (V, ψ) es diuen **compatibles** si el canvi de coordenades, i el seu invers, són aplicacions de classe C^∞ .

Si $U \cap V = \emptyset$ aquesta condició es compleix trivialment.

(1.1.5) Un **atles** m -dimensional en M és un conjunt de cartes m -dimensionals $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ tals que els seus dominis recobreixen M , i dues cartes qualssevol són compatibles:

- $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$
- $(\forall \alpha, \beta \in A) \quad \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ és de classe C^∞

(1.1.6) Dos atles m -dimensionals \mathcal{A} , \mathcal{B} de M són **compatibles** si la seva unió $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ també és un atles; això equival a afirmar que cada carta de \mathcal{A} és compatible amb cada carta de \mathcal{B} .

(1.1.7) En el conjunt dels atlas de M , la relació « \mathcal{A} és compatible amb \mathcal{B} » és una relació d'equivalència.

La unió de tots els atlas d'una classe d'equivalència és un atlas maximal (és a dir, un atlas al qual no es poden afegir més cartes compatibles).

(1.1.8) Una **estructura diferenciable** m -dimensional en M és una classe d'equivalència d'atles m -dimensionals de M , o, equivalentment, un atlas maximal.

(1.1.9) Una **varietat diferenciable**¹ de **dimensió** m és un espai topològic M dotat d'una estructura diferenciable m -dimensional.

Suposarem implícitament que M no és buit.

(1.1.10) La dimensió de M es representa per $\dim M$.

És habitual anomenar **corbes** les varietats de dimensió 1, i **superfícies** les de dimensió 2.

(1.1.11) Quan parlem d'una **carta** d'una varietat diferenciable, ens referim a una carta del seu atlas maximal.

Igualment, quan parlem d'un **atles** d'una varietat diferenciable, ens estarem referint a un dels atlas de la seva estructura diferenciable.

(1.1.12) En la definició de varietat diferenciable, sovint s'imposen condicions topològiques a l'espai M :

- que sigui separat (Hausdorff)
- que la seva topologia tingui base numerable d'oberts; o, més generalment, que sigui un espai paracompacte

Sempre assumirem que es compleix la primera; per a alguns resultats, caldrà assumir que també es compleix la segona.

(1.1.13) En tota la discussió anterior hauríem pogut considerar canvis de carta de classe C^r , amb $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty, \omega\}$, de manera que obtindríem la definició de **varietat de classe** C^r .

Una varietat de classe C^0 és una **varietat topològica**. Una varietat de classe C^ω es diu **varietat analítica**. Una varietat de classe C^∞ és el que hem anomenat varietat diferenciable; també es diu **varietat llisa**.

Tota varietat de classe C^r és automàticament una varietat de classe C^s , per a qualsevol $s \leq r$.

¹També s'usen els termes *estructura diferencial* i *varietat diferencial*.

Llevat d'indicació contrària, no considerarem més que varietats de classe C^∞ , i les anomenarem simplement *varietats*.

(1.1.14) A vegades es defineix el concepte de varietat sense imposar que els diferents components tinguin la mateixa dimensió. Sota aquest punt de vista més general, una varietat com les que hem definit, on tots els components tenen la mateixa dimensió, s'anomena *varietat pura*.

(1.1.15) Es poden considerar varietats de dimensió infinita reemplaçant els espais \mathbf{R}^m per espais de Hilbert, espais de Banach, espais de Fréchet, o altres espais vectorials topològics més generals: s'obtenen les *varietats de Hilbert*, *varietats de Banach*, etc.

Si es reemplaça com a model local \mathbf{R}^m per un semiespai tancat com ara $\mathbf{R}_-^m = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \mid x^1 \leq 0\}$ s'obté el concepte de *varietat amb vora*.

Si es reemplaça \mathbf{R}^m per \mathbf{C}^m , amb canvis de coordenades holomorfs, s'obtenen les *varietats complexes* o *holomorfes*.

1.2 Exemples

(1.2.1) \mathbf{R}^n té una estructura diferenciable canònica, la definida per la carta global $\text{Id}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ i l'atles corresponent $\{(\mathbf{R}^n, \text{Id})\}$. Les funcions coordenades corresponents $\text{pr}_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ són les *coordenades cartesianes*.

Les cartes de la varietat diferenciable \mathbf{R}^n són, doncs, tots els difeomorfismes $\varphi: U \rightarrow \widehat{U}$ de classe C^∞ entre oberts de \mathbf{R}^n .

(1.2.2) Sigui E un \mathbf{R} -espai vectorial de dimensió finita m , amb la seva topologia canònica. Qualsevol bijecció lineal $\varphi: E \rightarrow \mathbf{R}^m$ és una carta global, i $\{(E, \varphi)\}$ un atlas, que defineix una estructura diferenciable en E . Aquesta no depèn de l'isomorfisme φ triat.

(1.2.3) Les varietats de dimensió 0 són els espais topològics discrets.

(1.2.4) Siguin M una varietat diferenciable, i $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ una carta de M . Si $U' \subset U$ és un obert, la restricció $\varphi': U' \rightarrow \varphi(U')$ també és una carta de M .

Així, si $W \subset M$ és un subespai obert i $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ una carta de M , llavors $\varphi|_{U \cap W}: U \cap W \rightarrow \varphi(U \cap W)$ també és una carta de M .

(1.2.5) Sigui M una varietat diferenciable, i $W \subset M$ un subespai obert. Les cartes (U, φ) de M amb domini $U \subset W$ són cartes de l'espai topològic W , i el conjunt de totes elles és un atlas de W . Amb aquesta estructura diferenciable, W s'anomena *subvarietat oberta* de M .

(1.2.6) En particular, tot obert $W \subset \mathbf{R}^n$ té una estructura diferenciable canònica, la donada per la carta global $\text{Id}_W: W \rightarrow W$.

(1.2.7) *Subvarietats de \mathbf{R}^n*

Signi $M \subset \mathbf{R}^n$ una subvarietat regular de classe C^∞ : per a cada punt $x \in M$, existeixen un conjunt obert U de \mathbf{R}^n contenint x , i un difeomorfisme de classe C^∞ $\varphi: U \rightarrow V$, tals que $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^m \times \{0\})$. Posem $U_\circ = U \cap M$, obert de M , i $V_\circ = V \cap (\mathbf{R}^m \times \{0\})$, obert de \mathbf{R}^m . Llavors la restricció de φ , considerada com a aplicació $\varphi_\circ: U_\circ \rightarrow V_\circ$, és una carta m -dimensional de M , i el conjunt d'aquestes cartes defineix sobre M una estructura de varietat diferenciable.

(1.2.8) Siguin M, N varietats diferenciables. Siguin $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ un atlas de M , $\{(V_\beta, \psi_\beta) \mid \beta \in B\}$ un atlas de N . Per a cada $(\alpha, \beta) \in A \times B$, el parell $(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$ és una carta de $M \times N$, anomenada **carta producte**. El conjunt de totes elles n'és un atlas, amb el qual $M \times N$ és una varietat diferenciable, anomenada **varietat producte** de M i N .

Si $\dim M = m$ i $\dim N = n$, aleshores $\dim(M \times N) = m + n$.

Igualment es defineix el producte d'un nombre finit de varietats diferenciables.

1.3 Aplicacions diferenciables

(1.3.1) Siguin M, N varietats diferenciables, $f: M \rightarrow N$ una aplicació. Siguin (U, φ) una carta de M i (V, ψ) una carta de N tals que $f(U) \subset V$. Llavors està definida l'aplicació

$$\widehat{f} = \psi \circ f|_U \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

entre conjunts oberts d'espais euclidians. S'anomena **expressió local** de f en les cartes (U, φ) i (V, ψ) .

(1.3.2) Si f és contínua en $p \in M$, llavors existeix una expressió local de f al voltant de p .

(1.3.3) Si una expressió local de f és de classe C^∞ , aleshores també ho és qualsevol expressió local definida a partir d'una carta de M amb domini més petit.

(1.3.4) Una aplicació $f: M \rightarrow N$ es diu **aplicació diferenciable**, **aplicació de classe C^∞** , o **aplicació llisa** si, per a tot $p \in M$, existeix una expressió local \widehat{f} de f , definida a partir d'un obert coordinat $U \ni p$, tal que \widehat{f} és de classe C^∞ .

Notem la discrepància de la primera denominació respecte a la nomenclatura habitual del càlcul diferencial.

(1.3.5) Denotarem per $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ el conjunt d'aplicacions de classe C^∞ entre M i N .

(1.3.6) Si f és de classe C^∞ , llavors és contínua.

(1.3.7) Sigui $f: M \rightarrow N$ una aplicació. Si f és de classe C^∞ i $U \subset M$ és un subconjunt obert, llavors $f|_U: U \rightarrow N$ és classe C^∞ .

Recíprocament, si les restriccions de f als conjunts d'un recobriment obert de M són de classe C^∞ , llavors f és de classe C^∞ .

Això es pot expressar dient que «ser de classe C^∞ » és una propietat local.

(1.3.8) *Lema d'enganxament d'aplicacions diferenciables*

Siguin M, N varietats, $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recobriment obert de M , i $f_\alpha: U_\alpha \rightarrow N$ aplicacions tals que, per a qualssevol $\alpha, \beta \in A$, es compleix $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$. Llavors existeix una única aplicació $f: M \rightarrow N$ tal que, per a tot α , $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$. Si les f_α són de classe C^∞ , també ho és f .

(1.3.9) Sigui $f: M \rightarrow N$ una aplicació contínua. Siguin $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ un atlas de M , $\{(V_\beta, \psi_\beta) \mid \beta \in B\}$ un atlas de N . Llavors f és de classe C^∞ sii, per a tot $(\alpha, \beta) \in A \times B$, l'aplicació

$$\widehat{f}_{\alpha\beta} = \psi_\beta \circ f|_{U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)} \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \longrightarrow \psi_\beta(V_\beta)$$

és de classe C^∞ .

(1.3.10) Siguin $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ aplicacions. Siguin $(U, \varphi), (V, \psi), (W, \chi)$ cartes de M, N i P tals que $f(U) \subset V, g(V) \subset W$. Per a les expressions locals de f, g i $g \circ f$ es compleix

$$\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}.$$

(1.3.11) Siguin $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ aplicacions. Si f i g són de classe C^∞ , també ho és $g \circ f$.

(1.3.12) Les varietats diferenciables són els *objectes* d'una categoria², **Man**, els *morfismes* de la qual són les aplicacions diferenciables $\mathcal{C}^\infty(M, N)$.

²Una categoria està formada per: (i) una classe d'*objectes*, (ii) per a cada parell d'*objectes* A, B , una classe $\text{Mor}(A, B)$ de *morfismes*, i (iii) per a cada morfisme $f \in \text{Mor}(A, B)$ i cada morfisme $g \in \text{Mor}(B, C)$, existeix la composició $g \circ f \in \text{Mor}(A, C)$. Aquesta està subjecta a les regles següents: (i) la composició és associativa i (ii) per a cada objecte A existeix un morfisme $\text{Id}_A \in \text{Mor}(A, A)$ que és element neutre de la composició tant per la dreta com per l'esquerra.

(1.3.13) En tota la discussió anterior hauríem pogut considerar M i N varietats de classe C^r , $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty, \omega\}$, i expressions locals \hat{f} de classe C^k , amb $k \leq r$. S'obté així la noció d'**aplicació de classe C^k** . Les aplicacions de classe C^ω són les *aplicacions analítiques*.

1.4 Difeomorfismes

(1.4.1) Un **difeomorfisme** és una bijecció $f: M \rightarrow N$ tal que f i f^{-1} són diferenciables.

En altres paraules, els difeomorfismes són els isomorfismes dins la categoria de les varietats diferenciables.

(1.4.2) Dues varietats es diuen **difeomorfes** si existeix un difeomorfisme entre elles. Necessàriament tenen la mateixa dimensió, i són homeomorfes.

- (1.4.3) • L'aplicació identitat és un difeomorfisme.
 • La composició de difeomorfismes és un difeomorfisme.
 • L'aplicació inversa d'un difeomorfisme també és un difeomorfisme.

(1.4.4) Les cartes d'una varietat coincideixen exactament amb els difeomorfismes dels seus oberts amb oberts de \mathbf{R}^m .

(1.4.5) Una mateixa varietat topològica pot tenir diferents estructures diferenciables.

En algun casos, com ara \mathbf{R}^4 o \mathbf{S}_7 , hi ha diferents estructures diferenciables *no isomorfes*.

(1.4.6) Tota varietat diferenciable de dimensió n amb base numerable d'oberts és difeomorfa a una subvarietat de \mathbf{R}^{2n+1} (*teorema de Whitney*).

(1.4.7) Si considerem varietats de classe C^r , $r \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty, \omega\}$, es defineix de manera anàloga la noció de *difeomorfisme de classe C^r* .

Tota varietat diferenciable de classe C^1 admet una estructura diferenciable de classe C^∞ . En canvi, hi ha varietats topològiques que no admeten cap estructura diferenciable.

1.5 L'àlgebra de les funcions diferenciables

(1.5.1) Anomenarem **funció** una aplicació $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ (o més generalment amb valors vectorials, en \mathbf{R}^n o en un espai vectorial real de dimensió finita).

(1.5.2) Una funció $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ és de classe C^∞ sii existeix un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de M tal que les expressions locals $\widehat{f}_\alpha = f|_{U_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbf{R}$ són de classe C^∞ .

(1.5.3) Denotarem el conjunt $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbf{R})$ de les funcions diferenciables en M per $\mathcal{C}^\infty(M)$, o $\mathcal{F}(M)$.

$\mathcal{C}^\infty(M)$ és una subàlgebra de la \mathbf{R} -àlgebra de les funcions contínues $C^0(M)$, amb les operacions habituals de suma i producte de funcions, i multiplicació per escalars.

(1.5.4) Sigui $F: M \rightarrow N$ una aplicació entre varietats. Si $g: N \rightarrow \mathbf{R}$ és una funció, es pot definir la funció $F^*(g): M \rightarrow \mathbf{R}$ per

$$F^*(g) = g \circ F.$$

$F^*(g)$ és la **imatge recíproca** o **pull-back** de g per F .

(1.5.5) Si $F: M \rightarrow N$ és una aplicació diferenciable, llavors per a tota funció diferenciable $g: N \rightarrow \mathbf{R}$ la funció $F^*(g)$ és diferenciable, i l'aplicació

$$F^*: \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

és un morfisme de \mathbf{R} -àlgebres.

(1.5.6) Considerem dues cartes (U, φ) de M i (V, ψ) de N tals que $F(U) \subset V$. Si \widehat{F} és la corresponent expressió local de F , es compleix que

$$F^*(\psi)|_U = \widehat{F} \circ \varphi,$$

de manera que $F|_U$ està determinada pels pull-backs $(F^*(\psi^j)) = F^*(\psi)$ de les funcions coordenades.

(1.5.7) El pull-back de les funcions coordenades permet calcular, en el conjunt obert pertinent, el pull-back de funcions qualssevol.

En efecte, continuant amb les mateixes hipòtesis, sigui $g: N \rightarrow \mathbf{R}$ una funció, i escrivim-la com $g = \widehat{g} \circ \psi$, és a dir, $g|_V$ s'expressa com una funció \widehat{g} de les funcions coordenades ψ^j . El seu pull-back per F també, $F^*(g)|_U = \widehat{F^*(g)} \circ \varphi$, i de fet

$$F^*(g)|_U = \widehat{g} \circ F^*(\psi),$$

és a dir, dins de \widehat{g} només cal substituir les ψ^j pels seus pull-backs $F^*(\psi^j)$, els quals són funcions de les φ^i .

(1.5.8) L'aplicació pull-back satisfà les propietats següents:

- $\text{Id}_M^* = \text{Id}_{\mathcal{C}^\infty(M)}$.
- Si $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} P$, $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.
- Si $M \xrightarrow{F} N$ és un difeomorfisme, $F^*: \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ és un isomorfisme.

(1.5.9) Les dues primeres propietats anteriors es poden reformular de la manera següent: la correspondència que assigna

- $M \rightsquigarrow \mathcal{C}^\infty(M)$,
- $F: M \rightarrow N \rightsquigarrow F^*: \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$,

és un *functor*³ contravariant de la categoria **Man** de les varietats diferenciables en la categoria **Alg_R** de les **R**-àlgebres.

(1.5.10) Recíprocament, si $T: \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ és un isomorfisme de **R**-àlgebres, es pot provar que existeix un difeomorfisme $F: M \rightarrow N$ tal que $T = F^*$. Per tant, l'àlgebra $\mathcal{C}^\infty(M)$ caracteritza la varietat M .

(1.5.11) En el cas d'un *difeomorfisme* $F: M \rightarrow N$, existeix l'aplicació inversa del pull-back F^* . Es representa per $F_*: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(N)$, i s'anomena *push-forward* o *imatge directa*.

1.6 Funcions altiplà

(1.6.1) Recordem que el *support* d'una funció $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ és el més petit dels conjunts tancats fora dels quals s'anul·la:

$$\text{Supp}(f) = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}.$$

(1.6.2) Existeix una funció $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ tal que $f(t) = 0$ si $t \leq 0$ i $f(t) > 0$ si $t > 0$.

(*Observació:* tal f no pot ser de classe C^ω .)

Per exemple, la funció definida per $f(t) = 0$ si $t \leq 0$, $f(t) = e^{-1/t}$ si $t > 0$.

(1.6.3) Siguin $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Existeix una funció $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ tal que $g(t) = 1$ si $t \leq a$, $g(t) = 0$ si $t \geq b$, i $0 < g(t) < 1$ si $a < t < b$.

Per exemple:
$$g(t) = \frac{f(b-t)}{f(b-t) + f(t-a)}.$$

(1.6.4) Siguin $0 < a < b$. Existeix una funció $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ tal que

- $h(x) = 1$ si $\|x\| \leq a$,
- $h(x) = 0$ si $\|x\| \geq b$,
- $0 < h(x) < 1$ si $a < \|x\| < b$.

Per exemple: $h(x) = g(\|x\|)$.

³Donades categories **A** i **B**, un *functor covariant* K de **A** en **B** associa a cada objecte X de la primera un objecte $K(X)$ de la segona, i a cada morfisme $f: X \rightarrow X'$ de la primera un morfisme $K(f): K(X) \rightarrow K(X')$ de la segona, de manera que $K(\text{Id}_X) = \text{Id}_{K(X)}$ i $K(f' \circ f) = K(f') \circ K(f)$. Si canvia l'ordre dels morfismes, es diu *functor contravariant*.

(1.6.5) *Lema d'existència de funcions altiplà I*

Sigui M una varietat diferenciable, $p \in M$ un punt, $V \ni p$ un conjunt obert. Existeix una funció diferenciable $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ tal que:

- f val 1 en un veïnat compacte $C \ni p$ tal que $C \subset V$,
- f té suport compacte contingut en V ,
- $0 \leq f \leq 1$.

(1.6.6) *Lema d'existència de funcions altiplà II*

Sigui M una varietat diferenciable, $V \subset M$ un conjunt obert, $A \subset V$ un conjunt compacte. Existeix una funció diferenciable $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ tal que:

- $f|_A = 1$,
- f té suport compacte contingut en V ,
- $0 \leq f \leq 1$.

(1.6.7) Una funció amb les característiques anteriors s'anomena **funció altiplà**.

(1.6.8) *Lema d'extensió local de funcions*

Sigui M una varietat diferenciable, $V \subset M$ un conjunt obert, $A \subset V$ un conjunt compacte. Si $g: V \rightarrow \mathbf{R}$ és diferenciable, existeix una funció diferenciable $\tilde{g}: M \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $\tilde{g}|_A = g|_A$.

(1.6.9) Sigui $F: M \rightarrow N$ una aplicació contínua entre varietats. Si per a tota funció diferenciable $g: N \rightarrow \mathbf{R}$ el pull-back $F^*(g)$ és diferenciable, aleshores això també és cert per a tota funció diferenciable $g: V \rightarrow \mathbf{R}$ definida sobre un obert $V \subset N$ qualsevol.

(1.6.10) *Caracterització alternativa de la diferenciabilitat d'aplicacions*

Sigui $F: M \rightarrow N$ una aplicació contínua entre varietats. Suposem que, per a tota funció diferenciable $g: N \rightarrow \mathbf{R}$, el pull-back $F^*(g)$ és diferenciable. Llavors F és diferenciable.

1.7 Particions de la unitat

(1.7.1) Sigui M un espai topològic. Una **partició (contínua) de la unitat** en M és una família $(\psi_i)_{i \in I}$ de funcions contínues $\psi_i: M \rightarrow \mathbf{R}$ tal que:

- $0 \leq \psi_i \leq 1$,
- el conjunt dels suports $\{\text{Supp}(\psi_i)\}_{i \in I}$ és localment finit⁴,

⁴En un espai topològic, una família de parts S_i es diu **localment finita** quan tot punt té un veïnat que només talla un nombre finit de les S_i .

- $\sum_{i \in I} \psi_i = 1.$

La partició es diu **subordinada** a un recobriment $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de M si cada $\text{Supp}(\psi_i)$ està contingut en algun U_α .

(1.7.2) A vegades es defineix aquesta noció amb els dos conjunts d'índexs, I , A , iguals. En efecte, s'obté una nova partició de la unitat prenent per a cada i un $\alpha(i)$ tal que $\text{Supp}(\psi_i) \subset U_{\alpha(i)}$, i definint $\chi_\beta = \sum_{\substack{i \in I \\ \alpha(i) = \beta}} \psi_i.$

(1.7.3) Un espai de Hausdorff és paracompacte sii per a tot recobriment obert existeix una partició contínua de la unitat subordinada al recobriment.

(1.7.4) Si M és una varietat diferenciable, es defineix de manera anàloga el concepte de **partició (diferenciable) de la unitat**, demanant que les funcions ψ_i siguin diferenciables.

(1.7.5) Si M és una varietat paracompacta, tot recobriment obert de M té una partició diferenciable de la unitat subordinada.

Considerem tot seguit el cas més simple d'una varietat amb base numerable d'oberts. El cas general en resulta de tenir en compte que tota varietat és la unió disjunta dels seus components conexas, i que en una varietat paracompacta cada component té base numerable d'oberts.

(1.7.6) *Lema de la ceba*

Sigui M un espai localment compacte amb base numerable d'oberts. Hi ha una successió d'oberts $(G_i)_{i \geq 1}$ tal que els \bar{G}_i són compactes, $\bar{G}_i \subset G_{i+1}$, i $M = \cup_i G_i$.

(1.7.7) *Teorema d'existència de particions de la unitat (I)*

Sigui M una varietat diferenciable amb base numerable d'oberts. Sigui (U_α) un recobriment obert de M . Existeix una partició de la unitat numerable $(\psi_i)_{i \in \mathbf{N}}$ subordinada al recobriment (U_α) , i amb els $\text{Supp}(\psi_i)$ compactes.

(1.7.8) *Teorema d'existència de particions de la unitat (II)*

Sigui M una varietat diferenciable paracompacta. Sigui $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recobriment obert de M . Existeix una partició de la unitat $(\chi_\alpha)_{\alpha \in A}$ subordinada al recobriment $(\text{Supp}(\chi_\alpha) \subset U_\alpha)$.

(1.7.9) Per a una varietat diferenciable, les condicions següents són equivalents:

- és metrizable
- cada component connex té base numerable d'oberts

- és paracompacta
- té particions diferenciables de la unitat subordinades a qualsevol recobriment obert
- té una mètrica riemanniana

(1.7.10) *Lema d'Urysohn llis*

Sigui M una varietat diferenciable paracompacta. Siguin $A, B \subset M$ conjunts tancats disjunts. Existeix una funció diferenciable $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f|_A = 1$, $f|_B = 0$.

2 Vectors tangents i cotangents

2.1 Vectors tangents i espai tangent

(2.1.1) Recordem que un **camí** és una aplicació contínua $\gamma: I \rightarrow M$ definida en un interval $I \subset \mathbf{R}$ no-degenerat. Llevat que diguem el contrari, només considerarem camins definits en intervals oberts.

(2.1.2) Sigui M una varietat diferenciable de dimensió m , $p \in M$. Considerem el conjunt

$$\mathcal{C}_{M,p} = \{\gamma: I \rightarrow M \mid \gamma \text{ camí diferenciable tal que } \gamma(0) = p\}.$$

Dos camins $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}_{M,p}$ són **tangents** (en 0) quan existeix una carta (U, φ) de M en p tal que les respectives expressions locals són tangents; per tant, quan

$$D\hat{\gamma}_1(0) = D\hat{\gamma}_2(0).$$

Aquesta propietat no depèn de la carta triada.

(2.1.3) La tangència és la relació d'equivalència en $\mathcal{C}_{M,p}$ induïda per l'aplicació

$$\mathcal{C}_{M,p} \rightarrow \mathbf{R}^m, \quad \gamma \mapsto D(\varphi \circ \gamma)(0),$$

essent φ una carta qualsevol en p .

(2.1.4) Una classe d'equivalència per la relació de tangència s'anomena **vector tangent** a M en p . Si $\gamma \in \mathcal{C}_{M,p}$, denotem per $[\gamma]_p$ la seva classe de tangència.

Denotem per $T_p M$ el conjunt quocient de $\mathcal{C}_{M,p}$ per la relació de tangència, és a dir, el conjunt dels vectors tangents a M en p .

(2.1.5) Sigui (U, φ) una carta de M en p . L'aplicació

$$\theta_{\varphi,p}: T_p M \rightarrow \mathbf{R}^m, \quad [\gamma]_p \mapsto D(\varphi \circ \gamma)(0),$$

és bijectiva.

La seva inversa és $\mathbf{v} \mapsto [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + t\mathbf{v})]_p$.

(2.1.6) Siguin E un conjunt, $E \xrightarrow{\theta_1} V_1$ i $E \xrightarrow{\theta_2} V_2$ dues bijeccions de E amb dos espais vectorials. Siguin E_1, E_2 les respectives estructures d'espai vectorial sobre el conjunt E transportades mitjançant les bijeccions θ_1 i θ_2 . Aquestes estructures són la mateixa si $\tau = \theta_2 \circ \theta_1^{-1}$ és una aplicació lineal.

(2.1.7) La bijecció $\theta_{\varphi,p}$ permet transportar l'estructura d'espai vectorial de \mathbf{R}^m a T_pM : donats $u, v \in T_pM$, $c \in \mathbf{R}$, es defineix

$$u + v = \theta_{\varphi,p}^{-1}(\theta_{\varphi,p}(u) + \theta_{\varphi,p}(v)), \quad cu = \theta_{\varphi,p}^{-1}(c\theta_{\varphi,p}(u)).$$

L'estructura transportada no depèn de la carta utilitzada.

(2.1.8) L'*espai tangent* a M en p és el conjunt T_pM dels vectors tangents a M en p dotat d'aquesta estructura d'espai vectorial real de dimensió m .

(2.1.9) Les nocions de vector tangent i d'espai tangent es poden definir igualment en una varietat de classe C^1 , considerant classes de tangència de camins de classe C^1 .

2.2 L'aplicació tangent

(2.2.1) Siguin M, N varietats, $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable.

L'*aplicació tangent* de $F: M \rightarrow N$ en p és

$$T_pF: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N, \quad T_pF \cdot [\gamma]_p = [F \circ \gamma]_{F(p)}.$$

En altres termes, T_pF és l'aplicació obtinguda passant als quocients l'aplicació $\mathcal{C}_{M,p} \rightarrow \mathcal{C}_{N,F(p)}$, $\gamma \mapsto F \circ \gamma$.

(2.2.2) L'aplicació tangent T_pF és lineal. De fet,

$$T_pF = \theta_{\psi,F(p)}^{-1} \circ D\widehat{F}(\widehat{p}) \circ \theta_{\varphi,p}.$$

(2.2.3) L'aplicació tangent satisfà les propietats següents:

- $T_p(\text{Id}_M) = \text{Id}_{T_pM}$.
- Siguin $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} P$ aplicacions diferenciables, $p \in M$. Llavors $T_p(G \circ F) = T_{F(p)}G \circ T_pF$.
- Si $F: M \rightarrow N$ és un difeomorfisme, $T_pF: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ és un isomorfisme d'espais vectorials, amb invers $T_{F(p)}F^{-1}$.

(2.2.4) Les dues primeres propietats anteriors signifiquen que les assignacions

- $(M, p) \rightsquigarrow T_pM$,
- $F: (M, p) \rightarrow (N, q) \rightsquigarrow T_pF: T_pM \rightarrow T_qN$,

defineixen un functor covariant de la categoria **Man** de les *varietats diferenciables puntejades* en la categoria **VecR** dels \mathbf{R} -espais vectorials.

(2.2.5) Sigui $U \subset M$ una subvarietat oberta, $p \in U$. La inclusió $U \xrightarrow{i} M$ defineix una inclusió $\mathcal{C}_{U,p} \hookrightarrow \mathcal{C}_{M,p}$ entre els respectius conjunts de camins per p , que dona lloc a una identificació $T_p i: T_p U \xrightarrow{\cong} T_p M$.

(2.2.6) Si $F: M \rightarrow N$ és un difeomorfisme local, llavors per a tot $p \in M$ l'aplicació $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ és un isomorfisme d'espais vectorials.

(2.2.7) Si F és una aplicació de classe C^1 entre varietats de classe C^1 , la seva aplicació tangent en un punt es pot definir exactament igual que en el cas llis.

2.3 Expressions coordenades

(2.3.1) Sigui M una varietat, $p \in M$, $\varphi: U \rightarrow \widehat{U}$ una carta de M al voltant de p , $\widehat{p} = \varphi(p)$ les coordenades de p en la carta. Considerem l'isomorfisme $\theta_{\varphi,p}: T_p M \rightarrow \mathbf{R}^m$ definit per la carta.

Designem per e_i els vectors de la base canònica de \mathbf{R}^m . L'isomorfisme $\theta_{\varphi,p}$ els transforma en uns vectors tangents

$$E_i^\varphi|_p = \theta_{\varphi,p}^{-1}(e_i) \in T_p M$$

que constitueixen una base de l'espai tangent $T_p M$. Per definició, $E_i^\varphi|_p$ és la classe de tangència $[t \mapsto \varphi^{-1}(\widehat{p}^1, \dots, \widehat{p}^i + t, \dots, \widehat{p}^m)]$.

S'anomenen **vectors tangents coordenats** associats a la carta.

(2.3.2) Sigui $u \in T_p M$. En la base dels vectors tangents coordenats s'expressa $u = u^i E_i^\varphi|_p$, o sigui, $\theta_{\varphi,p}(u) = (u^i) \in \mathbf{R}^m$. Els nombres u^i són els **components** del vector en el sistema de coordenades.

(2.3.3) Sigui $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable, $p \in M$. Sigui (U, φ) una carta de M en p i (V, ψ) una carta de N tals que $F(U) \subset V$. Llavors la matriu de $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ en les respectives bases dels vectors tangents coordenats coincideix amb la matriu jacobiana de l'expressió local \widehat{F} en el punt $\widehat{p} = \varphi(p)$, $J\widehat{F}(\widehat{p}) = (D_i \widehat{F}^j(\widehat{p}))$:

$$T_p F \cdot E_i^\varphi|_p = D_i \widehat{F}^j(\widehat{p}) E_j^\psi|_{F(p)}.$$

(2.3.4) Sigui M una varietat, $p \in M$, (U, φ) i $(U, \bar{\varphi})$ dues cartes de M al voltant de p , que podem suposar amb mateix domini. Considerem les respectives bases de vectors tangents coordenats de $T_p M$. La matriu del canvi de base que expressa la primera en termes de la segona és la matriu jacobiana del canvi de coordenades $\Phi = \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(p)$:

$$E_i^\varphi|_p = D_i \Phi^j(\varphi(p)) E_j^{\bar{\varphi}}|_p.$$

2.4 Derivació definida per un vector tangent

(2.4.1) Sigui M una varietat, $p \in M$, $u \in T_p M$.

Sigui $f: V \rightarrow \mathbf{R}$ una funció diferenciable definida en un veïnat obert de p .

La **derivada** (o *derivada direccional*) de f segons el vector tangent u és

$$\mathcal{L}_u f = D(f \circ \gamma)(0),$$

essent γ un camí de la classe de tangència u . Aquest nombre no depèn del representant triat, ja que, prenent una carta qualsevol de M en p ,

$$\mathcal{L}_u f = D\hat{f}(\hat{p}) \cdot \boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}(u).$$

A més, només depèn del valor de f en un veïnat de p .

(2.4.2) En una base de vectors tangents coordenats s'expressa $u = u^i E_i^\varphi|_p$. Aleshores $\mathcal{L}_u f = D_{(\hat{p}, \mathbf{u})} \hat{f} = D_i \hat{f}(\hat{p}) u^i$.

Prenent com a vector un dels de la base tenim $\mathcal{L}_{E_i^\varphi|_p} f = D_i \hat{f}(\hat{p})$, i en particular la derivada de les funcions coordenades respecte als vectors tangents coordenats és $\mathcal{L}_{E_i^\varphi|_p} \varphi^j = \delta_i^j$.

(2.4.3) Sigui $u \in T_p M$. L'operador \mathcal{L}_u satisfà les propietats següents:

- $\mathcal{L}_u(f + g) = \mathcal{L}_u f + \mathcal{L}_u g$,
- $\mathcal{L}_u(\lambda f) = \lambda \mathcal{L}_u f$,
- $\mathcal{L}_u(fg) = \mathcal{L}_u f \cdot g(p) + f(p) \cdot \mathcal{L}_u g$.

(2.4.4) Sigui $F: M \rightarrow N$ diferenciable. Si $g: N \rightarrow \mathbf{R}$ és una funció diferenciable i $u \in T_p M$, llavors

$$\mathcal{L}_{T_p F \cdot u} g = \mathcal{L}_u F^*(g).$$

(2.4.5) *L'espai tangent d'un espai vectorial*

Sigui V un espai vectorial real de dimensió finita, $p \in V$ un punt. Existeix un *isomorfisme canònic* entre V i el seu espai tangent en p , a saber:

$$\lambda_p: V \rightarrow T_p V, \quad \mathbf{v} \mapsto [t \mapsto p + t\mathbf{v}].$$

La seva aplicació inversa és $[\gamma] \mapsto D\gamma(0)$.

Si $\varphi: V \rightarrow \mathbf{R}^n$ és un isomorfisme lineal, llavors $\lambda_p = \boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}^{-1} \circ \varphi$.

(2.4.6) Amb les mateixes hipòtesis, si $\mathbf{v} \in V$ i f és una funció de classe C^∞ definida en un veïnat de p ,

$$\mathcal{L}_{\lambda_p(\mathbf{v})} f = D_{(p, \mathbf{v})} f.$$

(2.4.7) Siguin V, W espais vectorials reals de dimensió finita, $F: V \rightarrow W$ una aplicació de classe C^∞ , $p \in V$. L'aplicació tangent $T_p F: T_p V \rightarrow T_{F(p)} W$, traslladada a V i W pels isomorfismes anteriors, coincideix amb la derivada $DF(p): V \rightarrow W$.

(2.4.8) Apliquem les consideracions anteriors a $V = \mathbf{R}$. Donat $t_o \in \mathbf{R}$ hi ha l'isomorfisme canònic $\lambda_{t_o}: \mathbf{R} \rightarrow T_{t_o} \mathbf{R}$, tal que $h \mapsto [t \mapsto t_o + th]$. La imatge de $1 \in \mathbf{R}$ per aquest isomorfisme és el **vector tangent unitat**

$$E|_{t_o} = \lambda_{t_o}(1) = [t \mapsto t_o + t] \in T_{t_o} \mathbf{R}.$$

(2.4.9) Si $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ és de classe C^∞ , aleshores $\mathcal{L}_{E|_{t_o}} f = Df(t_o)$.

(2.4.10) Sigui $\gamma: J \rightarrow M$ un camí diferenciable, $t_o \in J$, $p_o = \gamma(t_o)$. Considerem el camí traslladat $\tilde{\gamma}: J - t_o \rightarrow M$, definit per $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t_o + t)$; passa per p_o quan $t = 0$. La **velocitat** o **vector tangent** de γ en t_o és la classe de tangència $[\tilde{\gamma}]_{p_o}$. La denotem per $\gamma'(t_o)$ (també s'utilitza $\dot{\gamma}(t_o)$).

(2.4.11) Sigui $\gamma: J \rightarrow M$ un camí diferenciable. Llavors

$$\gamma'(t_o) = T_{t_o} \gamma \cdot E|_{t_o} \in T_{\gamma(t_o)} M.$$

(2.4.12) Considerem també una funció diferenciable f en M . Llavors

$$\mathcal{L}_{\gamma'(t_o)} f = D(f \circ \gamma)(t_o).$$

(2.4.13) Siguin $J \xrightarrow{\gamma} M \xrightarrow{F} N$ diferenciables, $t_o \in J$.

$$(F \circ \gamma)'(t_o) = T_{\gamma(t_o)} F \cdot \gamma'(t_o).$$

Siguin $I \xrightarrow{h} J \xrightarrow{\gamma} M$ diferenciables, $s_o \in I$.

$$(\gamma \circ h)'(s_o) = \gamma'(h(s_o)) Dh(s_o).$$

(2.4.14) Sigui (U, φ) una carta de M amb $\gamma(J) \subset U$, $\hat{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ l'expressió local de γ . Llavors

$$\gamma'(t_o) = D\hat{\gamma}^i(t_o) E_i^\varphi|_{\gamma(t_o)}$$

(2.4.15) En una varietat de classe C^1 es defineix exactament igual la derivada d'una funció de classe C^1 respecte a un vector tangent.

2.5 Derivacions puntuals

(2.5.1) Sigui M una varietat diferenciable, $p \in M$, i considerem l'àlgebra de les funcions diferenciables $\mathcal{C}^\infty(M)$. Anomenarem **derivació puntual** de $\mathcal{C}^\infty(M)$

en p una aplicació \mathbf{R} -lineal $\delta: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbf{R}$ tal que

$$\delta(fg) = \delta(f)g(p) + f(p)\delta(g).$$

És a dir, és una derivació (en el sentit algebraic del terme) respecte a l'aplicació $\text{av}_p: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbf{R}$ d'avaluació en p , $f \mapsto f(p)$.

(2.5.2) Les derivacions puntuals en p constitueixen un \mathbf{R} -espai vectorial. Denotem-lo per $\mathcal{D}_p(M)$.

(2.5.3) Sigui M una varietat, $p \in M$, $\delta \in \mathcal{D}_p(M)$.

- Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ és constant, $\delta(f) = 0$.
- Si $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ és nul·la en un veïnat de p , llavors $\delta(h) = 0$.
- Si $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ coincideixen en un veïnat de p , $\delta(f) = \delta(g)$.

La darrera propietat es pot expressar dient que δ és un operador local.

(2.5.4) Sigui M una varietat, $U \subset M$ una subvarietat oberta, $p \in U$. Hi ha una bijecció natural $\mathcal{D}_p(U) \rightarrow \mathcal{D}_p(M)$ definida de la manera següent.

Sigui $\delta_\circ \in \mathcal{D}_p(U)$. Es defineix $\delta \in \mathcal{D}_p(M)$: si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\delta(f) = \delta_\circ(f|_U)$.

Sigui $\delta \in \mathcal{D}_p(M)$. Es defineix $\delta_\circ \in \mathcal{D}_p(U)$: si $f_\circ \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $\delta_\circ(f_\circ) = \delta(f)$, essent f qualsevol funció $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ que coincideixi amb f_\circ en un veïnat de p .

(2.5.5) *Equivalència entre classes de tangència de camins i derivacions puntuals*

L'aplicació $T_pM \rightarrow \mathcal{D}_p(M)$ que envia $u \mapsto \mathcal{L}_u$ és un isomorfisme d'espais vectorials.

(2.5.6) En vista d'això, es poden adoptar definicions alternatives:

- Vectors tangents a M en p : derivacions puntuals δ de $\mathcal{C}^\infty(M)$ en p .
- Espai tangent a M en p : l'espai vectorial T_pM format per les derivacions puntuals en p .
- Aplicació tangent d'una aplicació diferenciable $F: M \rightarrow N$ en p : $T_pF: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ definida per $(T_pF \cdot \delta) \cdot g = \delta \cdot F^*(g)$.
- Isomorfisme canònic $\lambda_p: V \rightarrow T_pV$, on V espai vectorial: $\lambda_p(\mathbf{v}) = D_{(p, \mathbf{v})}$.
- Base dels vectors tangents coordenats associada a una carta $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ de M en p (tal que $\varphi(p) = \hat{p}$): $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = (T_p\varphi)^{-1}(D_{(\hat{p}, \mathbf{e}_i)})$;
és a dir,

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p f = D_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \equiv D_i \hat{f}(\hat{p}).$$

Observi's en particular que quan $M = \mathbf{R}^m$ l'operador $\partial/\partial x^i|_p$ coincideix amb la derivada parcial $D_i|_p$, la qual cosa justifica la notació usada.

Més particularment, el vector tangent unitat de \mathbf{R} en t_0 , $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0}$, és la derivada ordinària de funcions d'una variable.

- Velocitat o vector tangent d'un camí diferenciable $\gamma: I \rightarrow M$ a l' instant t_0 : $\gamma'(t_0) = T_{t_0} \gamma \cdot \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0}$; actuant sobre una funció $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ es pot escriure $\gamma'(t_0) \cdot f = D(f \circ \gamma)(t_0)$.

(2.5.7) Observem que en aquestes definicions cal que totes les aplicacions considerades siguin de classe C^∞ . La consideració de graus de diferenciabilitat finits comporta complicacions addicionals.

(2.5.8) Considerem una carta φ de M en p , on representem les funcions coordenades com $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$. Atesa la identificació dels vectors tangents com a derivacions puntuals, a partir d'ara escriurem els vectors tangents coordenats amb la notació

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \equiv E_i^\varphi|_p,$$

ambigua i equívoca, però habitual i pràctica.

Així, la derivada d'una funció f segons un vector $u = u^i \partial/\partial x^i|_p$, l'escriurem simplement com

$$\mathcal{L}_u f \equiv u \cdot f \equiv u^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p f \equiv u^i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p = u^i D_i \widehat{f}(\widehat{p}).$$

Notem, en particular, $\left. \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right|_p = \delta_i^j$.

L'aplicació tangent de $F: M \rightarrow N$ en p , escrivint les respectives bases de vectors tangents coordenats com $\partial/\partial x^i|_p$ i $\partial/\partial y^j|_{F(p)}$, s'expressa

$$T_p F \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = D_i \widehat{F}^j(\widehat{p}) \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_{F(p)} = \left. \frac{\partial (y^j \circ F)}{\partial x^i} \right|_p \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_{F(p)},$$

que de fet és la regla de la cadena quan s'aplica a una funció:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (g \circ F) = \left. \frac{\partial g}{\partial y^j} \right|_{F(p)} \left. \frac{\partial (y^j \circ F)}{\partial x^i} \right|_p.$$

Si considerem dos sistemes de coordenades φ i $\bar{\varphi}$ en M , i denotem les respectives bases de vectors tangents coordenats de $T_p M$ per $(\partial/\partial x^i|_p)$ i

$(\partial/\partial\bar{x}^j|_p)$, llavors el canvi de base s'expressa

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^i}\Big|_p \frac{\partial}{\partial\bar{x}^j}\Big|_p.$$

Amb la mateixa notació, considerem un vector expressat en les dues bases, $u = u^i \partial/\partial x^i|_p = \bar{u}^j \partial/\partial\bar{x}^j|_p$. La relació entre els components en ambdues bases és

$$\bar{u}^j = \frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^i}\Big|_p u^i.$$

Finalment, la velocitat d'un camí es calcula $\gamma'(t_0) = D\widehat{\gamma}^i(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t_0)}$.

2.6 Espai cotangent i diferencial d'una funció en un punt

(2.6.1) Sigui M una varietat, $p \in M$. L'**espai cotangent** a M en p és el dual de l'espai tangent T_pM , i es denota per $T_p^*M := \mathcal{L}in(T_pM, \mathbf{R})$.

Els seus elements s'anomenen **vectors cotangents** (o **covectors tangents**).

Si $\alpha_p \in T_p^*M$ i $u_p \in T_pM$, usarem les notacions $\alpha_p \cdot u_p \equiv \langle \alpha_p, u_p \rangle \equiv \alpha_p(u_p)$.

(2.6.2) Sigui $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ una funció diferenciable. A partir de l'isomorfisme canònic $\lambda_z: \mathbf{R} \rightarrow T_z\mathbf{R}$ es defineix un vector cotangent $d_p f \equiv df|_p \in T_p^*M$ anomenat **diferencial** de f en p :

$$d_p f := \lambda_{f(p)}^{-1} \circ T_p f : T_p M \rightarrow \mathbf{R}.$$

(2.6.3) Si $\gamma: I \rightarrow M$ és un camí diferenciable, $\langle d_{\gamma(t)} f, \gamma'(t) \rangle = D(f \circ \gamma)(t)$.

(2.6.4) Si $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ és diferenciable i $u_p \in T_pM$,

$$\langle d_p f, u_p \rangle = \mathcal{L}_{u_p} f.$$

Aquesta propietat es pot usar com a definició alternativa de $d_p f$.

(2.6.5) Siguin $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{g} \mathbf{R}$ diferenciables, $p \in M$.

$$d_p(g \circ F) = {}^t T_p F \cdot d_{F(p)} g.$$

Siguin $M \xrightarrow{f} \mathbf{R} \xrightarrow{h} \mathbf{R}$ de classe C^∞ , $p \in M$.

$$d_p(h \circ f) = Dh(f(p)) d_p f.$$

(2.6.6) Sigui (U, φ) una carta de M en p . Denotem les funcions coordenades per $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$. Els covectors $d_p x^j$ constitueixen una base de T_p^*M , i és

la base dual dels vectors $\partial/\partial x^i|_p$:

$$\left\langle d_p x^j, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\rangle = \delta^j_i.$$

$(d_p x^j)$ és la base de vectors cotangents *associada* a la carta.

(2.6.7) Respecte a aquesta base tenim

$$d_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p d_p x^i.$$

(2.6.8) Considerem una altra carta (U, ψ) en p , amb funcions coordenades $\psi = (y^1, \dots, y^m)$. Llavors

$$d_p y^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_p d_p x^i.$$

(2.6.9) La construcció de la diferencial val, més generalment, per a funcions amb valors vectorials (en \mathbf{R}^n , o en un espai vectorial real de dimensió finita E). Si $f: M \rightarrow E$, llavors $d_p f = \lambda_{f(p)}^{-1} \circ T_p f: T_p M \rightarrow E$.

(2.6.10) En particular, considerem una carta $\varphi: U \rightarrow \widehat{U} \subset \mathbf{R}^m$ de M . Llavors

$$d_p \varphi: T_p M \rightarrow \mathbf{R}^m$$

és un isomorfisme que aplica $\partial/\partial x^i|_p$ en \mathbf{e}_i , per tant

$$d_p \varphi = \boldsymbol{\theta}_{\varphi, p}.$$

A més, $d_p \varphi = (d_p x^1, \dots, d_p x^m)$.

Per transposició també tenim un isomorfisme

$${}^t(d_p \varphi)^{-1}: T_p^* M \rightarrow (\mathbf{R}^m)^*$$

que aplica $d_p x^i$ en \mathbf{e}^i , essent (\mathbf{e}^i) la base dual de la base canònica (\mathbf{e}_i) de \mathbf{R}^m .

Resum de les diferents construccions alternatives de l'espai tangent

- *Geomètrica*
 $T_p M = \mathcal{C}_{M,p} / \sim$
 $\mathcal{C}_{M,p}$ conjunt dels camins C^∞ en M per p
 $\gamma \sim \delta$ relació de tangència
- *Diferencial*
 $T_p M = \mathcal{D}_{M,p}$
 $\mathcal{D}_{M,p}$ conjunt de les derivacions puntuals de $\mathcal{C}^\infty(M)$ en p
- *Coordenada*
 $T_p M = \mathcal{V}_{M,p} / \sim$
 $\mathcal{V}_{M,p}$ conjunt dels (φ, \mathbf{u}) on φ és una carta centrada en p i $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$
 $(\varphi, \mathbf{u}) \sim (\psi, \mathbf{v})$ quan $D(\psi \circ \varphi^{-1})(0) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}$
- *Algebraica*
 $T_p M = (\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2)^*$
 \mathfrak{m}_p ideal de les funcions $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tals que $f(p) = 0$

En les definicions segona i quarta es poden substituir les funcions definides globalment ($\mathcal{C}^\infty(M)$) per funcions definides en un veïnat de p , identificant dues funcions que coincideixin en un veïnat (possiblement més petit) del punt —això és, gèrmens de funcions en p ($\mathcal{F}_p(M)$):

- $T_p M = \mathcal{D}_{M,p}$
 $\mathcal{D}_{M,p}$ conjunt de les derivacions de l'àlgebra $\mathcal{F}_p(M)$
- $T_p M = (\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2)^*$
 $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{F}_p(M)$ ideal dels gèrmens de funcions que s'anul·len en p

Aquestes definicions *no* són totes equivalents quan es consideren varietats de classe C^r amb $r \neq \infty$.

3 Subvarietats i aplicacions

3.1 Subvarietats regulars

- (3.1.1) Sigui M una varietat diferenciable de dimensió m . Un subconjunt $N \subset M$ es diu **subvarietat regular** (o simplement *subvarietat*) de dimensió n (essent $n \leq m$) si compleix la propietat següent: per a tot $p \in N$ existeix una carta (U, φ) de M en p tal que, identificant $\mathbf{R}^n \times \{0\} \subset \mathbf{R}^m$,

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbf{R}^n \times \{0\}).$$

Es diu que (U, φ) és una **carta adaptada** a la subvarietat.

El nombre $m - n$ s'anomena **codimensió** de N dins M .

- (3.1.2) Si $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbf{R}^n \times \{c\})$, on $c \in \mathbf{R}^{m-n}$, és clar que amb una translació es pot convertir φ en una carta adaptada. A vegades és convenient anomenar també *carta adaptada* una carta que satisfaci aquesta propietat lleugerament més general.

- (3.1.3) Sigui $N \subset M$ una subvarietat regular. Les restriccions $(U \cap N, \varphi|_{U \cap N})$ de les cartes adaptades constitueixen un atlas de N , amb el qual és una varietat diferenciable.

Si M té base numerable d'oberts, o és paracompacta, N també.

- (3.1.4) Els subespais discrets de M són les subvarietats de dimensió 0. Els subespais oberts de M són les subvarietats de dimensió m . Una subvarietat $N \subset M$ de codimensió 1 es diu **hipersuperfície**.

- (3.1.5) Siguin M una varietat, $N \subset M$ un subconjunt.

Si N és una subvarietat regular i $V \subset M$ és un conjunt obert, llavors $V \cap N \subset V$ és una subvarietat regular.

Recíprocament, suposem que per a tot conjunt V d'un recobriment obert de M es té que $V \cap N \subset V$ és una subvarietat regular. Llavors $N \subset M$ és una subvarietat regular.

És a dir, «ser una subvarietat» és una propietat local.

- (3.1.6) Si $F: M \rightarrow M'$ és un difeomorfisme i $N \subset M$ és una subvarietat regular llavors $F(N) \subset M'$ és una subvarietat regular.

- (3.1.7) Si $P \subset N$ i $N \subset M$ són subvarietats regulars, llavors $P \subset M$ és una subvarietat regular.

(3.1.8) La noció de subvarietat regular es defineix exactament igual en una varietat de classe C^r , amb $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty, \omega\}$.

3.2 Restricció i extensió d'aplicacions

(3.2.1) Sigui $M_o \subset M$ una subvarietat regular. La inclusió $j: M_o \hookrightarrow M$ és diferenciable.

(3.2.2) Sigui $M_o \subset M$ una subvarietat regular. Si $F: M \rightarrow N$ és diferenciable llavors la restricció $F|_{M_o}: M_o \rightarrow N$ també ho és.

(3.2.3) Siguin $N_o \subset N$ una subvarietat regular, $F: M \rightarrow N$ una aplicació tal que $F(M) \subset N_o$. Si F és diferenciable llavors l'aplicació induïda $F_o: M \rightarrow N_o$ també ho és.

(3.2.4) Sigui $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable. Siguin $M_o \subset M$, $N_o \subset N$ subvarietats regulars tals que $F(M_o) \subset N_o$. Llavors l'aplicació induïda $F_o: M_o \rightarrow N_o$ és diferenciable.

(3.2.5) Sigui $N \subset M$ una subvarietat regular. Sigui $G: N \rightarrow P$ una aplicació diferenciable. Per a tot $p \in N$ existeix un conjunt obert $U \subset M$ contenint p i una aplicació diferenciable $F: U \rightarrow P$ tals que $F|_{U \cap N} = G|_{U \cap N}$.

(3.2.6) *Teorema d'extensió de funcions*

Sigui M una varietat diferenciable paracompacta, i $N \subset M$ una subvarietat regular *tancada*. Tota funció diferenciable $g: N \rightarrow \mathbf{R}$ té una extensió diferenciable $f: M \rightarrow \mathbf{R}$.

Dit altrament, si M és paracompacta i $i: N \hookrightarrow M$ és una subvarietat tancada, llavors el morfisme de restricció $i^*: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(N)$, $f \mapsto f|_N$, és suprajectiu.

3.3 Rang d'una aplicació i teorema de la funció inversa

(3.3.1) Sigui $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable. Si $p \in M$, el **rang** de F en p és el rang de l'aplicació tangent $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$. Per tant, és la dimensió de $\text{Im } T_p F$, i coincideix amb el rang de la matriu jacobiana $J\widehat{F}(\widehat{p})$ d'una expressió local de F en unes cartes qualssevol.

Es diu que F té **rang constant** si aquest rang és el mateix en tot punt.

(3.3.2) F es diu **submersió** en p si $T_p F$ és suprajectiva.

F es diu **immersió** en p si $T_p F$ és injectiva.

F es diu submersió o immersió si ho és en tot punt.

(3.3.3) Sigui $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable. F és localment constant sii $T_p F = 0$ en tot $p \in M$ (és a dir, sii F té rang 0).

Per a una funció $F: M \rightarrow \mathbf{R}$, F és localment constant sii $d_p F = 0$ en tot p .

(3.3.4) *Teorema de la funció inversa*

Sigui $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable. Donat $p \in M$, les dues afirmacions següents són equivalents:

- i) $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ és un isomorfisme d'espais vectorials.
- ii) Existeix un veïnat obert $U_o \ni p$ tal que $F(U_o) \subset N$ és obert i l'aplicació restringida $F|_{U_o}: U_o \rightarrow F(U_o)$ és un difeomorfisme.

(3.3.5) Una aplicació $f: M \rightarrow N$ es diu **difeomorfisme local en $p \in M$** quan existeix un conjunt obert $U \ni p$ tal que $f(U) \subset N$ és obert i la «birestricció» $f|_U: U \rightarrow f(U)$ és un difeomorfisme.

Un **difeomorfisme local⁵** és una aplicació que és un difeomorfisme local en tot punt.

(3.3.6) Sigui $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable. Les afirmacions següents són equivalents:

- i) Per a tot $p \in M$, $T_p F$ és un isomorfisme lineal.
- ii) F és un difeomorfisme local.

Per tant F és un difeomorfisme local sii és alhora una immersió i una submersió.

(3.3.7) Siguin $F: M \rightarrow \mathbf{R}^m$ una aplicació diferenciable, $p \in M$. Si $d_p F$ és un isomorfisme, existeix un conjunt obert $U \ni p$ tal que $F|_U: U \rightarrow F(U)$ és una carta de M .

(3.3.8) Si $F: M \rightarrow N$ és un difeomorfisme local injectiu llavors l'aplicació induïda $F_o: M \rightarrow F(M)$ és un difeomorfisme.

(3.3.9) Les definicions i teoremes d'aquesta secció, així com els de les seccions següents, es poden aplicar a varietats i aplicacions de classe C^r , amb $r \geq 1$.

3.4 Estudi local de les immersions

(3.4.1) *L'espai tangent d'una subvarietat*

Sigui $N' \subset N$ una subvarietat regular, amb inclusió $j: N' \hookrightarrow N$. Si $q \in N'$,

⁵A vegades s'usa informalment el terme *difeomorfisme local* per a referir-se a un difeomorfisme definit en un subconjunt obert; compte a no caure en una confusió, ja que un difeomorfisme local *no* és un tipus especial de difeomorfisme.

l'aplicació tangent $T_q j$ és injectiva i permet identificar $T_q N' \subset T_q N$ com un subespai vectorial.

Un vector $v_q \in T_q N$ es diu **tangent** a N' quan $v_q \in T_q N'$.

(3.4.2) Si una aplicació diferenciable $F: M \rightarrow N$ pren valors dins la subvarietat N' , llavors l'aplicació tangent $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ pren valors dins el subespai $T_{F(p)} N'$.

(3.4.3) **Forma canònica de les immersions**

Siguin $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable, $p \in M$. Suposem que F és una immersió en p , i sigui (U, φ) una carta de M en p . Llavors existeix una carta (V, ψ) de N en $F(p)$ tal que l'expressió local de F en aquestes cartes, restringint si cal el domini de la primera, és

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0).$$

(3.4.4) Sigui $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable. Si F és una immersió en $p \in M$, llavors existeix un conjunt obert $U \ni p$ tal que $F(U) \subset N$ és una subvarietat regular de dimensió m , i l'aplicació induïda $F_\circ: U \rightarrow F(U)$ és un difeomorfisme. A més,

$$T_{F(p)} F(U) = \text{Im } T_p F.$$

(3.4.5) Encara que $F: M \rightarrow N$ sigui una immersió injectiva, en general no és cert que globalment $F(M) \subset N$ sigui una subvarietat regular.

3.5 Estudi local de les submersions

(3.5.1) **Forma canònica de les submersions**

Siguin $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable, $p \in M$. Suposem que F és una submersió en p , i sigui (V, ψ) una carta de N en $F(p)$. Llavors existeix una carta (U, φ) de M en p tal que l'expressió local de F en aquestes cartes és

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n).$$

(3.5.2) L'expressió anterior significa que $\varphi^j = F^*(\psi^j)$ per a $1 \leq j \leq n$. Es diu que les φ^i són **coordenades adaptades** a F (i a ψ).

(3.5.3) Les submersions són aplicacions obertes.

(3.5.4) Sigui $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable.

Un punt $p \in M$ es diu **punt regular** de F si $T_p F$ és suprajectiva (és a dir, si F és una submersió en p); en cas contrari es diu **punt crític**.

Un punt $q \in N$ es diu **valor crític** de F si és la imatge d'un punt crític; en cas contrari es diu **valor regular** (és a dir, si $F^{-1}(q)$ no conté punts crítics).

Per a una funció $F: M \rightarrow \mathbf{R}$, p és un punt crític sii $d_p F = 0$.

(3.5.5) **Teorema del valor regular**

Sigui $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable, $q \in N$ un valor regular. Si no és buida, la fibra $F^{-1}(q) \subset M$ és una subvarietat regular de dimensió $m - n$. A més, si $p \in F^{-1}(q)$,

$$T_p(F^{-1}(q)) = \text{Ker } T_p F.$$

(3.5.6) Les fibres $F^{-1}(q)$ d'una submersió $F: M \rightarrow N$ són subvarietats regulars.

(3.5.7) Siguin M una varietat, $\mathbf{f}: M \rightarrow \mathbf{R}^n$ una funció diferenciable, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$. Se suposa que les diferencials $d_p f^j$ de les components són linealment independents en tot $p \in \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{c})$. Llavors el conjunt $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{c}) \subset M$ és una subvarietat regular, i el seu espai tangent en p és l'anullador d'aquelles diferencials,

$$T_p \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{c}) = \langle d_p f^1, \dots, d_p f^n \rangle^\perp.$$

Un vector $v \in T_p M$ és tangent a $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{c})$ en p sii $\mathcal{L}_v f^i = 0$.

En aquestes condicions, a vegades es diu que les funcions f^j són un *sistema de lligams* que defineix la subvarietat.

Tota subvarietat regular es pot definir així localment (per exemple a partir de les funcions coordenades d'una carta adaptada).

(3.5.8) Més generalment, l'antiimatge d'una subvarietat regular per una submersió és una subvarietat regular.

(3.5.9) **Subimmersions**

Una aplicació diferenciable $F: M \rightarrow N$ es diu **subimmersió** en un punt $p \in M$ quan F es pot escriure, en un veïnat obert de p , com la composició d'una submersió seguida d'una immersió.

Es diu que F és una **subimmersió** quan ho és en tot punt.

(3.5.10) **Forma canònica de les subimmersions**

$F: M \rightarrow N$ és una subimmersió en $p \in M$ sii existeixen cartes (U, φ) de M

en p i (V, ψ) de N en $F(p)$, i un nombre natural $r \leq \min\{m, n\}$, tals que l'expressió local de F en aquestes cartes és

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^r, x^{r+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$

(3.5.11) **Teorema del rang constant**

$F: M \rightarrow N$ és una subimmersió sii és una aplicació de rang localment constant.

(3.5.12) De l'anterior es dedueix que l'antiimatge d'un punt per una aplicació diferenciable de rang constant és una subvarietat.

En canvi, no és cert que l'antiimatge d'una subvarietat regular també sigui una subvarietat regular.

3.6 Subvarietats immerses i immersions difeomorfes

(3.6.1) Siguin M, N varietats, $F: M \rightarrow N$ una immersió injectiva, que per tant defineix una bijecció $F_\circ: M \rightarrow F(M)$. Aquesta permet transportar la topologia i l'estructura diferenciable de M a $F(M)$. Amb aquestes estructures, $F(M)$ es diu **subvarietat immersa**.

(3.6.2) La topologia de $F(M)$ transportada per F és més fina que la topologia habitual de $F(M)$ induïda com a subespai de N , però pot ser estrictament més fina.

Una immersió injectiva $F: M \rightarrow N$ es diu **immersió difeomorfa** o **embedding**⁶ si ambdues topologies coincideixen, és a dir, si $F_\circ: M \rightarrow F(M)$ és un homeomorfisme.

(3.6.3) Si $M \subset N$ és una subvarietat regular, la inclusió $j: M \hookrightarrow N$ és una immersió difeomorfa.

Si $F: M \rightarrow N$ és una immersió, localment és una immersió difeomorfa.

(3.6.4) Si $F: M \rightarrow N$ és una immersió difeomorfa, llavors $F(M) \subset N$ és una subvarietat regular, i l'aplicació induïda $F_\circ: M \rightarrow F(M)$ és un difeomorfisme.

(3.6.5) Si $F: M \rightarrow N$ és una immersió injectiva i M és compacta, llavors és una immersió difeomorfa.

⁶Cal una versió catalana d'aquest terme anglès. En francès s'usa molt apropiadament la paraula *plongement*, la qual cosa podria suggerir usar *capbussament*. En castellà es pot trobar *embebimiento*, *encaje*, *incrustación*, *inserción*, *zambullida*...

(3.6.6) Sigui $F: M \rightarrow N$ una immersió injectiva. Se suposa que hi ha una subvarietat regular $N' \subset N$ tal que $\dim M = \dim N'$ i $F(M) \subset N'$. Aleshores F és una immersió difeomorfa.

(3.6.7) Sigui $g: \widehat{U} \rightarrow N$ una immersió injectiva definida en un conjunt obert $\widehat{U} \subset \mathbf{R}^m$. Se suposa que hi ha una subvarietat regular $N' \subset N$ de dimensió m tal que $g(\widehat{U}) \subset N'$. Aleshores la bijecció $g: \widehat{U} \rightarrow g(\widehat{U})$ és l'aplicació inversa d'una carta de N' . (Es diu també que g és una *parametrització regular* de N' .)

(3.6.8) **Teorema d'embedding de Whitney**

Sigui M una varietat de dimensió n amb base numerable d'oberts. Existeix una immersió difeomorfa tancada $M \hookrightarrow \mathbf{R}^{2n+1}$.

3.7 Varietats quocient

Atenció! En aquest apartat *no* pressuposem que les varietats hagin de ser Hausdorff.

(3.7.1) Sigui M una varietat. Una relació d'equivalència R en M es diu **regular** si l'espai topològic quocient M/R té una estructura de varietat diferenciable per a la qual la projecció canònica $\pi: M \rightarrow M/R$ és una submersió.

(3.7.2) Si $f: M \rightarrow P$ és diferenciable i compatible amb R , aleshores existeix una única aplicació diferenciable $\hat{f}: M/R \rightarrow P$ tal que $f = \hat{f} \circ \pi$.

(3.7.3) L'estructura de varietat quocient, si existeix, és única.
Es diu que M/R és la **varietat quocient** de M per R .

(3.7.4) Siguin $f: M \rightarrow N$ diferenciable, i R i S relacions d'equivalència regulars en M i N , respectivament, i compatibles⁷ amb f . Aleshores f passa als quocients com una aplicació diferenciable $\hat{f}: M/R \rightarrow N/S$.

(3.7.5) Com que una relació d'equivalència regular és oberta⁸, tenim que:

- L'espai quocient M/R és Hausdorff sii el graf $\Gamma \subset M \times M$ de R és un subconjunt tancat;
- Si M té base numerable d'oberts, M/R també.

(3.7.6) Sigui $f: M \rightarrow N$ una submersió. La relació d'equivalència R_f induïda per f és regular, i M/R_f és difeomorfa a $f(M)$.

⁷O sigui, que $x R x'$ implica que $f(x) S f(x')$.

⁸És a dir, l'aplicació canònica $\pi: M \rightarrow M/R$ és oberta.

(3.7.7) **Teorema de Godement**

Una relació d'equivalència R en M és regular sii

- i) el seu graf $\Gamma \subset M \times M$ és una subvarietat regular, i
- ii) la projecció $p_1: \Gamma \rightarrow M$, $p_1(x, y) = x$, és una submersió.

4 Els fibrats tangent i cotangent

4.1 El fibrat tangent

(4.1.1) **Lema de construcció de varietats**

Sigui N un conjunt, $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recobriment de N , $\psi_\alpha: V_\alpha \rightarrow \mathbf{R}^n$ aplicacions injectives tals que:

- i) Per a tot $\alpha \in A$, $\psi_\alpha(V_\alpha) \subset \mathbf{R}^n$ és obert.
- ii) Per a tot $\alpha, \beta \in A$, $\psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \subset \mathbf{R}^n$ és obert.
- iii) Si $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}: \psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \psi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$ és un difeomorfisme de classe C^∞ .

Llavors N té una única estructura diferenciable per a la qual els parells (V_α, ψ_α) són cartes.

Suposem que

- iv) Si $p, q \in N$, $p \neq q$, llavors, o bé existeix un V_α tal que $p, q \in V_\alpha$, o bé existeixen conjunts disjunts V_α, V_β tals que $p \in V_\alpha$, $q \in V_\beta$.

Llavors N és Hausdorff.

Suposem també que

- v) Un subconjunt numerable dels V_α recobreix N .

Llavors N té base numerable d'oberts.

(4.1.2) Sigui M una varietat diferenciable. El **fibrat tangent** de M és la unió disjunta dels espais tangents

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M.$$

Denotem els seus elements per (p, u) , u_p , u , ...

La **projecció canònica** de TM és l'aplicació $\tau_M: TM \rightarrow M$ definida per $\tau_M(u_p) = p$. Les seves **fibres** són els espais tangents, $\tau_M^{-1}(p) = T_p M$.

(4.1.3) Sigui M una varietat diferenciable de dimensió m . El fibrat tangent TM té una única estructura diferenciable de dimensió $2m$ caracteritzada per la propietat següent: si (U, φ) és una carta de M , llavors l'aplicació $\Phi: \tau_M^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbf{R}^m$ definida per

$$\Phi(u_p) = (\varphi(p), d_p \varphi \cdot u_p)$$

és una carta de TM .

Aquesta aplicació també es pot expressar

$$\Phi \left(u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = (\varphi(p); u^1, \dots, u^m).$$

Amb aquesta estructura, TM és una varietat diferenciable. Si M té base numerable d'oberts, o és paracompacta, TM també.

- (4.1.4) Si (V, ψ) és una altra carta de M , i denotem per $\Psi: \tau_M^{-1}(V) \rightarrow \psi(V) \times \mathbf{R}^m$ la carta de TM definida anàlogament, llavors el canvi de coordenades és

$$(\Psi \circ \Phi^{-1})(x, \mathbf{u}) = \left((\psi \circ \varphi^{-1})(x), D(\psi \circ \varphi^{-1})(x) \cdot \mathbf{u} \right).$$

Expressant de manera més informal el canvi entre les dues cartes de M com $x \mapsto y(x)$, el canvi entre les cartes corresponents de TM s'expressa

$$(x^i, u^i) \mapsto \left(y^j(x), \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x) u^i \right).$$

- (4.1.5) Les cartes (i les coordenades) de TM construïdes d'aquesta manera a partir de les cartes de M , es diuen **naturals**.

Quan parlem del fibrat tangent sobreentendrem que està dotat de l'estructura diferenciable anterior.

- (4.1.6) La projecció canònica $\tau_M: TM \rightarrow M$ és diferenciable, i és una submersió suprajectiva.

- (4.1.7) Si $U \subset \mathbf{R}^m$ és un conjunt obert, tenim una identificació canònica $TU \cong U \times \mathbf{R}^m$.

- (4.1.8) Més generalment, si M és una varietat de classe C^r ($r \geq 1$), també es pot construir el fibrat tangent TM , i és una varietat de classe C^{r-1} .

4.2 L'aplicació tangent

- (4.2.1) Siguin M, N varietats, i $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable. L'aplicació tangent $T_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ en cada punt indueix globalment l'**aplicació tangent** de F ,

$$TF: TM \rightarrow TN, \quad u_p \mapsto T_p F \cdot u_p.$$

- (4.2.2) Si l'expressió local de F en unes cartes de M i N és \widehat{F} , l'expressió local de TF en les cartes naturals corresponents de TM i TN és

$$\widehat{TF}(x, \mathbf{u}) = (\widehat{F}(x), D\widehat{F}(x) \cdot \mathbf{u}).$$

- (4.2.3) Si $F: M \rightarrow N$ és diferenciable, aleshores TF és diferenciable.

(4.2.4) L'aplicació tangent satisfà les propietats següents:

- $T(\text{Id}_M) = \text{Id}_{TM}$.
- Si $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} P$ són aplicacions diferenciables, llavors

$$T(G \circ F) = TG \circ TF.$$
- Si $F: M \rightarrow N$ és un difeomorfisme, $TF: TM \rightarrow TN$ és un difeomorfisme, i

$$T(F^{-1}) = (TF)^{-1}.$$

(4.2.5) Sigui $V \subset M$ una subvarietat oberta, $i: V \rightarrow M$ la inclusió. Llavors Ti identifica TV amb la subvarietat oberta $\tau_M^{-1}(V) \subset TM$.

(4.2.6) Sigui (U, φ) una carta de M . Amb la identificació anterior, la carta natural $\Phi: \tau_M^{-1}(U) \rightarrow \widehat{U} \times \mathbf{R}^m$ s'identifica amb l'aplicació tangent $T\varphi: TU \rightarrow T\widehat{U}$.

(4.2.7) Si $F: M \rightarrow N$ és un difeomorfisme local, $TF: TM \rightarrow TN$ és un difeomorfisme local.

(4.2.8) Si $F: M \rightarrow N$ és una aplicació de classe C^r ($r \geq 1$) entre varietats de classe C^r , aleshores TF és una aplicació de classe C^{r-1} .

4.3 Camps vectorials

(4.3.1) Sigui M una varietat. Un ***camp vectorial*** (o camp de vectors tangents) en M és una secció del fibrat tangent $\tau_M: TM \rightarrow M$, és a dir, una aplicació $X: M \rightarrow TM$ tal que $\tau_M \circ X = \text{Id}_M$. Per tant, en cada $p \in M$ tenim un vector $X(p) \equiv X_p \in T_pM$.

(4.3.2) Sigui (U, φ) una carta de M . Es pot escriure

$$X(p) = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p,$$

on les funcions $X^i: U \rightarrow \mathbf{R}$ són les ***components*** de X en la carta.

L'expressió local de X respecte a la carta de M i a la carta natural corresponent de TM és $\widehat{X}(x) = (x^i; \widehat{X}^i(x))$.

(4.3.3) Un camp vectorial és diferenciable sii ho són les seves components en una carta.

(4.3.4) En particular, els ***camp vectorials coordenats*** definits per una carta (U, φ) són els camps vectorials $\partial/\partial x^i$ en U tals que apliquen $p \mapsto \partial/\partial x^i \Big|_p$. Són diferenciables.

(4.3.5) Si $V \subset M$ és una subvarietat oberta i X és un camp vectorial en M , podem considerar la restricció $X|_V$ com un camp vectorial en V .

(4.3.6) Les operacions de l'espai vectorial T_pM , fetes en cada $p \in M$, permeten definir la suma $X + Y$ de dos camps vectorials X, Y en M com el camp vectorial definit per $(X + Y)(p) = X(p) + Y(p)$, per a cada $p \in M$. Anàlogament, el producte fX d'una funció f per X és el camp vectorial definit per $(fX)(p) = f(p)X(p)$.

(4.3.7) Denotem per $\mathfrak{X}(M)$, o $\mathcal{T}^1(M)$, el conjunt de camps vectorials diferenciables en M . És un \mathbf{R} -espai vectorial, i també un $\mathcal{C}^\infty(M)$ -mòdul.

(4.3.8) Si (U, φ) és una carta, $\mathfrak{X}(U)$ és un $\mathcal{C}^\infty(U)$ -mòdul lliure, amb base els $\partial/\partial x^i$. Qualsevol camp vectorial s'expressa de manera única $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Donada una altra carta (U, ψ) , amb camps vectorials coordenats $\partial/\partial y^j$, les bases respectives estan relacionades per

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j},$$

on $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$ és la funció que val $\left. \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right|_p$ en el punt p (matriu jacobiana del canvi de variables).

(4.3.9) Així, $\mathfrak{X}(\mathbf{R}^m)$ és un $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^m)$ -mòdul lliure amb base els camps vectorials coordenats $\partial/\partial t^i$ definits per la seva carta canònica. Un camp vectorial $v^i \partial/\partial t^i$ en \mathbf{R}^m s'identifica amb la funció vectorial donada per les seves components, $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n)$.

En particular, el **camp vectorial unitat** de \mathbf{R} , que podem representar per d/dt , constitueix una base global dels camps vectorials en \mathbf{R} . Un camp vectorial en \mathbf{R} s'identifica a una funció.

Les mateixes afirmacions valen per als subconjunts oberts de \mathbf{R}^m , o de \mathbf{R} .

(4.3.10) Una varietat diferenciable es diu **parallelitzable** si el seu fibrat tangent és *trivialitzable*, és a dir:

- si existeixen m camps vectorials diferenciables E_1, \dots, E_m linealment independents en cada punt de M ;

o, el que és el mateix,

- si existeixen m camps vectorials diferenciables E_1, \dots, E_m tals que tot camp vectorial X en M s'escriu de manera única $X = f^i E_i$, on f^i són

funcions.

Això també significa que

- $\mathfrak{X}(M)$ és un $\mathcal{C}^\infty(M)$ -mòdul lliure,

o que el fibrat vectorial TM és isomorf a $M \times \mathbf{R}^m$.

Els conjunts oberts de \mathbf{R}^m i els grups de Lie són paral·lelitzables.

(4.3.11) Sigui M una varietat, $A \subset V \subset M$ subconjunts tals que A és compacte i V obert. Sigui $Y \in \mathfrak{X}(V)$. Existeix un camp vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, amb $\text{Supp}(X) \subset V$, tal que $X|_A = Y|_A$.

(4.3.12) Sigui M una varietat, $p \in M$, $v_p \in T_pM$. Existeix un camp vectorial diferenciable X en M tal que $X(p) = v_p$.

És a dir, l'aplicació \mathbf{R} -lineal $\mathfrak{X}(M) \rightarrow T_pM$ tal que $X \mapsto X(p)$ és suprajectiva.

(4.3.13) *El fibrat tangent d'un espai vectorial*

Sigui V un espai vectorial real de dimensió finita. Els isomorfismes canònics $\lambda_p: V \rightarrow T_pV$ entre V i els espais tangents de V permeten construir un isomorfisme

$$\lambda: V \times V \rightarrow TV, \quad \lambda(p, \mathbf{v}) = \lambda_p(\mathbf{v}) = [t \mapsto p + t\mathbf{v}] = D_{p, \mathbf{v}}.$$

A través d'aquest isomorfisme, un camp vectorial X en V s'identifica amb una aplicació de la forma $X(p) = (p, \mathbf{f}(p))$, i doncs a una funció vectorial $\mathbf{f}: V \rightarrow V$. Així, $\mathfrak{X}(V) \cong \mathcal{C}^\infty(V, V)$.

Anàlogament, si $F: V \rightarrow W$ és una aplicació de classe C^∞ entre espais vectorials, l'isomorfisme anterior identifica TF amb l'aplicació $TF: V \times V \rightarrow W \times W$ definida per $(p, \mathbf{u}) \mapsto (F(p), DF(p) \cdot \mathbf{u})$.

(4.3.14) *El fibrat tangent d'una subvarietat*

Siguin M una varietat i $j: N \hookrightarrow M$ una subvarietat. Llavors l'aplicació tangent de la inclusió, $Tj: TN \hookrightarrow TM$, identifica TN com una subvarietat de TM .

Un camp vectorial X en M es diu **tangent** a N quan, per a tot punt $p \in N$, el vector X_p és tangent a N .

Si N està definida localment per l'anul·lació d'un sistema de lligams f^1, \dots, f^r amb diferencials linealment independents, això equival a afirmar que les derivades⁹ $\mathcal{L}_X f^1, \dots, \mathcal{L}_X f^r$ s'anul·len sobre N .

⁹Definides a l'apartat següent.

Quan X és tangent a N , la seva restricció, considerada com a aplicació $X_\circ: N \rightarrow TN$, és un camp vectorial en N . Per definició, $Tj \circ X_\circ = X \circ j$.

- (4.3.15) Suposant M paracompacta, i anàlogament al cas de les funcions, tot camp vectorial diferenciable Y definit en una subvarietat tancada $N \subset M$ es prolonga a un camp vectorial diferenciable X en M .

4.4 Camps vectorials com a derivacions

- (4.4.1) Sigui M una varietat, X un camp vectorial en M . Si $W \subset M$ és obert i $f: W \rightarrow \mathbf{R}$ és una funció diferenciable, es pot definir la **derivada** de f segons X com la funció $X \cdot f \equiv \mathcal{L}_X f: W \rightarrow \mathbf{R}$ definida per

$$(\mathcal{L}_X f)(p) = \mathcal{L}_{X_p} f.$$

- (4.4.2) \mathcal{L}_X és un *operador local*: si $g|_V = g'|_V$, llavors $(\mathcal{L}_X g)|_V = (\mathcal{L}_X g')|_V$.

- (4.4.3) Sigui (U, φ) una carta de M . Si $X|_U = X^i \partial/\partial x^i$, llavors

$$(\mathcal{L}_X f)|_U = \frac{\partial f}{\partial x^i} X^i,$$

$$\text{on } \frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} f \equiv \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} f.$$

L'expressió local de $\widehat{\mathcal{L}_X f}$ és $\widehat{\mathcal{L}_X f} = \widehat{X}^i D_i \widehat{f}$.

- (4.4.4) Si X i f són diferenciables, $\mathcal{L}_X f$ és diferenciable.

- (4.4.5) Sigui $X: M \rightarrow TM$ un camp vectorial. X és diferenciable sii, per a tota funció $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ diferenciable, $\mathcal{L}_X f$ és diferenciable.

- (4.4.6) Sigui $X \in \mathfrak{X}(M)$ un camp vectorial diferenciable en M . L'aplicació $\mathcal{L}_X: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ és una derivació.

- (4.4.7) *Teorema d'equivalència entre camps vectorials i derivacions*

Sigui $D: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ una derivació. Existeix un únic camp vectorial diferenciable $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $D = \mathcal{L}_X$.

Dit altrament, l'aplicació $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{Der } \mathcal{C}^\infty(M)$, tal que $X \mapsto \mathcal{L}_X$, és un isomorfisme de \mathbf{R} -espais vectorials.

- (4.4.8) Sigui M una varietat, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ camps vectorials diferenciables. El commutador $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$ de les corresponents derivacions de $\mathcal{C}^\infty(M)$ també n'és una derivació, per tant és de la forma \mathcal{L}_Z on

Z és un altre camp vectorial diferenciable; aquest es denota per $[X, Y]$, i s'anomena **parèntesi de Lie** (o **claudàtor de Lie**) dels camps vectorials X, Y .

Per definició, si h és diferenciable aleshores

$$\mathcal{L}_{[X, Y]}h = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y h) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X h).$$

(4.4.9) $\mathfrak{X}(M)$ amb el parèntesi de Lie és una **R**-àlgebra de Lie.

En particular, el parèntesi de Lie

- és **R**-bilineal;
- és alternat, $[X, X] = 0$, i per tant antisimètric:

$$[X, Y] = -[Y, X];$$

- satisfà la *identitat de Jacobi*:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

(4.4.10) El parèntesi de Lie *no* és $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilineal:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X \cdot g)Y - g(Y \cdot f)X.$$

(4.4.11) Sigui (U, φ) una carta de M . Si $X|_U = f^i \partial/\partial x^i$ i $Y|_U = g^i \partial/\partial x^i$, llavors

$$[X, Y]|_U = \left(f^i \frac{\partial g^j}{\partial x^i} - g^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} = (X \cdot g^j - Y \cdot f^j) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

En particular,

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

(4.4.12) En una varietat de classe C^{r+1} ($r \geq 0$) es pot definir sense més problemes el concepte de camp vectorial de classe C^r .

Si X és de classe C^r i f és de classe C^{r+1} , aleshores $\mathcal{L}_X f$ és de classe C^r .

Per a $r \neq \infty$ els camps vectorials de classe C^r no s'identifiquen amb les derivacions de $C^r(M)$, i per tant la definició del claudàtor de Lie no es pot fer en els mateixos termes¹⁰. Tanmateix, l'expressió coordinada de $[X, Y]$ és aplicable a camps vectorials de classe C^r , amb $r \geq 1$. Si X, Y són de classe C^r , $[X, Y]$ és de classe C^{r-1} . Només quan $r \in \{\infty, \omega\}$ el conjunt dels camps vectorials de classe C^r és una **R**-àlgebra de Lie.

¹⁰Al tema 5 es veurà una altra definició basada en la derivada de Lie, la qual permet treballar amb diferenciabletat finita.

4.5 Camps vectorials relacionats per aplicacions

(4.5.1) Sigui $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable.. Dos camps vectorials X en M , Y en N , es diuen **F -relacionats** quan, per a tot $p \in M$, $T_p F \cdot X_p = Y_{F(p)}$, és a dir,

$$TF \circ X = Y \circ F.$$

En tal cas a vegades s'escriu $X \underset{F}{\sim} Y$.

Un camp vectorial X en M es diu **F -projectable** si està F -relacionat amb algun camp vectorial en N .

(4.5.2) Considerem coordenades (x^i) en M i (y^j) en N , i siguin $X = X^i \partial/\partial x^i$, $Y = Y^j \partial/\partial y^j$ les corresponents expressions dels camps vectorials X , Y . De la relació $TF \circ \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \circ F$ es desprèn que X i Y estan F -relacionats sii

$$\frac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i} X^i = Y^j \circ F.$$

(4.5.3) Sigui $F: M \rightarrow N$ un *difeomorfisme*. Si X és un camp vectorial en M , aleshores hi ha un únic camp vectorial Y en N F -relacionat amb X :

$$F_*(X) = TF \circ X \circ F^{-1}.$$

S'anomena **push-forward** o **imatge directa** de X per F .

Si X és diferenciable, $F_*(X)$ també ho és.

L'operació inversa del push-forward s'anomena **pull-back**, i es denota per F^* .

(4.5.4) En coordenades el push-forward es calcula

$$F_* \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = F_* \left(\frac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i} X^i \right) \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

(4.5.5) Sigui $F: M \rightarrow N$ diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Els camps vectorials X , Y estan F -relacionats sii, per a tota funció diferenciable $g: N \rightarrow \mathbf{R}$,

$$X \cdot F^*(g) = F^*(Y \cdot g).$$

(4.5.6) Sigui $F: M \rightarrow N$ diferenciable, $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$. Si $X_1 \underset{F}{\sim} Y_1$ i $X_2 \underset{F}{\sim} Y_2$, llavors $[X_1, X_2] \underset{F}{\sim} [Y_1, Y_2]$.

(4.5.7) Si F és un difeomorfisme,

$$F_*[X_1, X_2] = [F_*(X_1), F_*(X_2)].$$

(4.5.8) Si $j: N \hookrightarrow M$ és una subvarietat, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ i $X \in \mathfrak{X}(M)$, afirmar que $Y \underset{j}{\sim} X$ significa que X és tangent a N i $Y = X|_N$.

(4.5.9) Si dos camps vectorials X_1, X_2 diferenciables són tangents a una subvarietat $N \subset M$, també ho és el seu parèntesi de Lie $[X_1, X_2]$.

4.6 El fibrat cotangent

(4.6.1) Sigui M una varietat. El **fibrat cotangent** de M és la unió disjunta dels espais cotangents

$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M.$$

Denotem els seus elements per $(p, \alpha), \alpha_p, \alpha, \dots$

La **projecció canònica** de T^*M és l'aplicació que representarem per $\pi_M: T^*M \rightarrow M$, definida per $\pi_M(\alpha_p) = p$. Les seves fibres són els espais cotangents, $\pi_M^{-1}(p) = T_p^*M$.

(4.6.2) Sigui M una varietat diferenciable de dimensió m . El fibrat cotangent T^*M té una única estructura diferenciable de dimensió $2m$ caracteritzada per la propietat següent: si (U, φ) és una carta de M , llavors l'aplicació $\Phi^\vee: \pi_M^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbf{R}^m$ definida per

$$\Phi^\vee(\alpha_p) = (\varphi(p), {}^t(d_p\varphi)^{-1} \cdot \alpha_p).$$

és una carta de T^*M (aquí estem identificant $(\mathbf{R}^m)^*$ amb \mathbf{R}^m).

Aquesta carta també es pot expressar

$$\Phi^\vee(a_i d_p x^i) = (\varphi(p); a_1, \dots, a_m).$$

(4.6.3) Expressant el canvi entre dues cartes de M com $x \mapsto y(x)$, i el seu invers com $y \mapsto x(y)$, el canvi entre les cartes corresponents de T^*M s'expressa

$$(x^i, a_i) \mapsto \left(y^j(x), a_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y(x)) \right).$$

(4.6.4) La carta, i les coordenades, de T^*M construïdes d'aquesta manera a partir de les de M , es diuen **naturals**.

Quan parlem del fibrat cotangent sobreentendrem que està dotat de l'estructura diferenciable anterior.

(4.6.5) La projecció canònica $\pi_M: T^*M \rightarrow M$ és diferenciable.

(4.6.6) Si $U \subset \mathbf{R}^m$ és un subconjunt obert, tenim una identificació canònica $T^*U \cong U \times (\mathbf{R}^m)^*$.

(4.6.7) Si $V \subset M$ és una subvarietat oberta, el seu fibrat cotangent T^*V coincideix amb el subespai obert $\pi_M^{-1}(V) \subset T^*M$.

4.7 Formes diferencials i diferencial d'una funció

(4.7.1) Sigui M una varietat. Una (1-)forma diferencial en M és un camp de vectors cotangents, és a dir, una secció del fibrat cotangent $\pi_M: T^*M \rightarrow M$, és a dir, una aplicació $\omega: M \rightarrow T^*M$ tal que $\pi_M \circ \omega = \text{Id}_M$. Per tant, en cada $p \in M$ tenim un covector $\omega(p) \equiv \omega_p \in T_p^*M$.

(4.7.2) Sigui (U, φ) una carta de M . Es pot escriure

$$\omega(p) = \omega_i(p) dx^i,$$

on les funcions $\omega_i: U \rightarrow \mathbf{R}$ són les **components** de ω en la carta.

L'expressió local de ω en coordenades naturals és $\widehat{\omega}(x) = (x^i; \widehat{\omega}_i(x))$.

(4.7.3) Una forma diferencial és diferenciable si i ho són les seves components en una carta.

(4.7.4) En particular, les aplicacions $dx^i: U \rightarrow T^*U$, definides per $p \mapsto d_p x^i$, són m formes diferencials diferenciables en U .

(4.7.5) Si $V \subset M$ és una subvarietat oberta i ω és una forma diferencial en M , podem considerar la restricció $\omega|_V$ com una forma diferencial en V .

(4.7.6) De manera anàloga als camps de vectors tangents, es pot definir la suma de dos camps de vectors cotangents, i el seu producte per funcions.

(4.7.7) Denotem per $\Omega^1(M)$ el conjunt de 1-formes diferencials diferenciables en M . És un \mathbf{R} -espai vectorial, i un $\mathcal{C}^\infty(M)$ -mòdul.

(4.7.8) Si (U, φ) és una carta, $\Omega^1(U)$ és un $\mathcal{C}^\infty(U)$ -mòdul lliure, amb base les dx^i : qualsevol forma diferencial s'escriu, sobre U , $\omega|_U = \omega_i dx^i$.

(4.7.9) Sigui $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ una funció diferenciable. La **diferencial** de f és la 1-forma diferencial df definida per $df(p) = d_p f$.

(4.7.10) En un obert coordinat la diferencial s'expressa

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

L'expressió local de df és doncs $\widehat{df}(x) = (x; D_i \widehat{f}(x))$.

(4.7.11) Si $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ és diferenciable, $df: M \rightarrow T^*M$ és diferenciable.

(4.7.12) L'aplicació $d: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ és \mathbf{R} -lineal, i

$$d(fg) = g df + f dg.$$

(4.7.13) Siguin $M \xrightarrow{f} \mathbf{R} \xrightarrow{h} \mathbf{R}$ diferenciables. Llavors

$$d(h \circ f) = (Dh \circ f) df.$$

(4.7.14) Igual que en el cas del fibrat tangent, si V és un espai vectorial es té una identificació de T^*V amb $V \times V^*$, i les formes diferencials en V s'identifiquen amb les funcions vectorials $V \rightarrow V^*$.

(4.7.15) En una varietat M de classe C^{r+1} ($r \geq 0$) es pot construir el fibrat cotangent T^*M , i és de classe C^r . Per tant té sentit parlar de 1-formes diferencials de classe C^r . Si $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ és de classe C^{r+1} , df és de classe C^r .

4.8 Dualitat entre camps vectorials i 1-formes diferencials

(4.8.1) Siguin M una varietat, X un camp vectorial i ω una 1-forma diferencial en M . La **contracció** entre ω i X és una funció

$$\langle \omega, X \rangle \equiv \omega(X) \equiv i_X \omega: M \rightarrow \mathbf{R}$$

definida per

$$\langle \omega, X \rangle(p) = \langle \omega_p, X_p \rangle.$$

(4.8.2) En coordenades es té

$$\left\langle dx^j, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \delta_i^j.$$

D'aquí es pot calcular la contracció $\langle \omega, X \rangle$: si $\omega|_U = \omega_i dx^i$ i $X|_U = X^j \partial/\partial x^j$, llavors $\langle \omega, X \rangle|_U = \omega_i X^i$.

Si ω i X són diferenciables, $\langle \omega, X \rangle$ també ho és.

(4.8.3) Si X és un camp vectorial i f una funció diferenciable llavors

$$\langle df, X \rangle = \mathcal{L}_X f.$$

(4.8.4) Una 1-forma diferencial ω és diferenciable sii, per a tot camp vectorial diferenciable X , la funció $\langle \omega, X \rangle$ és diferenciable.

(4.8.5) Si $\omega \in \Omega^1(M)$, l'aplicació $\tilde{\omega}: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $\tilde{\omega}(X) = \langle \omega, X \rangle$ és $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal.

(4.8.6) *Teorema de dualitat entre camps vectorials i 1-formes diferencials*

Sigui $L: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ una aplicació $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal. Existeix una única $\omega \in \Omega^1(M)$ tal que $L(X) = \langle \omega, X \rangle$.

És a dir, l'aplicació $\Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^*$, $\omega \mapsto \langle \omega, \cdot \rangle$, és un isomorfisme de $\mathcal{C}^\infty(M)$ -mòduls.

(4.8.7) En l'enunciat anterior l'operador L és **local** en el sentit següent: el valor de $L(X)$ en p està determinat pel valor de X en un veïnat arbitràriament petit de p .

Això és el mateix que afirmar que, si X i Y coincideixen en un conjunt obert $V \subset M$, aleshores $L(X)$ i $L(Y)$ coincideixen en V . Essent L lineal, això també s'expressa dient que, si X s'anul·la en V , aleshores $L(X)$ també s'hi anul·la.

(4.8.8) Igualment, $\mathfrak{X}(M)$ és isomorf al mòdul dual de $\Omega^1(M)$.

(4.8.9) Si M és paracompacta, usant una mètrica riemanniana es construeix fàcilment un isomorfisme entre TM i T^*M , i per tant un isomorfisme entre els mòduls de seccions corresponents $\mathfrak{X}(M)$ i $\Omega^1(M)$. Tanmateix, no existeix cap isomorfisme *canònic* entre ambdós.

4.9 Pull-back de formes diferencials

(4.9.1) Sigui $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable, $p \in M$. La seva aplicació tangent en p té una transposada ${}^tT_p F: T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$, a vegades anomenada **aplicació cotangent**. Per definició,

$$\langle {}^tT_p F \cdot \beta_{F(p)}, u_p \rangle = \langle \beta_{F(p)}, T_p F \cdot u_p \rangle.$$

(4.9.2) A partir d'una forma diferencial ω en N se'n defineix una en M , denotada per $F^*(\omega)$ i anomenada **pull-back** o **imatge recíproca** de ω per F :

$$F^*(\omega)_p = {}^tT_p F \cdot \omega_{F(p)}.$$

(4.9.3) Siguin $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{g} \mathbf{R}$ diferenciables. Llavors

$$dF^*(g) = F^*(dg).$$

(4.9.4) Siguin $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable, ω una forma diferencial en N , i $g: N \rightarrow \mathbf{R}$ una funció. Aleshores

$$F^*(g\omega) = F^*(g) F^*(\omega).$$

(4.9.5) Sigui (V, ψ) una carta de N . Si $\omega|_V = \omega_j dy^j$, llavors $F^*(\omega)|_{F^{-1}(V)} = F^*(\omega_j) dF^*(y^j)$.

Sigui també (U, φ) una carta de M , amb $F(U) \subset V$; llavors podem expressar $dF^*(y^j) = \frac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i} dx^i$, i doncs

$$F^*(\omega)|_U = F^*(\omega_j) \frac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i} dx^i.$$

També podem escriure $\widehat{F^*(\omega)}(x) = \left(x, \widehat{\omega}_j(\widehat{F}(x)) D_i \widehat{F}^j(x)\right)$.

(4.9.6) Si $F: M \rightarrow N$ és una aplicació diferenciable i ω és una forma diferencial diferenciable en N , llavors $F^*(\omega)$ és diferenciable

S'obté així una aplicació lineal $F^*: \Omega^1(N) \rightarrow \Omega^1(M)$.

(4.9.7) Si X, Y són camps vectorials F -relacionats, i α, β són 1-formes diferencials tals que $\alpha = F^*(\beta)$, aleshores $\langle \alpha, X \rangle = F^* \langle \beta, Y \rangle$.

(4.9.8) Suposem que $F: M \rightarrow N$ és un *difeomorfisme*. En aquest cas podem definir l'aplicació $T_p^*F := {}^t(T_p F)^{-1}: T_p^*M \rightarrow T_{F(p)}^*N$, i globalment una aplicació diferenciable $T^*F: T^*M \rightarrow T^*N$.

En aquest cas, si $\omega \in \Omega^1(N)$, $F^*(\omega) = (T^*F)^{-1} \circ \omega \circ F$.

L'operació inversa del pull-back es diu *push-forward* o *imatge directa*: si $\theta \in \Omega^1(M)$, està definit per

$$F_*(\theta) = T^*F \circ \theta \circ F^{-1}.$$

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ i $\theta \in \Omega^1(M)$,

$$F_*(\langle \theta, X \rangle) = \langle F_*(\theta), F_*(X) \rangle.$$

5 Equacions diferencials i fluxos

5.1 Aixecament d'un camí al fibrat tangent

(5.1.1) Un **camp vectorial al llarg d'una aplicació** $F: M \rightarrow N$ és una aplicació $V: M \rightarrow \text{TN}$ tal que, per a tot $p \in M$, $V(p) \in \text{T}_{F(p)}N$. És a dir, $\tau_N \circ V = F$. Si $V(p) = v^j(p) \partial/\partial y^j|_{F(p)}$, la seva expressió local és $\widehat{V}(x) = (\widehat{F}(x); \widehat{v}^j(x))$.

(5.1.2) Siguin M una varietat, $\gamma: I \rightarrow M$ un camí diferenciable. El vector tangent $\gamma'(t) = \text{T}_t\gamma \cdot d/dt|_t \in \text{T}_{\gamma(t)}M$ en cada $t \in I$ defineix una aplicació $\gamma' \equiv \dot{\gamma}: I \rightarrow \text{TM}$, que també es pot expressar

$$\gamma' = \text{T}\gamma \circ \frac{d}{dt},$$

on d/dt és el camp vectorial unitat de \mathbf{R} . És un camp vectorial al llarg de γ , anomenat **velocitat**, **derivada** o **aixecament canònic** de γ a TM .

(5.1.3) Si γ és diferenciable, γ' també ho és.

(5.1.4) γ és una immersió sii γ' no s'anul·la mai.

(5.1.5) Siguin $I \xrightarrow{\gamma} M \xrightarrow{F} N$ diferenciables. Aleshores

$$(F \circ \gamma)' = \text{TF} \circ \gamma'.$$

Siguin $J \xrightarrow{h} I \xrightarrow{\gamma} M$ diferenciables. Aleshores

$$(\gamma \circ h)' = (\gamma' \circ h) Dh.$$

(5.1.6) Sigui (U, φ) una carta de M , i suposem que $\gamma(I) \subset U$. Sigui $\widehat{\gamma}$ l'expressió local de γ . Recordem que $\gamma'(t) = D\widehat{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\gamma(t)}$. Considerant en TM la carta natural associada a φ , l'expressió local de γ' és $\widehat{\gamma}' = (\widehat{\gamma}, D\widehat{\gamma})$.

5.2 Corbes integrals d'un camp vectorial

(5.2.1) Siguin M una varietat diferenciable, i $X: M \rightarrow \text{TM}$ un camp vectorial diferenciable en M . Un camí $\gamma: I \rightarrow M$ diferenciable es diu **corba integral** de X si

$$\gamma' = X \circ \gamma.$$

Aquesta expressió s'anomena **equació diferencial** (ordinària, explícita, de primer ordre, autònoma) en M , i llavors γ s'anomena **solució** de l'equació.

Si $\gamma(t_0) = p_0$, es diu que γ satisfà la **condició inicial** (t_0, p_0) , o $\gamma(t_0) = p_0$.

(5.2.2) Si en una carta de M tenim expressions locals $\hat{\gamma}$ i $\hat{X}(x) = (x, \mathbf{f}(x))$, llavors l'expressió local de l'equació és $D\hat{\gamma} = \mathbf{f} \circ \hat{\gamma}$.

(5.2.3) Siguin $\gamma: I \rightarrow M$, $\delta: J \rightarrow M$ dues corbes integrals de X . Es diu que δ és una **prolongació** de γ si $I \subset J$ i $\gamma = \delta|_I$.

Una corba integral es diu **maximal** si no admet cap prolongació a un interval més gran.

(5.2.4) Siguin M una varietat, $X: M \rightarrow TM$ un camp vectorial diferenciable, i $\gamma_1: I_1 \rightarrow M$, $\gamma_2: I_2 \rightarrow M$ dues corbes integrals de X amb mateixa condició inicial (t_0, p_0) . Llavors γ_1 i γ_2 coincideixen en $I_1 \cap I_2$.

(5.2.5) *Teorema d'existència i unicitat per a equacions diferencials*

Sigui M una varietat, $X: M \rightarrow TM$ un camp vectorial diferenciable. Donats $t_0 \in \mathbf{R}$ i $p_0 \in M$, existeix una única corba integral maximal de X amb condició inicial (t_0, p_0) .

(5.2.6) *Lema de translació*

Si $\gamma: I \rightarrow M$ és una corba integral de X , també ho és el camí traslladat en t_0 , $\tilde{\gamma}: I - t_0 \rightarrow M$, definit com $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t+t_0)$.

Si γ és maximal, $\tilde{\gamma}$ també ho és.

5.3 Flux d'un camp vectorial

(5.3.1) Sigui $X: M \rightarrow TM$ un camp vectorial en M diferenciable. Donat $p \in M$, sigui $\gamma_p: I_p \rightarrow M$ la corba integral maximal de X amb condició inicial $(0, p)$. Escrivim

$$F_X(t, p) = \gamma_p(t).$$

El domini de F_X és el conjunt

$$\mathcal{D}_X = \{(t, p) \mid p \in M, t \in I_p\} = \bigcup_{p \in M} I_p \times \{p\} \subset \mathbf{R} \times M.$$

L'aplicació $F_X: \mathcal{D}_X \rightarrow M$ s'anomena **flux** del camp vectorial X .

(5.3.2) Per definició, el flux de X compleix

- $F(0, p) = p$,
- $F'(t, p) = X(F(t, p))$.

Aquí denotem per $F': \mathcal{D} \rightarrow TM$ l'aplicació definida per $F'(t, p) = F(-, p)'(t)$ (vector tangent del camí $F(-, p): I_p \rightarrow M$ en l'instant t).

(5.3.3) Si $t_o \in I_p$, llavors $I_{F(t_o,p)} = I_p - t_o$. I si $t \in I_p - t_o$, llavors es compleix la llei de grup

$$\bullet F(t, F(t_o, p)) = F(t + t_o, p).$$

(5.3.4) *Teorema fonamental sobre el flux d'un camp vectorial*

Sigui $X: M \rightarrow TM$ un camp vectorial diferenciable en M . El domini $\mathcal{D}_X \subset \mathbf{R} \times M$ del seu flux és obert, i el flux $F_X: \mathcal{D}_X \rightarrow M$ és una aplicació diferenciable.

(5.3.5) Amb les mateixes hipòtesis del teorema anterior, per a tot $t \in \mathbf{R}$ el conjunt $M_t = \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{D}_X\}$ és obert en M , i l'aplicació

$$F^t: M_t \rightarrow M_{-t}, \quad F^t(p) = F_X(t, p)$$

(flux a temps t) està ben definida i és un difeomorfisme, amb invers F^{-t} .

(5.3.6) Amb les mateixes hipòtesis, sigui $p \in M$. Existeixen un conjunt obert $U \subset M$ que conté p i un nombre $a > 0$ tals que $] -a, a[\times U \subset \mathcal{D}_X$. Per a tot $t \in] -a, a[$, l'aplicació $F^t: U \rightarrow F^t(U)$ és un difeomorfisme.

(5.3.7) Havent vist que $\mathcal{D}_X \subset \mathbf{R} \times M$ és obert i que el flux F_X és diferenciable, notem que es pot reescriure

$$F'_X = TF_X \circ \frac{\partial}{\partial t},$$

essent $\partial/\partial t$ el camp vectorial en $\mathbf{R} \times M$ definit a partir del camp vectorial unitat de \mathbf{R} (vegeu (A.1.8)).

(5.3.8) Tots els resultats anteriors es poden formular amb diferenciabilitat finita. Recordem que en una varietat de classe C^{k+1} podem parlar de camps vectorials de classe C^k .

L'equació diferencial $\gamma' = X \circ \gamma$ té sentit per exemple si X és un camp vectorial continu i γ és un camí de classe C^1 . Si X és de classe C^k aleshores la corba integral γ és de classe C^{k+1} .

El teorema d'existència i unicitat es compleix per exemple si X és de classe C^1 . Aquesta condició també permet la construcció del flux de X . Notem que si X és de classe C^k ($k \geq 1$) aleshores F_X també és C^k , igual que els difeomorfismes associats.

5.4 Camps vectorials complets

(5.4.1) *Lema d'escapament*

Sigui $X: M \rightarrow TM$ un camp vectorial diferenciable en M . Sigui $\gamma:]a, b[\rightarrow$

M una corba integral maximal de X . Se suposa que $b < +\infty$.

Si $A \subset M$ és un subconjunt compacte, llavors existeix $t^* < b$ tal que $\gamma(t) \notin A$ per a $t > t^*$.

Hi ha un enunciat anàleg si $a > -\infty$.

Amb altres paraules, el lema diu que si el domini d'una corba integral maximal no és tot \mathbf{R} , llavors acaba escapant de qualsevol subconjunt compacte de M .

- (5.4.2) Un camp vectorial diferenciable X en M es diu **complet** si el domini de les seves corbes integrals maximals és \mathbf{R} . És a dir, si $\mathcal{D}_X = \mathbf{R} \times M$.
- (5.4.3) En una varietat compacta tots els camps vectorials diferenciables són complets.
- (5.4.4) Més generalment, si un camp vectorial té suport compacte llavors és complet.

5.5 Grups uniparamètrics de transformacions

- (5.5.1) El flux d'un camp vectorial complet és un grup uniparamètric de transformacions.
- (5.5.2) Un **grup uniparamètric de transformacions** de M és una acció de \mathbf{R} sobre M , és a dir, una aplicació $F: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$ tal que $\forall s, t \in \mathbf{R}, \forall p \in M$,
 - $F(0, p) = p$,
 - $F(t + s, p) = F(t, F(s, p))$.
- (5.5.3) Sigui $t \in \mathbf{R}$. Definim $F^t: M \rightarrow M$ per $F^t(p) = F(t, p)$. Les propietats anteriors s'escriuen
 - $F^0 = \text{Id}_M$,
 - $F^{t+s} = F^t \circ F^s$.

F^t és una bijecció, amb inversa F^{-t} .

Denotem per \mathfrak{S}_M el conjunt de permutacions de M . Les propietats anteriors poden enunciar-se dient que l'aplicació $\mathbf{R} \rightarrow \mathfrak{S}_M, t \mapsto F^t$, és un morfisme de grups.

- (5.5.4) Sigui $p \in M$. Definim $\gamma_p: \mathbf{R} \rightarrow M$ per $\gamma_p(t) = F(t, p)$. La imatge de γ_p és l'**òrbita** de p per l'acció,

$$\mathcal{O}_p = \{\gamma_p(t) \mid t \in \mathbf{R}\} = \{F^t(p) \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

M és la unió disjunta de les òrbites.

(5.5.5) Si M és un espai topològic o una varietat diferenciable podem considerar que F sigui contínua o diferenciable, respectivament. Llavors també ho són els camins γ_p , i les bijeccions F^t són homeomorfismes o difeomorfismes, respectivament.

(5.5.6) Suposem a partir d'ara que M és una varietat i F és diferenciable. Llavors podem definir el vector tangent $X_p = \gamma'_p(0) \in T_pM$. Això defineix un camp vectorial X en M , que podem escriure

$$X = F'(0, -),$$

on $F'(t, p)$ és el vector tangent de $F(-, p)$ a l'instant t ($F' = TF \circ \partial/\partial t$, com s'ha vist abans).

El camp vectorial X obtingut s'anomena **generador infinitesimal** del grup uniparamètric F .

(5.5.7) El generador infinitesimal és un camp vectorial diferenciable.

L'expressió local de X en una carta de M és $\widehat{X}(x) = (x, D_1\widehat{F}(0, x))$.

(5.5.8) Si $F: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$ és un grup uniparamètric diferenciable amb generador infinitesimal X , llavors els camins $\gamma_p(t) = F(t, p)$ són corbes integrals de X , F és el flux de X , i X és un camp vectorial complet.

Hi ha, doncs, una bijecció entre camps vectorials complets i grups uniparamètrics de transformacions.

(5.5.9) A fi de tractar el flux d'un camp vectorial no complet és necessari ampliar la definició de grup uniparamètric de transformacions.

Un **grup uniparamètric local de transformacions** d'una varietat M és una aplicació $F: \mathcal{D} \rightarrow M$ tal que:

- $\mathcal{D} \subset \mathbf{R} \times M$ és obert.
- Per a cada $p \in M$, $I_p = \{t \in \mathbf{R} \mid (t, p) \in \mathcal{D}\}$ és un interval obert que conté 0.
- Per a cada $p \in M$, $F(0, p) = p$.
- Per a cada $p \in M$, si $s \in I_p$, $t \in I_{F(s, p)}$ i $t+s \in I_p$, llavors $F(t+s, p) = F(t, F(s, p))$.

(5.5.10) En aquesta situació encara podem usar les notacions anteriors $\gamma_p(t) = F(t, p) = F^t(p)$, amb les precaucions pertinents sobre el domini d'aquestes aplicacions. Si F és diferenciable, també es pot definir el seu generador infinitesimal $X = F'(0, -)$. Recíprocament, el flux d'un camp vectorial

diferenciable X és un grup uniparamètric local de transformacions, i el seu generador infinitesimal és X .

Hi ha, doncs, una bijecció entre camps vectorials i grups uniparamètrics locals de transformacions, entenent, però, que hem d'identificar dos grups uniparamètrics locals que coincideixin en el seu domini comú.

5.6 Òrbites d'una equació diferencial

(5.6.1) Sigui M una varietat diferenciable, i X un camp vectorial diferenciable en M .

Un **punt regular** de X és un punt $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$.

Un **punt crític** de X és un punt p tal que $X(p) = 0$. En aquest cas el camí constant $\gamma(t) = p$ és una corba integral de X , definida en tot \mathbf{R} , anomenada *solució d'equilibri*.

Anomenem **òrbita** de X la imatge de qualsevol de les seves corbes integrals maximals. M és la unió disjunta de totes les òrbites de X .

(5.6.2) Sigui M una varietat, $X: M \rightarrow TM$ un camp vectorial diferenciable en M . Si $\gamma: I \rightarrow M$ és una corba integral maximal de X , llavors es compleix una d'aquestes possibilitats:

- γ és constant, i l'òrbita és un punt.
- γ és una immersió injectiva.
- γ és una immersió periòdica, i l'òrbita és difeomorfa a la circumferència \mathbf{S}_1 .

(5.6.3) Tot subgrup tancat de \mathbf{R} és, o bé \mathbf{R} , o bé de la forma $c\mathbf{Z}$, on $c \geq 0$.

(5.6.4) Sigui M un espai topològic Hausdorff. El conjunt dels períodes d'una aplicació contínua $f: \mathbf{R} \rightarrow M$ és un subgrup tancat de \mathbf{R} .

(5.6.5) *Teorema de redreçament de camps vectorials*

Sigui M una varietat, X un camp vectorial diferenciable en M , $p \in M$. Si $X(p) \neq 0$, llavors existeix un sistema de coordenades (x^i) en p amb el qual localment es pot expressar $X = \partial/\partial x^1$.

(5.6.6) El procediment per a redreçar X en p es pot resumir així.

Es pren una hipersuperfície $M_o \subset M$ que contingui p i tal que $X_p \notin T_p M_o$. Aleshores la restricció $F_o: \mathcal{D} \cap (\mathbf{R} \times M_o) \rightarrow M$ del flux de X és un difeomorfisme local en $(0, p)$ tal que, restringit entre subconjunts oberts més petits a fi d'obtenir

un difeomorfisme, compleix $F_{\circ,*}(\partial/\partial t) = X$.

Finalment, la coordenada t , juntament amb l'elecció de $m-1$ coordenades en M_{\circ} , dona, a través de F_{\circ} , les coordenades desitjades en M .

- (5.6.7) En un veïnat d'un punt crític l'estudi local del flux de X és més complicat. Un resultat anàleg al teorema de redreçament és el teorema de Grobman–Hartman. Descrivim-ho succintament.

Signin M una varietat, X un camp vectorial diferenciable en M , F^t el seu flux, i p un punt crític de X : $X_p = 0$.

L'aplicació tangent de X en p permet construir un endomorfisme $A: T_p M \rightarrow T_p M$; en coordenades, si $X = f^i \partial/\partial x^i$, la matriu de A en la base de vectors tangents coordinats és la jacobiana $\left(\partial f^i/\partial x^j \Big|_p\right)$. És l'*endomorfisme linealitzat* de X en p .

Aquest endomorfisme dona lloc a una equació diferencial lineal en l'espai vectorial $T_p M$: $u' = Au$; és el *sistema linealitzat* de X en p . El seu flux és simplement $G^t = \exp(At)$.

Els valors propis de A s'anomenen *exponents característics* de A , i són decisius en l'estudi de l'estabilitat de la solució d'equilibri corresponent a p .

El punt d'equilibri es diu *hiperbòlic* quan tots els exponents característics del seu sistema linealitzat tenen part real no nul·la.

- (5.6.8) *Teorema de Grobman–Hartman*

Signi M una varietat, X un camp vectorial diferenciable en M , $p \in M$ un punt crític *hiperbòlic* de X .

En un veïnat de p el flux F^t de X i el flux G^t del seu linealitzat en p són conjugats per un *homeomorfisme* h : $h \circ F^t = G^t \circ h$.

Intuïtivament, això expressa que els respectius retrats de fase són semblants.

A vegades l'homeomorfisme h és un difeomorfisme. En aquest cas podem dir que X i el seu linealitzat estan *h*-relacionats, i per tant que X es pot linealitzar (localment) amb unes coordenades adequades. (Vegeu (5.7.6).)

- (5.6.9) L'estudi de les òrbites es fa de la mateixa manera si X és de classe C^k ($k \geq 1$) en una varietat de classe C^{k+1} ; recordem que les corbes integrals de X són de classe C^{k+1} i per tant també ho són les òrbites.

El redreçament de X al voltant d'un punt regular s'aconsegueix amb un difeomorfisme de classe C^k , per tant en el cas que $k < \infty$ no podem assegurar que aquest redreçament es pugui fer amb una carta de la varietat.

La construcció del sistema linealitzat en un punt crític només requereix que X sigui de classe C^1 . Tanmateix, el teorema de Grobman–Hartman requereix X de classe C^2 .

5.7 Derivada de Lie de funcions i de camps vectorials

(5.7.1) Sigui X un camp vectorial diferenciable en M , i $F: \mathcal{D} \rightarrow M$ el seu flux.

Si $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ és una funció diferenciable, podem calcular la derivada $\mathcal{L}_X f$, també anomenada derivada de Lie de f respecte a X , com

$$\mathcal{L}_X f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F^{t*}(f)(p) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F^{t*}(f)(p).$$

En el cas que X no sigui complet, cal recordar que els difeomorfismes F^t del flux no estan definits en tot M ; tanmateix, per a cada $p \in M$ existeixen conjunts oberts $I \ni 0$ i $U_p \ni p$ tals que $I \times U_p \subset \mathcal{D}$, de manera que per a $t \in I$ estan definits els $F^t: U_p \rightarrow M$, i doncs les $F^{t*}(f)$ estan definides en U_p .

També escriurem l'expressió anterior, de manera poc correcta, com

$$\mathcal{L}_X f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F^{t*}(f),$$

entenen que s'ha d'interpretar segons la fórmula donada prèviament.

(5.7.2) Sigui Y un altre camp vectorial diferenciable en M . De manera anàloga, i amb les mateixes precaucions si X no és complet, definim

$$\mathcal{L}_X Y(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{F^t(p)} F^{-t} \cdot Y(F^t(p)) - Y(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F^{t*}(Y)(p) \in T_p M,$$

límit que veurem que existeix. S'obté així un camp vectorial $\mathcal{L}_X Y$, anomenat **derivada de Lie** de Y respecte a X .

També ho podem escriure, amb el mateix abús de notació que abans, com

$$\mathcal{L}_X Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F^{t*}(Y).$$

(5.7.3) Si X i Y són camps vectorials diferenciables en M , llavors

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

(5.7.4) La derivada de Lie sobre camps vectorials satisfà les propietats següents:

- $\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X$.
- $\mathcal{L}_X [Y, Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$.
- $\mathcal{L}_{[X, Y]} Z = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] Z$.
- $\mathcal{L}_X (fY) = (\mathcal{L}_X f)Y + f\mathcal{L}_X Y$.
- Si $H: M \rightarrow N$ és un difeomorfisme, $H_*(\mathcal{L}_X Y) = \mathcal{L}_{H_*(X)} H_*(Y)$.

(5.7.5) Siguin M, N varietats, $H: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable. Siguin X, Y camps vectorials diferenciables en M i N , respectivament. Les tres propietats següents són equivalents:

- i) X i Y estan H -relacionats.
- ii) Si γ és una corba integral de X aleshores $H \circ \gamma$ és una corba integral de Y .
- iii) Es compleix $H \circ F_X^t = F_Y^t \circ H$ allà on aquesta expressió estigui definida.

(5.7.6) Sigui $H: M \rightarrow N$ un difeomorfisme, i X un camp vectorial diferenciable en M , amb flux F^t . El flux de $H_*(X) = TH \circ X \circ H^{-1}$ és $H_*(F^t) := H \circ F^t \circ H^{-1}$.

(5.7.7) Un camp vectorial X en M es diu *invariant* per un difeomorfisme $H: M \rightarrow M$ quan $H_*(X) = X$.

(5.7.8) Un camp vectorial diferenciable X és invariant per un difeomorfisme $H: M \rightarrow M$ si H commuta amb el flux F_X^t de X .

(5.7.9) Un camp vectorial Y en M es diu *invariant* per un camp vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ quan és invariant pels difeomorfismes del flux de X : $(F_X^t)_*(Y) = Y$ (sobre el domini de cada F_X^t).

(5.7.10)
$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} F_X^t(Y) = F_X^{t_0}(\mathcal{L}_X Y).$$

(5.7.11) Siguin X, Y camps vectorials diferenciables en M . Les afirmacions següents són equivalents:

- i) $[X, Y] = 0$.
- ii) $\mathcal{L}_X Y = 0$.
- iii) Y és invariant per X : $(F_X^t)_*(Y) = Y$.
- iv) $F_X^t \circ F_Y^s = F_Y^s \circ F_X^t$ allà on els dos membres estiguin definits.

(5.7.12) X és invariant pel seu flux: $(F_X^t)_*(X) = X$.

(5.7.13) La definició de la derivada de Lie $\mathcal{L}_X Y$ només requereix que X i Y siguin de classe C^1 (en una varietat de classe C^2). Això permet definir el claudàtor de Lie $[X, Y] := \mathcal{L}_X Y$ amb diferenciabilitat finita. Si X, Y són de classe C^k , aleshores $\mathcal{L}_X Y$ és de classe C^{k-1} .

Tanmateix, algunes de les propietats de la derivada de Lie requereixen que els camps vectorials siguin de classe C^2 .

6 Camps tensorials

6.1 Camps tensorials

(6.1.1) Sigui M una varietat diferenciable de dimensió m , $p \in M$ un punt, i $k, \ell \in \mathbf{N}$. A partir de l'espai tangent $T_p M$ podem construir els productes tensorials¹¹ $\text{Tens}_\ell^k(T_p M) = \otimes^\ell T_p^* M \otimes^k T_p M$; els seus elements s'anomenen tensors en p .

(6.1.2) Semblantment a la construcció dels fibrats tangent i cotangent, la unió disjunta d'aquests espais vectorials, quan p recorre M , és un *fibrat vectorial* $\text{Tens}_\ell^k(TM)$, que es pot dotar d'una projecció $\tau_\ell^k: \text{Tens}_\ell^k(TM) \rightarrow M$ i d'una estructura diferenciable. Més concretament, donada una carta (U, φ) de M , s'obté una carta natural $((\tau_\ell^k)^{-1}(U), \Phi_\ell^k)$ de $\text{Tens}_\ell^k(TM)$ definint, per a $K_p \in \text{Tens}_\ell^k(T_p M)$, $\Phi_\ell^k(K_p) = (\varphi(p), \text{Tens}_\ell^k(d_p \varphi) \cdot K_p)$.

(6.1.3) Un **camp tensorial** k -contravariant ℓ -covariant, o de tipus (k, ℓ) , és una aplicació R que assigna a cada punt $p \in M$ un tensor $R(p) \equiv R_p \in \text{Tens}_\ell^k(T_p M)$.

És a dir, és una secció del fibrat tensorial $\text{Tens}_\ell^k(TM)$ corresponent.

(6.1.4) Sigui (U, φ) una carta de M al voltant de p . La corresponent base de vectors tangents coordenats $\partial/\partial x^i|_p$ dona lloc a la base dual $dx^i|_p$ de $T_p^* M$, i la base corresponent $dx^{j_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_\ell}|_p \otimes \partial/\partial x^{i_1}|_p \otimes \dots \otimes \partial/\partial x^{i_k}|_p$ de $\text{Tens}_\ell^k(T_p M)$, anomenada base natural associada a la carta.

Mitjançant aquesta base també podem expressar la carta natural del fibrat tensorial com $\Phi_\ell^k(K_{j_1 \dots j_\ell}^{i_1 \dots i_k} d_p x^{j_1} \otimes \dots \otimes d_p x^{j_\ell} \otimes \partial/\partial x^{i_1}|_p \otimes \dots \otimes \partial/\partial x^{i_k}|_p) = (\widehat{p}; K_{j_1 \dots j_\ell}^{i_1 \dots i_k})$.

(6.1.5) Si R és un camp tensorial k -contravariant ℓ -covariant, en cada punt $p \in U$ es pot escriure, doncs,

$$R(p) = R_{j_1 \dots j_\ell}^{i_1 \dots i_k}(p) d_p x^{j_1} \otimes \dots \otimes d_p x^{j_\ell} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_p,$$

on les funcions $R_{j_1 \dots j_\ell}^{i_1 \dots i_k}$ s'anomenen **components** de R en la carta donada.

¹¹Al llarg de tota l'exposició posarem primer els factors de l'espai cotangent i després els de l'espai tangent, però això no és més que un conveni, i fins i tot podríem intercalar tangents i cotangents; això últim pot ser especialment rellevant quan tenim una estructura geomètrica que permet passar d'uns a altres, en particular en la geometria riemanniana.

L'expressió anterior es pot escriure

$$R|_U = R_{j_1 \dots j_\ell}^{i_1 \dots i_k} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_\ell} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}},$$

interpretant que s'ha d'avaluar cada terme en p , o bé usant les operacions elementals amb camps tensorials que es descriuran a la secció següent.

(6.1.6) Un camp tensorial R es diu **diferenciable** quan ho són les seves funcions components en una carta.

Això equival a afirmar que $R: M \rightarrow \text{Tens}_\ell^k(TM)$ és una aplicació diferenciable.

(6.1.7) Si R és un camp tensorial en M i $V \subset M$ és una subvarietat oberta, podem considerar $R|_V$ com un camp tensorial en V .

(6.1.8) Denotarem per $\mathcal{T}_\ell^k(M)$ el conjunt dels camps tensorials de tipus (k, ℓ) diferenciables en M .

Escriurem $\mathcal{T}^k(M) = \mathcal{T}_0^k(M)$ per als camps tensorials contravariants, i $\mathcal{T}_\ell(M) = \mathcal{T}_\ell^0(M)$ per als camps tensorials covariants. En particular tenim $\mathcal{T}_0^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, $\mathcal{T}^1(M) = \mathfrak{X}(M)$ i $\mathcal{T}_1(M) = \Omega^1(M)$.

(6.1.9) Un tensor $R_p \in \text{Tens}_\ell^k(T_p M)$ defineix una funció multilinear de k covectors i ℓ vectors. Per tant un camp tensorial R defineix una aplicació multilinear actuant sobre k camps de vectors cotangents $\theta_1, \dots, \theta_k$ i ℓ camps de vectors tangents X_1, \dots, X_ℓ , que dona com a resultat una funció,

$$\tilde{R}(X_1, \dots, X_\ell, \theta_1, \dots, \theta_k)(p) = R_p(X_1(p), \dots, X_\ell(p), \theta_1(p), \dots, \theta_k(p)).$$

Escriurem aquesta funció més simplement $R(X_1, \dots, X_\ell, \theta_1, \dots, \theta_k)$, sense senyalar R amb cap símbol adicional.

Expressant en coordenades aquest camp tensorial i tots els camps de vectors i covectors, es calcula aquesta funció com $R_{j_1 \dots j_\ell}^{i_1 \dots i_k} X_1^{j_1} \dots X_\ell^{j_\ell} \theta_{i_1} \dots \theta_{i_k}$.

Més particularment, les components de R en una carta es poden obtenir com

$$R_{j_1 \dots j_\ell}^{i_1 \dots i_k} = R|_U \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_\ell}}, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_k} \right).$$

(6.1.10) Sigui R un camp tensorial de tipus (k, ℓ) . R és diferenciable sii l'aplicació anterior \tilde{R} transforma camps de vectors i covectors diferenciables qualssevol en una funció diferenciable.

(6.1.11) Sigui $L: \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \times \Omega^1(M) \times \dots \times \Omega^1(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ una aplicació $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinear. Llavors L és l'aplicació \tilde{R} definida per un cert camp tensorial diferenciable $R \in \mathcal{T}_\ell^k(M)$.

Això es podria expressar dient que el $\mathcal{C}^\infty(M)$ -mòdul $\mathcal{F}_\ell^k(M)$ és el dual de $\mathcal{F}_k^\ell(M)$.

(6.1.12) *Canvi de coordenades*

Signin (x^i) , (y^α) dos sistemes de coordenades. Podem escriure $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ i $dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} dy^\beta$. Suposem que R s'expressa en ambdues cartes com

$$R_{j_1 \dots j_\ell}^{i_1 \dots i_k} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_\ell} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}},$$

$$\bar{R}_{\beta_1 \dots \beta_\ell}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} dy^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dy^{\beta_\ell} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\alpha_k}},$$

respectivament. Aleshores les components es relacionen per

$$\bar{R}_{\beta_1 \dots \beta_\ell}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = R_{j_1 \dots j_\ell}^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{j_\ell}}{\partial y^{\beta_\ell}} \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{i_k}}.$$

(6.1.13) En una varietat de classe C^{r+1} es poden considerar camps tensorials de classe C^r . Les major part de les operacions que es descriuen en aquest tema es poden fer amb grau de diferenciabilitat finit; en el cas d'operadors diferencials comporten la disminució del grau de diferenciabilitat.

6.2 Operacions amb camps tensorials

(6.2.1) Les operacions amb tensors en un punt, i més particularment la suma i el producte per escalars, donen lloc a operacions amb els camps tensorials. Així, si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $R, R' \in \mathcal{F}_\ell^k(M)$, tenim que el producte fR i la suma $R + R'$ són de $\mathcal{F}_\ell^k(M)$. Amb aquestes operacions $\mathcal{F}_\ell^k(M)$ és un $\mathcal{C}^\infty(M)$ -mòdul.

(6.2.2) De la mateixa manera, si $R \in \mathcal{F}_\ell^k(M)$ i $S \in \mathcal{F}_{\ell'}^{k'}(M)$, podem definir el producte tensorial $R \otimes S \in \mathcal{F}_{\ell+\ell'}^{k+k'}(M)$ a partir del producte en cada punt: $(R \otimes S)_p = R_p \otimes S_p$.

El producte tensorial de camps tensorials es pot expressar

$$(\theta_1 \otimes \dots \otimes \theta_\ell \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_k) \otimes (\theta_{\ell+1} \otimes \dots \otimes \theta_{\ell+\ell'} \otimes X_{k+1} \otimes \dots \otimes X_{k+k'}) =$$

$$= \theta_1 \otimes \dots \otimes \theta_{\ell+\ell'} \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_{k+k'}.$$

També podem definir-lo per la seva acció sobre camps de vectors i covectors:

$$(R \otimes S)(Y_1, \dots, Y_{\ell+\ell'}, \omega_1, \dots, \omega_{k+k'}) =$$

$$= R(Y_1, \dots, Y_\ell, \omega_1, \dots, \omega_k) S(Y_{\ell+1}, \dots, Y_{\ell+\ell'}, \omega_{k+1}, \dots, \omega_{k+k'}) .$$

(6.2.3) Aquestes operacions doten d'estructures de $\mathcal{C}^\infty(M)$ -àlgebra graduada associativa unitària els conjunts següents:

- $\mathcal{T}_\bullet^k(M) = \bigoplus_{k, \ell \in \mathbf{N}} \mathcal{T}_\ell^k(M)$, **àlgebra dels camps tensorials** (mixtos)
- $\mathcal{T}^\bullet(M) = \bigoplus_{k \in \mathbf{N}} \mathcal{T}^k(M)$, **àlgebra dels camps tensorials contravariants**
- $\mathcal{T}_\bullet(M) = \bigoplus_{\ell \in \mathbf{N}} \mathcal{T}_\ell(M)$, **àlgebra dels camps tensorials covariants**

(6.2.4) Quan U és un obert coordinat, el $\mathcal{C}^\infty(U)$ -mòdul $\mathcal{T}_\ell^k(U)$ és lliure, amb base els camps tensorials

$$dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_\ell} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} .$$

Anàlogament, els camps vectorials $\partial/\partial x^i$ generen l'àlgebra $\mathcal{T}^\bullet(U)$, etc.

(6.2.5) *Contracció interior de camps tensorials mixtos*

Si $R \in \mathcal{T}_\ell^k(M)$ és un camp tensorial mixt, en cada punt podem contreure l' i -èsim índex contravariant amb el j -èsim índex covariant; això dona un camp tensorial $c_j^i(R) \in \mathcal{T}_{\ell-1}^{k-1}(M)$, definit per

$$\begin{aligned} c_j^i(\theta_1 \otimes \dots \otimes \theta_\ell \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_k) &= \\ &= \langle \theta_j, X_i \rangle \theta_1 \otimes \dots \otimes \widehat{\theta}_j \otimes \dots \otimes \widehat{X}_i \otimes \dots \otimes X_k, \end{aligned}$$

on el barret denota l'absència del terme corresponent.

Per exemple, si $A \in \mathcal{T}_1^1(M)$ té expressió local $A|_U = a_j^i dx^j \otimes \partial/\partial x^i$, llavors $\text{tr } A = c_1^1(A)$ és, sobre U , la funció a_j^j .

(6.2.6) *Pull-back de camps tensorials covariants*

Siguin $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable, S un camp tensorial ℓ -covariant en N . Es pot definir un camp tensorial $F^*(S)$ del mateix tipus en M , anomenat **imatge recíproca** o **pull-back** de S per F :

$$F^*(S)_p = \otimes^\ell {}^t(\mathbb{T}_p F) \cdot S_{F(p)} ;$$

en un punt la seva acció sobre ℓ vectors tangents $u_j \in \mathbb{T}_p M$ és

$$F^*(S)_p(u_1, \dots, u_\ell) = S_{F(p)}(\mathbb{T}_p F \cdot u_1, \dots, \mathbb{T}_p F \cdot u_\ell) .$$

També es pot descriure per

$$F^*(\theta_1 \otimes \dots \otimes \theta_\ell) = F^*(\theta_1) \otimes \dots \otimes F^*(\theta_\ell) ,$$

on en el segon membre apareix el pull-back de 1-formes diferencials.

(6.2.7) El pull-back de camps tensorials covariants compleix les propietats següents:

- $F^*(gS) = F^*(g)F^*(S)$.
- $F^*(S_1 \otimes S_2) = F^*(S_1) \otimes F^*(S_2)$.
- $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.
- $\text{Id}^*(S) = S$.

(6.2.8) En coordenades, el pull-back es pot calcular amb

$$F^*(S_{j_1 \dots j_\ell} dy^{j_1} \otimes \dots \otimes dy^{j_\ell}) = F^*(S_{j_1 \dots j_\ell}) dF^*(y^{j_1}) \otimes \dots \otimes dF^*(y^{j_\ell}).$$

(6.2.9) *Pull-back i push-forward per difeomorfismes*

Si $F: M \rightarrow N$ és un difeomorfisme es poden definir la **imatge directa** o **push-forward**, F_* , i la **imatge recíproca** o **pull-back**, F^* , de camps tensorials de qualsevol tipus per F . Ambdues operacions són mútuament recíproques.

Si $R \in \mathcal{T}_\ell^k(M)$, llavors $F_*(R)$ està definit per

$$F_*(R)(q) = \text{Tens}_\ell^k(T_{F^{-1}(q)}F) \cdot R(F^{-1}(q)) \quad \text{on } q \in N,$$

i anàlogament si $S \in \mathcal{T}_\ell^k(N)$

$$F^*(S)(p) = \text{Tens}_\ell^k(T_pF)^{-1} \cdot S(F(p)) \quad \text{on } p \in M.$$

Alternativament,

$$F_*(\theta_1 \otimes \dots \otimes \theta_\ell \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_k) =$$

$$F_*(\theta_1) \otimes \dots \otimes F_*(\theta_\ell) \otimes F_*(X_1) \otimes \dots \otimes F_*(X_k)$$

i anàlogament per a $F^*(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_\ell \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes Y_k)$.

6.3 Formes diferencials

(6.3.1) És habitual identificar els elements de l'àlgebra exterior amb els tensors antisimètrics, cosa que farem en particular amb $\Lambda^k T_p^*M \subset \text{Tens}^k(T_p^*M)$; els seus elements s'anomenen k -covectors en p .

La unió disjunta d'aquests espais, quan p recorre M , és un fibrat vectorial $\Lambda^k(T^*M)$, que es pot dotar d'una estructura diferenciable i d'una projecció anàlogues a les del fibrat cotangent. De manera similar es pot definir $\Lambda^k(TM)$.

(6.3.2) Una **k -forma diferencial** és una aplicació ω que assigna a cada punt $p \in M$ un k -vector cotangent $\omega(p) \equiv \omega_p \in \Lambda^k(T_p^*M)$ (per tant, un tensor k -covariant antisimètric).

En altres termes, una k -forma diferencial és una secció del fibrat exterior $\Lambda^k T^*M$.

(6.3.3) Una k -forma diferencial s'identifica a un camp tensorial k -covariant antisimètric.

(6.3.4) Denotarem per $\Omega^k(M)$ el conjunt de k -formes diferencials diferenciables. Notem que $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, i que, si $k > m$, aleshores $\Omega^k(M) = 0$.

(6.3.5) És el mateix donar una k -forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$ que donar una aplicació $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineal alternada $L: \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$.

(6.3.6) La suma de formes diferencials i el producte d'una forma diferencial per una funció estan definits com amb els camps tensorials, punt a punt. Amb aquestes operacions, $\Omega^k(M)$ és un $\mathcal{C}^\infty(M)$ -mòdul.

(6.3.7) Igualment, el producte exterior definit en cada punt de M permet definir el producte exterior de formes diferencials. Si $\alpha \in \Omega^k(M)$, i $\beta \in \Omega^\ell(M)$, $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+\ell}(M)$.

Considerant α i β com a camps tensorials covariants, el seu producte exterior s'obté antisimetritzant el seu producte tensorial així:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{k! \ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon_\sigma \sigma(\alpha \otimes \beta),$$

on ε_σ denota la signatura de la permutació σ .

Alternativament, la seva acció sobre $k + \ell$ camps vectorials ve donada per

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{k+\ell}) &= \\ &= \frac{1}{k! \ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon_\sigma \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}). \end{aligned}$$

(6.3.8) Amb aquestes operacions, el conjunt

$$\Omega^\bullet(M) = \bigoplus_{k=0}^m \Omega^k(M)$$

té estructura de $\mathcal{C}^\infty(M)$ -àlgebra graduada associativa unitària anticommutativa. És l'**àlgebra de les formes diferencials**.

Els seus elements són les seccions diferenciables de $\Lambda^\bullet(T^*M) = \bigoplus_{k=0}^m \Lambda^k(T^*M)$.

(6.3.9) L'anticommutativitat significa que, si α té grau k i β té grau ℓ , llavors

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha.$$

(6.3.10) En particular, el producte exterior de k 1-formes diferencials, considerat com a camp tensorial antisimètric, és

$$\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \theta_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \theta_{\sigma(k)}.$$

L'acció d'aquest producte sobre k camps vectorials és

$$(\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k)(X_1, \dots, X_k) = \det(\langle \theta_i, X_j \rangle).$$

(6.3.11) Sigui (U, φ) una carta de M . Els $\binom{m}{k}$ elements $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_p$ (amb $i_1 < \dots < i_k$) formen una base de $\Lambda^k(\mathbb{T}_p^*M)$.

Mitjançant aquesta base podem expressar una k -forma diferencial

$$\omega|_U = \sum' \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

on el sumatori s'estén als multiíndexs tals que $i_1 < \dots < i_k$. Les funcions components es poden obtenir com $\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega(\partial/\partial x^{i_1}, \dots, \partial/\partial x^{i_k})$.

(6.3.12) Els canvis de coordenades amb k -formes diferencials, escrites en la base de les $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, es representen de manera similar als dels camps tensorials qualssevol, partint de les expressions corresponents de l'àlgebra multilinear.

Per exemple, per a formes diferencials de grau màxim m , i dos sistemes de coordenades $(x^i), (y^j)$, tenim

$$dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m = \det \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

(6.3.13) *Pull-back de formes diferencials*

Siguin $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable. Si $\beta \in \Omega^k(N)$, la seva imatge recíproca és $F^*(\beta) \in \Omega^k(M)$.

A banda de la linealitat, es compleix

$$F^*(\beta_1 \wedge \beta_2) = F^*(\beta_1) \wedge F^*(\beta_2),$$

de manera que $F^*: \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ és un morfisme d'àlgebres.

En coordenades es calcula

$$\begin{aligned} F^* \left(\sum' \omega_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k} \right) &= \\ &= \sum' F^*(\omega_{i_1 \dots i_k}) dF^*(y^{i_1}) \wedge \dots \wedge dF^*(y^{i_k}). \end{aligned}$$

(6.3.14) *Contracció interior d'una forma diferencial amb un camp vectorial*

Siguin $\omega \in \Omega^k(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$. La **contracció** de X amb ω és una $(k-1)$ -forma diferencial, denotada per $i_X \omega \equiv i(X)\omega \equiv X \lrcorner \omega$, definida a partir de la contracció en cada punt: $(i_X \omega)_p = i_{X_p} \omega_p$.

L'acció de $i_X\omega$ sobre $k - 1$ camps vectorials és doncs

$$i_X\omega(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}).$$

Notem que, per a $\omega \in \Omega^1(M)$, $i_X\omega = \langle \omega, X \rangle$, i en particular $i_Xdf = \mathcal{L}_Xf$.

Si $\omega \in \Omega^0(M)$, convenim $i_X\omega = 0$.

(6.3.15) L'aplicació $i_X: \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ satisfà les propietats següents:

- És $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal.
- $i_X \circ i_X = 0$.
- $i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge (i_X\beta)$

És una antiderivació de grau -1 de l'àlgebra de les formes diferencials.

(6.3.16) La contracció interior també es pot expressar

$$i_X(\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \langle \theta_j, X \rangle \theta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\theta_j} \wedge \dots \wedge \theta_k.$$

(6.3.17) Altres propietats: $i_{fX} = f i_X$, $i_{X+Y} = i_X + i_Y$, $i_X \circ i_Y = -i_Y \circ i_X$.

6.4 La diferencial exterior

(6.4.1) *Teorema d'existència de la diferencial exterior*

Sigui M una varietat diferenciable. Existeix una única aplicació $d: \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ que satisfà les propietats següents:

- És \mathbf{R} -lineal.
- d aplica $\Omega^k(M)$ en $\Omega^{k+1}(M)$.
- Si α és de grau k , $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.
- Si $g \in \Omega^0(M)$, dg coincideix amb la diferencial de la funció g .
- Si $g \in \Omega^0(M)$, $d(dg) = 0$.

Aquesta aplicació és un operador local: si $V \subset M$ és obert i $\alpha|_V = \beta|_V$, llavors $d\alpha|_V = d\beta|_V$.

(6.4.2) L'operador d s'anomena **diferencial exterior**.

És una antiderivació de $\Omega^\bullet(M)$ de grau 1.

(6.4.3) A partir de la seva definició tenim

$$d(f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k,$$

expressió que, atesa la localitat de d , permet calcular la diferencial exterior en coordenades: si $\alpha|_U = \sum' a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, llavors $d\alpha|_U = \sum' da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$.

(6.4.4) Sigui $F: M \rightarrow N$ una aplicació diferenciable. Si $\beta \in \Omega^\bullet(N)$,

$$F^*(d\beta) = dF^*(\beta).$$

(6.4.5) **Fórmula de Palais**

Siguin $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega \in \Omega^k(M)$.

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i \mathcal{L}_{X_i} \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) + \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k). \end{aligned}$$

(6.4.6) En particular, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\theta \in \Omega^1(M)$, llavors

$$d\theta(X, Y) = \mathcal{L}_X \langle \theta, Y \rangle - \mathcal{L}_Y \langle \theta, X \rangle - \langle \theta, [X, Y] \rangle.$$

(6.4.7) Per a qualsevol $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$, $d(d\alpha) = 0$:

$$d \circ d = 0.$$

(6.4.8) Una forma diferencial β es diu:

- **tancada** si $d\beta = 0$;
- **exacta** si existeix una forma diferencial α tal que $\beta = d\alpha$.

La propietat $d^2 = 0$ significa que β exacta $\implies \beta$ tancada. L'enunciat recíproc és cert localment:

(6.4.9) **Lema de Poincaré**

Sigui M una varietat, $U \subset M$ un obert difeomorf a \mathbf{R}^m (o a un obert estrellat de \mathbf{R}^m). Per a $k \geq 1$, si $\beta \in \Omega^k(U)$ és tancada, llavors existeix $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ tal que $\beta = d\alpha$.

En altres paraules, tota k -forma diferencial tancada (amb $k \geq 1$) és localment exacta.

(6.4.10) Siguin

$$Z^k(M) = \{\beta \in \Omega^k(M) \mid \beta \text{ tancada}\} = \Omega^k(M) \cap \text{Ker } d,$$

$$B^k(M) = \{\beta \in \Omega^k(M) \mid \beta \text{ exacta}\} = \Omega^k(M) \cap \text{Im } d.$$

La mesura en què les formes tancades poden no ser exactes ve donada pels **espais de cohomologia de de Rham**

$$H^k(M) = Z^k(M) / B^k(M).$$

El producte exterior de formes diferencials indueix un producte en $H^\bullet(M) = \bigoplus_{k=0}^m H^k(M)$. És l'àlgebra de cohomologia de de Rham. A conseqüència del teorema de de Rham, aquests espais només depenen de la topologia de la varietat.

(6.4.11) Es pot definir la diferencial exterior d'una forma diferencial de classe C^1 (en una varietat de classe C^2). La diferencial d'una forma diferencial de classe C^r és de classe C^{r-1} . La prova de la fórmula $d(d\alpha) = 0$ requereix α de classe C^2 .

6.5 Derivada de Lie de camps tensorials

(6.5.1) Sigui $X \in \mathfrak{X}(M)$, i $F: \mathcal{D} \rightarrow M$ el seu flux. Sigui $R \in \mathcal{T}_\ell^k(M)$ un camp tensorial. Generalitzant la definició de derivada de Lie de funcions i de camps vectorials, i amb les mateixes precaucions que en aquells casos, podem definir la **derivada de Lie** de R respecte a X , que és el camp tensorial $\mathcal{L}_X R \in \mathcal{T}_\ell^k(M)$ definit, en cada punt $p \in M$, per

$$\mathcal{L}_X R(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F^{t*}(R)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F^{t*}(R)(p) - R(p)}{t} \in \text{Tens}_\ell^k(T_p M).$$

També escriurem aquesta expressió, de manera poc correcta,

$$\mathcal{L}_X R = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F^{t*}(R).$$

(6.5.2) En el cas particular de $\theta \in \mathcal{T}_1(M)$, la derivada de Lie $\mathcal{L}_X \theta$ està definida per

$$\langle \mathcal{L}_X \theta, Y \rangle = \mathcal{L}_X \langle \theta, Y \rangle - \langle \theta, \mathcal{L}_X Y \rangle;$$

més particularment,

$$\mathcal{L}_X df = d\mathcal{L}_X f.$$

Es compleix que

$$\mathcal{L}_X(f\theta) = (\mathcal{L}_X f)\theta + f\mathcal{L}_X\theta.$$

En coordenades, si $\theta|_U = \theta_i dx^i$ i $X|_U = X^i \partial / \partial x^i$, llavors es pot calcular $(\mathcal{L}_X \theta)|_U = \left(X^j \frac{\partial \theta_i}{\partial x^j} + \theta_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) dx^i$.

(6.5.3) Siguin $D_0^0: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$, $D_0^1: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ aplicacions \mathbf{R} -lineals tals que D_0^0 sobre les funcions és una derivació, i $D_0^1(fY) = (D_0^0 f)Y + f(D_0^1 Y)$. Llavors D_0^0 , D_0^1 s'estenen a una única aplicació $D: \mathcal{T}_\bullet(M) \rightarrow \mathcal{T}_\bullet(M)$ que compleix les propietats següents:

- És \mathbf{R} -lineal.
- $D(R \otimes S) = (DR) \otimes S + R \otimes (DS)$.
- D aplica $\mathcal{T}_\ell^k(M)$ en $\mathcal{T}_\ell^k(M)$.
- Per a qualsevol contracció interior c_j^i , $D c_j^i(R) = c_j^i(DR)$.

És a dir, D és una derivació de la \mathbf{R} -àlgebra $\mathcal{F}^\bullet(M)$, de grau $(0, 0)$, que commuta amb les contraccions interiors.

L'operador D obtingut d'aquesta manera és local.

La commutació amb les contraccions interiors dona en particular $D\langle\theta, Y\rangle = \langle D\theta, Y\rangle + \langle\theta, DY\rangle$ si $\theta \in \Omega^1(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

(6.5.4) Aquestes propietats permeten calcular D sobre qualsevol camp tensorial, i per exemple es compleix

$$(DR)(\theta_1, \dots, \theta_k, X_1, \dots, X_\ell) = D(R(\theta_1, \dots, \theta_k, X_1, \dots, X_\ell)) - \sum_i R(\dots, D\theta_i, \dots) - \sum_j R(\dots, DX_j, \dots).$$

(6.5.5) El teorema anterior, aplicat a $D = \mathcal{L}_X$, derivada de Lie actuant sobre funcions i camps vectorials, permet obtenir una derivació \mathcal{L}_X actuant sobre camps tensorials. Aquesta derivació coincideix amb la derivada de Lie \mathcal{L}_X definida anteriorment, al principi d'aquesta secció, ja que aquesta compleix les hipòtesis del teorema anterior.

Hi ha altres casos d'aplicació, singularment a $D = \nabla_X$, la derivada covariant definida per una *connexió* (tema 8).

(6.5.6) El coneixement de la derivada de Lie \mathcal{L}_X actuant sobre funcions, camps vectorials, i 1-formes diferencials, juntament amb la propietat de derivació, permet calcular en coordenades la derivada de Lie $\mathcal{L}_X R$ d'un camp tensorial qualsevol.

Per exemple, si $X = X^i \partial/\partial x^i$, $R = R_{ij} dx^i \otimes dx^j$, llavors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X R &= (\mathcal{L}_X R_{ij}) dx^i \otimes dx^j + R_{ij} (\mathcal{L}_X dx^i) \otimes dx^j + R_{ij} dx^i \otimes (\mathcal{L}_X dx^j) \\ &= (\mathcal{L}_X R_{ij}) dx^i \otimes dx^j + R_{ij} dX^i \otimes dx^j + R_{ij} dx^i \otimes dX^j \\ &= \left(\frac{\partial R_{ij}}{\partial x^k} X^k + R_{kj} \frac{\partial X^k}{\partial x^i} + R_{ik} \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) dx^i \otimes dx^j. \end{aligned}$$

(6.5.7) $\mathcal{L}_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$.

(6.5.8) Un camp tensorial R es diu *invariant* per un difeomorfisme $H: M \rightarrow M$ quan $H_*(R) = R$.

(6.5.9) Sigui X un camp vectorial en M . Un camp tensorial R en M és *invariant* per X si és invariant pel flux F_X^t de X , és a dir, $F_X^{t*}(R) = R$.

(6.5.10) $\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} F^{t*}(R) = F^{t_0*}(\mathcal{L}_X R)$.

(6.5.11) R és invariant per X sii $\mathcal{L}_X R = 0$.

(6.5.12) Si $H: M \rightarrow N$ és un difeomorfisme,

$$H_*(\mathcal{L}_X R) = \mathcal{L}_{H_*(X)} H_*(R).$$

6.6 Derivada de Lie de formes diferencials

(6.6.1) La derivada de Lie d'un camp tensorial covariant o contravariant que sigui simètric o antisimètric té el mateix tipus de simetria.

En particular, la derivada de Lie \mathcal{L}_X aplica formes diferencials en formes diferencials.

(6.6.2) Es compleix a més que

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta).$$

Per tant l'aplicació $\mathcal{L}_X: \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ és una derivació de grau 0.

(6.6.3) Si α és una k -forma diferencial,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \alpha)(X_1, \dots, X_k) = \\ \mathcal{L}_X(\alpha(X_1, \dots, X_k)) - \sum_i \alpha(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k). \end{aligned}$$

(6.6.4) $\mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X = i_{[X, Y]}$.

(6.6.5) La derivada de Lie commuta amb la diferencial exterior:

$$d \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X \circ d.$$

(6.6.6) **Fórmula de Cartan**

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X.$$

(6.6.7) Si $D: \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ és una derivació de grau 0 que commuta amb d , llavors és la derivada de Lie \mathcal{L}_X respecte a un camp vectorial.

7 Distribucions tangents

Si M és una varietat diferenciable, anomenarem **camp vectorial local** en M un camp vectorial definit en un subconjunt obert de M . Representarem per $\mathfrak{X}_{\text{loc}}(M)$ el conjunt dels camps vectorials locals diferenciables de M . Aquest conjunt té propietats anàlogues a les de $\mathfrak{X}(M)$, però cal tenir en compte que les operacions de suma o parèntesi de Lie de camps vectorials locals només es poden realitzar en el domini comú dels operands. Semblantment, la multiplicació d'un camp vectorial local X per una **funció local** $f \in \mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty(M)$ dona un camp vectorial local fX definit en el seu domini comú.

L'àmbit teòric apropiat per a treballar amb objectes definits localment és la *teoria de feixos*. Tanmateix, per tal d'evitar un llenguatge excessivament tècnic, direm, per abús de llenguatge, que $\mathfrak{X}_{\text{loc}}(M)$ és un $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty(M)$ -mòdul. Si $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}_{\text{loc}}(M)$ és un conjunt arbitrari de camps vectorials locals diferenciables, representarem per $\langle \mathcal{V} \rangle$ el $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty(M)$ -mòdul que generen. Els seus elements són les combinacions lineals finites $\sum_i f_i X_i$, amb $f_i \in \mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty(M)$ i $X_i \in \mathfrak{X}_{\text{loc}}(M)$.

7.1 Distribucions tangents

En tota aquesta secció M és una varietat diferenciable (de dimensió m).

- (7.1.1) Una **distribució tangent** (o simplement **distribució**¹²) en M és un subconjunt $D \subset TM$ tal que, per a cada $p \in M$, $D_p = D \cap T_p M$ és un subespai vectorial de l'espai tangent $T_p M$. Podem escriure, doncs, $D = \coprod_{p \in M} D_p$. La dimensió $\dim D_p$ s'anomena *rang* de D en p .
- (7.1.2) Si $D \subset TM$ és una distribució tangent i $U \subset M$ una subvarietat oberta, aleshores s'obté una distribució tangent en U posant $D|_U = D \cap TU = \coprod_{p \in U} D_p \subset TU$.
- (7.1.3) Sigui D una distribució tangent en M . Diem que un camp vectorial local Y és una **secció local** de la distribució (o, més informalment, que *pertany* a la distribució) quan $Y(p) \in D_p$ per a tot punt p (del domini de Y).

¹²En podem dir *distribució* sempre que no hi hagi perill de confusió amb el concepte homònim de l'anàlisi: una *distribució* en una varietat M és una forma lineal contínua en l'espai $\mathcal{D}(M)$ de les funcions diferenciables amb suport compacte (dotat d'una topologia adequada).

És a dir, quan Y és una secció local de la projecció $\tau: D \rightarrow M$ que a cada vector de D li assigna el seu punt base.

Representem per

$$\text{Sec}_{\text{loc}}(D) = \{Y \in \mathfrak{X}_{\text{loc}}(M) \mid Y \text{ secció local diferenciable de } D\}.$$

el conjunt d'aquests camps vectorials que són *diferenciables*. És un $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty(M)$ -mòdul.

Notem en particular que $\text{Sec}_{\text{loc}}(TM) = \mathfrak{X}_{\text{loc}}(M)$.

(7.1.4) Sigui \mathcal{V} un conjunt arbitrari de camps vectorials locals en M . Genera una distribució tangent que denotarem $\text{Dist}(\mathcal{V}) \subset TM$: si $p \in M$,

$$\text{Dist}(\mathcal{V})_p = \langle X(p) \mid X \in \mathcal{V} \rangle \subset T_p M,$$

on el segon membre denota el subespai generat per tots els $X(p)$ (de fet, només pels corresponents als X que continguin el punt p en el seu domini).

$\text{Dist}(\mathcal{V})$ és la **distribució tangent generada** per \mathcal{V} .

(7.1.5) Es compleixen les inclusions següents:

- $\text{Dist}(\text{Sec}_{\text{loc}}(D)) \subset D$;
- Si els camps de \mathcal{V} són diferenciables, $\mathcal{V} \subset \text{Sec}_{\text{loc}}(\text{Dist}(\mathcal{V}))$.

(7.1.6) Una distribució tangent D es diu **diferenciable** quan és la distribució $D = \text{Dist}(\mathcal{V})$ generada per un cert conjunt de camps vectorials locals *diferenciables* $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}_{\text{loc}}(M)$.

(7.1.7) Una distribució tangent D és diferenciable sii està generada pel seu conjunt de seccions locals *diferenciables* $\text{Sec}_{\text{loc}}(D)$.

Es pot provar que, si D és diferenciable, llavors és localment finitogenerada: per a cada punt $p_0 \in M$ hi ha un veïnat obert U i un nombre *finit* de seccions diferenciables X_1, \dots, X_k (*generadors locals* de D) tals que

$$D|_U = \text{Dist}(\{X_1, \dots, X_k\}),$$

és a dir, que, per a tot $p \in U$, $D_p = \langle X_1(p), \dots, X_k(p) \rangle$.

(7.1.8) Una distribució tangent es diu **regular** en un punt quan és diferenciable i de rang constant en un veïnat del punt. Es diu **distribució regular** quan ho és en tot punt.

(7.1.9) Una distribució tangent $D \subset TM$ de rang r és regular sii es compleix la condició següent: per a cada $p_0 \in M$ hi ha un conjunt obert $U \ni p_0$ i r camps vectorials diferenciables X_i definits en U , *linealment independents*

en cada punt, tals que $D|_U = \text{Dist}(\{X_1, \dots, X_r\})$; és a dir, que, per a tot $p \in U$, $\{X_1(p), \dots, X_r(p)\}$ és una base de D_p .

(7.1.10) Amb les mateixes hipòtesis, si $Z \in \text{Sec}(D|_U)$ aleshores es pot escriure de manera única

$$Z = \sum_{i=1}^r \zeta^i X_i,$$

on les ζ^i són funcions diferenciables en U .

És a dir,

$$\text{Sec}(D|_U) = \langle X_1, \dots, X_r \rangle,$$

i de fet $\text{Sec}(D|_U)$ és un $\mathcal{C}^\infty(U)$ -mòdul lliure amb base $\{X_1, \dots, X_r\}$. Direm que (X_1, \dots, X_r) és una **referència local** de D .

La propietat de ser regular significa que $D \subset TM$ és un *subfibrat vectorial*, per la qual cosa una distribució tangent regular també s'anomena **subfibrat tangent**.

Qualsevol altra referència local (Y_j) de $D|_U$ està relacionada amb (X_i) per una matriu invertible amb coeficients funcions diferenciables:

$$Y_j = a_j^i X_i.$$

7.2 Distribucions integrables i distribucions involutives

A partir d'ara totes les distribucions tangents seran suposades diferenciables.

(7.2.1) Sigui $D \subset TM$ una distribució tangent. Una subvarietat immersa N de M es diu **varietat integral** de D quan, per a tot $p \in N$, es té

$$T_p N = D_p.$$

(Recordem que, si $j: N \hookrightarrow M$ és la immersió injectiva que defineix l'estructura de subvarietat immersa, identifiquem $T_p N$ amb el subespai imatge $T_{p,j} \cdot T_p N \subset T_{j(p)} M$.)

(7.2.2) Una distribució tangent D es diu **integrable** quan tot punt de M està contingut en alguna varietat integral de D .

(7.2.3) Les distribucions tangents de rang 0 i de rang m són trivialment integrables. Les seves varietats integrals són respectivament els subconjunts discrets i els subconjunts oberts de la varietat.

(7.2.4) Una distribució tangent diferenciable de rang 1 és sempre integrable. Això és conseqüència del teorema d'existència de solucions d'equacions diferencials.

(7.2.5) Si $\pi: M \rightarrow B$ és una submersió, llavors $\text{Ker } T\pi \subset TM$ és una distribució tangent integrable, i les seves fibres $\pi^{-1}(b) \subset M$ en són varietats integrals.

(7.2.6) Una distribució tangent D es diu **involutiva** quan ho és el seu conjunt de seccions locals diferenciables, és a dir:

$$X, Y \in \text{Sec}_{\text{loc}}(D) \implies [X, Y] \in \text{Sec}_{\text{loc}}(D).$$

Això equival a afirmar que $\text{Sec}_{\text{loc}}(D)$ és una **R**-àlgebra de Lie.

(7.2.7) Una distribució tangent integrable és sempre involutiva.

El principal objectiu d'aquest tema és donar, sota certes hipòtesis addicionals, un enunciat recíproc d'aquest.

(7.2.8) La involutivitat d'una distribució *regular* es pot determinar fàcilment. Suposem, per exemple, que $D = \text{Dist}(\{X_1, \dots, X_r\})$, amb (X_i) referència global de D . Aleshores D és involutiva sii, per a qualssevol índexs i, j ,

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k,$$

per a certes funcions c_{ij}^k .

7.3 Teorema de Frobenius

En tota aquesta secció M és una varietat diferenciable de dimensió m i $D \subset TM$ una distribució regular de rang r . Si (X_1, \dots, X_r) és una referència local de D sobre un conjunt obert $U \subset M$, escriurem, per abús de notació, $D|_U = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$.

(7.3.1) **Teorema de Frobenius**

Una distribució tangent *regular* és integrable sii és involutiva.

La implicació recíproca és conseqüència dels tres resultats següents.

(7.3.2) *Abelianització d'una referència local involutiva*

Si D és un involutiva, llavors pot generar-se localment per camps vectorials que commuten; és a dir, sobre conjunts oberts prou petits, $D|_U = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$, amb $[X_i, X_j] = 0$.

(7.3.3) El procediment per a abelianitzar és el següent.

Suposant que es parteix de $D|_U = \langle Y_1, \dots, Y_r \rangle$ amb $Y_k = B_k^i \partial/\partial x^i$, podem suposar, en un obert potser més petit, que la submatriu de B formada per les primeres

r files és invertible; llavors es pot escriure $D|_U = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$ amb una combinació lineal adequada $X_k = C_k^\ell Y_\ell$ que dona $X_k = \partial/\partial x^k + \sum_{i=r+1}^m A_k^i \partial/\partial x^i$; camps vectorials que commuten.

(7.3.4) *Redreçament simultani de camps vectorials que commuten*

Si r camps vectorials X_1, \dots, X_r linealment independents arreu commuten, llavors localment es poden redreçar simultàniament; és a dir, al voltant de cada punt hi ha coordenades (x^1, \dots, x^m) tals que, en un conjunt obert prou petit, $X_1 = \partial/\partial x^1, \dots, X_r = \partial/\partial x^r$.

(7.3.5) El procediment per a redreçar els X_i en p es pot resumir així.

Existeix un interval obert $I \ni 0$ i un conjunt obert $V \ni p$ prou petits tals que està definida l'aplicació

$$\psi: I^r \times V \rightarrow M, \quad \psi(t^1, \dots, t^r, q) = F_{X_r}^{t^r} \circ \dots \circ F_{X_1}^{t^1}(q),$$

on F_X^t és el flux de X a temps t . Sigui $M_o \subset V$ una subvarietat de dimensió $m - r$ que contingui p , i tal que $T_p M = \langle X_1(p), \dots, X_r(p) \rangle \oplus T_p M_o$. Aleshores la restricció $\psi_o: I^r \times M_o \rightarrow M$ és un difeomorfisme local en el punt $(0, \dots, 0; p)$, tal que $\partial/\partial t^i$ està ψ_o -relacionat amb X_i .

Restringint-la a subconjunts oberts més petits, s'obté un difeomorfisme ψ_o tal que $\psi_{o*}(\partial/\partial t^i) = X_i$.

Les coordenades t^i , juntament amb unes coordenades qualssevol en M_o , donen, a través d'aquest ψ_o , les coordenades desitjades en M .

(7.3.6) *Llesques integrals d'un conjunt de camps vectorials redreçats*

Sigui D una distribució tangent tal que $D|_U = \langle \partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^r \rangle$ en unes coordenades (x^1, \dots, x^m) . Aleshores, donades constants qualssevol $c^{r+1}, \dots, c^m \in \mathbf{R}$, les equacions

$$x^{r+1} = c^{r+1}, \dots, x^m = c^m$$

defineixen varietats integrals de D .

(7.3.7) El resultat final no només prova l'existència de varietats integrals per a un subfibrat tangent involutiu, sinó que també permet donar una descripció conjunta de totes les que tallen un obert prou petit: en un sistema de *coordenades distingides* per a D les varietats integrals es poden redreçar simultàniament.

També prova que, fixat un punt, hi ha localment una *única* varietat integral que el conté.

Observem, d'altra banda (i suposant M paracompacta), que si $N \subset M$ és una varietat integral *connexa* de D , llavors $N \cap U$ és en general la unió disjunta d'un conjunt numerable d'oberts de les llesques r -dimensionals anteriors.

(7.3.8) Per a una distribució tangent diferenciable de rang no constant la involutivitat no implica integrabilitat. Tanmateix, es poden donar altres condicions suficients d'integrabilitat (teoremes de Hermann, Nagano, Lobry, Matsuda i Sussmann).

(7.3.9) Per a una distribució tangent integrable D en M es pot definir un concepte anàleg al de corba integral maximal d'un camp vectorial.

Per cada $p \in M$ passa una única varietat integral *connexa* de D que és *maximal*, en el sentit que qualsevol altra està continguda en aquesta. Tals varietats integrals s'anomenen **varietats integrals maximals** de D , i en general no són subvarietats regulars, sinó subvarietats immerses.

(7.3.10) M és la unió disjunta de totes les varietats integrals maximals de D , les quals són les *fulles* d'una **foliació** de M .

Es pot dotar el conjunt M d'una topologia més fina, i d'una estructura diferenciable, on les fulles són subvarietats obertes. La varietat resultant, M_D , té en general una infinitat no numerable de components connextos, i l'aplicació identitat $M_D \rightarrow M$ és una immersió bijectiva.

Quan la distribució tangent és regular es diu que la foliació és regular: totes les fulles tenen la mateixa dimensió.

7.4 Aplicació: equacions en derivades parcials de primer ordre

(7.4.1) Sigui X un camp vectorial en M . Considerem l'equació en derivades parcials

$$\mathcal{L}_X u = 0,$$

on la incògnita és una funció definida en un obert de M . En un veïnat d'un *punt regular* de X existeix una carta (x^i) on X és un camp vectorial coordinat, $X = \partial/\partial x^1$. En aquest obert, les solucions de l'equació són les funcions qualssevol de la forma

$$u = f(x^2, \dots, x^m).$$

(7.4.2) Sigui ara $h: M \rightarrow \mathbf{R}$ una funció, i considerem l'equació lineal no homogènia

$$\mathcal{L}_X u = h.$$

Amb les mateixes hipòtesis que abans, un cop redreçat X una solució particular s'obté, en coordenades, integrant $u_\circ = \int dx^1 h(x^1, \dots, x^m)$; totes les altres solucions s'obtenen sumant-hi les solucions de l'equació homogènia associada $\mathcal{L}_X u = 0$.

(7.4.3) Considerem un sistema d'equacions en derivades parcials

$$\mathcal{L}_{X_i} u = 0,$$

on X_1, \dots, X_r són camps vectorials en M , linealment independents en cada punt.

Si $\langle X_1, \dots, X_r \rangle$ és una distribució involutiva llavors al voltant de tot punt hi ha coordenades locals (y^1, \dots, y^m) tals que $\langle X_1, \dots, X_r \rangle = \langle Y_1, \dots, Y_r \rangle$ on $Y_j = \partial/\partial y^j$. Per tant les solucions locals del sistema són les funcions de la forma

$$u = f(y^{r+1}, \dots, y^m).$$

Recíprocament, si al voltant de cada punt el sistema té $m - r$ solucions g^{r+1}, \dots, g^m amb diferencials linealment independents aleshores la distribució $\langle X_1, \dots, X_r \rangle$ és involutiva.

(7.4.4) Amb hipòtesis similars es pot analitzar el sistema no homogeni

$$\mathcal{L}_{X_i} u = h_i.$$

Suposant que els X_i generen una distribució regular involutiva, amb un canvi de base $Y_j = a_j^i X_i$ on els Y_j siguin camps vectorials coordenats s'obté el sistema $\mathcal{L}_{Y_j} u = h_i a_j^i$, que s'integra fàcilment com en el cas d'un sol camp vectorial.

(7.4.5) Considerem ara un sistema d'equacions en derivades parcials de la forma

$$\frac{\partial u^a}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^d) = A_i^a(x^1, \dots, x^d, u^1, \dots, u^n).$$

Ens demanem per l'existència d'una solució $u = f(x)$ definida en un veïnat obert de $x_o \in \mathbf{R}^d$ que prengui el valor $u_o = f(x_o) \in \mathbf{R}^n$.

Si existeix tal solució, com que les seves components f^a satisfan el teorema de Schwarz, l'ús de la regla de la cadena implica que s'ha de satisfer la condició d'integrabilitat

$$\frac{\partial A_i^a}{\partial x^j} + \frac{\partial A_j^a}{\partial u^b} A_j^b = \frac{\partial A_j^a}{\partial x^i} + \frac{\partial A_j^a}{\partial u^b} A_i^b \quad (i, j = 1 \dots d, a = 1 \dots n)$$

en un veïnat de (x_o, u_o) .

Recíprocament, si es compleix aquesta condició llavors en un veïnat de x_o existeix una única solució f de l'equació en derivades parcials satisfent $f(x_o) = u_o$.

El graf d'aquesta solució és precisament la varietat integral que conté el punt (x_o, u_o) de la distribució tangent en $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^n$ generada pels d camps vectorials

$\frac{\partial}{\partial x^i} + A_i^a \frac{\partial}{\partial u^a}$. La seva integrabilitat equival justament a la condició d'integrabilitat anterior.

7.5 Sistemes de Pfaff

Hi ha una caracterització «dual» dels subfibrats tangents involutius, i per tant un enunciat «dual» del teorema de Frobenius.

(7.5.1) Anomenem **codistribució** en M un subconjunt $C \subset T^*M$ tal que, per a cada $p \in M$, $C_p = C \cap T_p^*M$ és un subespai vectorial de l'espai cotangent T_p^*M . La dimensió $\dim C_p$ s'anomena *rang* de C en p .

Podem definir també el concepte de codistribució regular com aquella que és diferenciable i de rang constant.

(7.5.2) Si $D \subset TM$ és una distribució tangent, prenent el subespai *anihilador* (o anul·lador) en cada punt obtenim una codistribució $C = D^\circ \subset T^*M$, on

$$D_p^\circ = \{\alpha_p \in T_p^*M \mid (\forall u_p \in D_p) \langle \alpha_p, u_p \rangle = 0\}.$$

(7.5.3) Si D és regular llavors D° també ho és. Si $\text{rang}(D) = r$, $\text{rang}(D^\circ) = m - r$. Suposant $D|_U = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$, llavors $D^\circ|_{U'} = \langle \alpha^{r+1}, \dots, \alpha^m \rangle$, on les α^j són 1-formes diferenciables diferenciables en un obert eventualment més petit, linealment independents en cada punt, i tals que $\langle \alpha_j, X_i \rangle = 0$.

Això es pot expressar d'una altra manera: si $D \subset TM$ és un subfibrat vectorial, llavors $D^\circ \subset T^*M$ també ho és.

(7.5.4) En les mateixes condicions, afirmar que $\beta \in \text{Sec}_{\text{loc}}(D^\circ)$ equival a afirmar que $\langle \beta, X \rangle = 0$ per a tot $X \in \text{Sec}_{\text{loc}}(D)$. Afirmar que $Y \in \text{Sec}_{\text{loc}}(D)$ equival a afirmar que $\langle \alpha, Y \rangle = 0$ per a tot $\alpha \in \text{Sec}_{\text{loc}}(D^\circ)$.

(7.5.5) Afirmar que $j: N \hookrightarrow M$ és una varietat integral d'una distribució tangent regular D de rang r , equival a afirmar que

- $\dim N = r$ i
- $j^*(\alpha) = 0$ per a cada $\alpha \in \text{Sec}_{\text{loc}}(D^\circ)$.

Aquesta expressió s'anomena **sistema de Pfaff**.

Donada una base local $D^\circ|_U = \langle \alpha^{r+1}, \dots, \alpha^m \rangle$, el sistema s'expressa de forma equivalent com $j^*(\alpha^k) = 0$ per a $r+1 \leq k \leq m$.

(7.5.6) Una distribució tangent regular D és involutiva sii se satisfà la condició següent:

$$\alpha \in \Omega_{\text{loc}}^1(M) \text{ anihila } D \implies d\alpha \in \Omega_{\text{loc}}^2(M) \text{ anihila } D$$

(diem que $\omega \in \Omega_{\text{loc}}^2(M)$ anihila el subfibrat tangent D quan $\omega(X, Y) = 0$ per a $X, Y \in \text{Sec}_{\text{loc}}(D)$).

(7.5.7) Hi ha una interpretació algebraica d'aquest resultat. Si $\mathcal{I} \subset \Omega^\bullet(M)$ és l'ideal generat per $\text{Sec}(D^\circ)$, llavors D és involutiva sii \mathcal{I} és un *ideal diferencial*, és a dir, $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$.

(7.5.8) Suposem que D és una distribució tangent regular, amb $D^\circ|_U = \langle \alpha^{r+1}, \dots, \alpha^m \rangle$. Llavors D és involutiva (en U) sii es compleix el següent: al voltant de cada punt existeixen 1-formes diferencials β_ℓ^k tals que, per a cada k ,

$$d\alpha^k = \sum_{\ell} \alpha^\ell \wedge \beta_\ell^k.$$

(7.5.9) Amb les mateixes hipòtesis, D és involutiva (en U) sii, per a cada índex k ,

$$d\alpha^k \wedge \alpha^{r+1} \wedge \dots \wedge \alpha^m = 0.$$

(7.5.10) Notem que si D és involutiva i usem coordenades (x^1, \dots, x^m) tals que $D|_U = \langle \partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^r \rangle$, llavors $D^\circ|_U = \langle dx^{r+1}, \dots, dx^m \rangle$, la qual cosa evidencia que les varietats integrals de D (previstes pel teorema de Frobenius) s'expressen implícitament com $x^{r+1} = c^{r+1}, \dots, x^m = c^m$.

(7.5.11) En vista de la caracterització de les varietats integrals (7.5.5) es pot generalitzar el problema d'integració de la manera següent. Un *sistema diferencial exterior* ve donat per un ideal $\mathcal{I} \subset \Omega^\bullet(M)$. Una varietat integral del sistema és una varietat immersa $j: N \hookrightarrow M$ tal que $j^*(\alpha) = 0$ per a cada $\alpha \in \mathcal{I}$. El sistema es diu *sistema de Pfaff* si \mathcal{I} està generat per 1-formes diferencials.

D'acord amb el teorema de Frobenius, un sistema de Pfaff \mathcal{I} en M generat localment per $m-r$ 1-formes diferencials linealment independents té varietats integrals de dimensió r per qualsevol punt sii \mathcal{I} és un *ideal diferencial*, és a dir, $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$.

El cas general donat per un ideal diferencial \mathcal{I} qualsevol és força més complicat.

7.6 Distribucions tangents no integrables

Les distribucions no integrables tenen una gran importància en algunes aplicacions, com ara la teoria de control.

- (7.6.1) Considerem per exemple una família arbitrària $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}_{\text{loc}}(M)$ de camps vectorials diferenciables en una varietat M . Donat un punt $p \in M$, anomenem *òrbita* de p respecte a \mathcal{V} el conjunt dels punts assolits aplicant els fluxos dels $X \in \mathcal{V}$ a p :

$$\mathcal{O}_p = \{F_{X_k}^{t_k} \circ \dots \circ F_{X_1}^{t_1}(p) \mid k \in \mathbf{N}^*, t_i \in \mathbf{R}, X_i \in \mathcal{V}\},$$

en el benentès que els fluxos estiguin definits en els punts on s'apliquen.

- (7.6.2) El *teorema de l'òrbita* assegura, sense més hipòtesis, que, de forma natural, aquest conjunt és sempre una subvarietat immersa connexa. També en dona una descripció de l'espai tangent en un punt q : és l'espai vectorial generat per tots els $\Phi_*(X)_q$ on els $X \in \mathcal{V}$ i els Φ són tots els difeomorfismes que apareixen dins la definició de \mathcal{O}_p .

Les òrbites fan una partició de M , però notem que poden tenir dimensions variades i més grans que la dimensió de la distribució generada per \mathcal{V} .

- (7.6.3) A partir del teorema de l'òrbita es pot provar el *teorema de Chow–Rashevski*: en una varietat connexa, si els parèntesis de Lie successius dels camps vectorials de \mathcal{V} generen en cada punt tot l'espai tangent, llavors existeix una sola òrbita, a saber, tota la varietat.

8 Connexions

8.1 Connexions en una varietat

Hi ha un nombre sorprenentment elevat de maneres de definir una connexió. Ho farem en termes de la derivació covariant.

- (8.1.1) Sigui M una varietat diferenciable, $\mathfrak{X}(M)$ el $\mathcal{C}^\infty(M)$ -mòdul dels seus camps vectorials diferenciables. Una **connexió**¹³ (o, més pròpiament, una **derivació covariant**) en M és una aplicació

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

que satisfà les propietats següents:

- i) $\nabla_X Y$ és \mathbf{R} -lineal en Y ,
- ii) $\nabla_X Y$ és $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal en X ,
- iii) donada $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\nabla_X(fY) = (\mathcal{L}_X f)Y + f(\nabla_X Y)$.

Es diu que $\nabla_X Y$ és la **derivada covariant** de Y respecte a X .

- (8.1.2) $(\nabla_X Y)(p)$ només depèn de:

- el valor de X en p ;
- el valor de Y en un veïnat qualsevol de p .

D'acord amb la primera d'elles, està ben definit $\nabla_u Y$ per a $u \in TM$ un vector tangent qualsevol.

- (8.1.3) Sigui ∇ una connexió en M , i sigui $U \subset M$ un conjunt obert. Existeix una connexió ∇^U en U definida per la propietat següent: si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla^U_{X|_U} Y|_U = (\nabla_X Y)|_U$.

La definició es pot fer així. Donats camps vectorials X', Y' en U i un punt $p \in U$, siguin X, Y camps vectorials en M que coincideixen amb X', Y' en un veïnat de p . Llavors es defineix $(\nabla^U_{X'} Y')(p) = (\nabla_X Y)(p)$.

Sovint ometrem el superíndex i escriurem simplement $\nabla_{X'} Y'$.

- (8.1.4) Sigui (U, φ) una carta de M . Els camps vectorials coordenats $\partial/\partial x^i$ defineixen una base de $\mathfrak{X}(U)$, i per tant es pot escriure

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Les funcions $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(U)$ s'anomenen **símbols de Christoffel** de la connexió ∇ relatius a la base $\partial/\partial x^i$ (o a la carta (U, φ)).

¹³O **connexió afí**, per a distingir-ho d'altres conceptes de connexió.

Més generalment, sigui U un conjunt obert tal que el mòdul $\mathfrak{X}(U)$ té una base de camps vectorials (E_i) , no necessàriament camps coordenats. Llavors també es pot escriure

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k,$$

per a certes funcions Γ_{ij}^k que també anomenarem símbols de Christoffel.

- (8.1.5) Signi M una varietat paral·lelitzable, de manera que el mòdul $\mathfrak{X}(M)$ té una base de camps vectorials (E_i) . Fixada aquesta base, hi ha una bijecció entre el conjunt de les connexions ∇ en M i el conjunt de les famílies de funcions diferenciables (Γ_{ij}^k) : una connexió té associats els símbols de Christoffel, i, recíprocament, donades unes funcions (Γ_{ij}^k) la fórmula

$$\nabla_X Y = (\mathcal{L}_X g^k + \Gamma_{ij}^k f^i g^j) E_k$$

per a $X = f^i E_i$ i $Y = g^j E_j$ camps vectorials diferenciables en M , defineix una connexió.

Dit altrament, els símbols de Christoffel determinen la connexió, en el sentit que permeten calcular la derivada covariant en l'obert on estan definits.

- (8.1.6) *La connexió estàndard de \mathbf{R}^n*

La **connexió estàndard** de \mathbf{R}^n és aquella on els símbols de Christoffel en el sistema de coordenades canònic valen zero, $\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0$.

- (8.1.7) Signi M una varietat i ∇ una connexió en M . Siguin (x^i) , (\bar{x}^α) dos sistemes de coordenades sobre un conjunt obert de M , i siguin Γ_{ij}^k , $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ els respectius símbols de Christoffel. Llavors

$$\Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\gamma} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\delta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\delta}.$$

- (8.1.8) Una connexió *no* equival a un camp tensorial, els símbols de Christoffel *no* són els components d'un camp tensorial, i no té sentit dir que una connexió és nul·la. Les connexions formen un espai afí, no pas un espai vectorial.

- (8.1.9) Siguin ∇^α connexions en una varietat, λ_α una família de funcions diferenciables tals que els seus suports formen un conjunt localment finit. Llavors $\nabla = \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla^\alpha$, entesa com $\nabla_X Y = \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla_X^\alpha Y$, és una connexió sii $\sum \lambda_\alpha = 1$.

- (8.1.10) Tota varietat diferenciable paracompacta té una connexió.

Recíprocament, es pot provar que l'existència d'una connexió implica que la varietat és paracompacta.

8.2 Derivació covariant de camps tensorials

En aquest apartat M és una varietat diferenciable i ∇ una connexió en M .

(8.2.1) Sigui X un camp vectorial diferenciable en M . Existeix una única aplicació $\nabla_X: \mathcal{T}_\bullet(M) \rightarrow \mathcal{T}_\bullet(M)$ de l'àlgebra dels camps tensorials diferenciables en ella mateixa tal que sobre funcions coincideix amb \mathcal{L}_X , sobre camps vectorials coincideix amb ∇_X , i satisfà les propietats següents:

- i) És \mathbf{R} -lineal.
- ii) Aplica $\mathcal{T}_\ell^k(M)$ en $\mathcal{T}_\ell^k(M)$.
- iii) $\nabla_X(S \otimes T) = (\nabla_X S) \otimes T + S \otimes (\nabla_X T)$.
- iv) Commuta amb les contraccions interiors

Aquestes propietats signifiquen que ∇_X és una derivació de la \mathbf{R} -àlgebra $\mathcal{T}_\bullet(M)$, de grau $(0, 0)$, que commuta amb les contraccions interiors.

(8.2.2) Es diu que $\nabla_X: \mathcal{T}_\bullet(M) \rightarrow \mathcal{T}_\bullet(M)$ és la **derivació covariant** definida per la connexió.

(8.2.3) El valor de $(\nabla_X T)(p)$ només depèn de $X(p)$ i del valor de T en un veïnat de p . Per tant, la derivació covariant també es pot aplicar a camps tensorials definits en un conjunt obert $U \subset M$.

(8.2.4) Les propietats anteriors permeten calcular ∇_X sobre qualsevol camp tensorial diferenciable a partir del seu coneixement sobre funcions i camps vectorials, i per exemple si $\alpha \in \mathcal{T}_1(M) = \Omega^1(M)$

$$\langle \nabla_X \alpha, Y \rangle = \nabla_X \langle \alpha, Y \rangle - \langle \alpha, \nabla_X Y \rangle.$$

Més particularment,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^j = -\Gamma_{ik}^j dx^k.$$

(8.2.5) En coordenades, suposem que s'escriu

$$Y = Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}.$$

Llavors $\nabla_Y T = S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes \partial/\partial x^{i_1} \otimes \dots \otimes \partial/\partial x^{i_r}$, essent

$$S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = Y^k \left(\partial_k T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{n=1}^r T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots \ell \dots i_r} \Gamma_{k\ell}^{i_n} - \sum_{n=1}^s T_{j_1 \dots \ell \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{k j_n}^\ell \right).$$

En aquests sumatoris explícits, l'índex ℓ es troba en el lloc n -èsim dintre els índexs contravariants o covariants de T , respectivament.

(8.2.6) Donat un camp tensorial $T \in \mathcal{F}_s^r(M)$, l'aplicació ∇T definida per

$$(\nabla T)(X_1, \dots, X_s, Y, \omega^1, \dots, \omega^r) = (\nabla_Y T)(X_1, \dots, X_s, \omega^1, \dots, \omega^r)$$

defineix un camp tensorial $\nabla T \in \mathcal{F}_{s+1}^r(M)$, anomenat **diferencial covariant** de T .

És habitual expressar ∇T en components com

$$\nabla T = T_{j_1 \dots j_s; k}^{i_1 \dots i_r} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}},$$

essent

$$T_{j_1 \dots j_s; k}^{i_1 \dots i_r} = \partial_k T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{n=1}^r T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots \ell \dots i_r} \Gamma_{k\ell}^{i_n} - \sum_{n=1}^s T_{j_1 \dots \ell \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{k j_n}^\ell.$$

Si f és una funció, $\nabla f = df$.

8.3 Derivació covariant al llarg de camins

En aquest apartat M és una varietat diferenciable i ∇ una connexió en M .

(8.3.1) Recordem que un **camp vectorial al llarg d'una aplicació** $F: N \rightarrow M$ és una aplicació $Z: N \rightarrow TM$ tal que, per a tot $q \in N$, $Z(q) \in T_{F(q)}M$. És a dir, $\tau_M \circ Z = F$.

Els camps vectorials al llarg de F diferenciables constitueixen un $\mathcal{C}^\infty(N)$ -mòdul que podem denotar per $\mathfrak{X}(F)$.

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, llavors $Z = X \circ F$ és un camp vectorial al llarg de F ; però en general no tot camp vectorial al llarg de F es pot definir així.

Ens interessarà particularment el cas d'un camí diferenciable $\gamma: I \rightarrow M$ i el $\mathcal{C}^\infty(I)$ -mòdul dels camps vectorials diferenciables al llarg de γ , $\mathfrak{X}(\gamma)$. Un dels seus elements destacats és la velocitat del camí, $\gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

(8.3.2) Donats camps vectorials $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, el valor de $(\nabla_X Y)(p)$ en un punt p depèn de $X(p)$ i del valor de Y en un veïnat de p . Però en realitat basta conèixer el valor de Y al llarg d'un camí γ tal que $\gamma'(0) = X(p)$. Efectivament, si $X = f^i \partial / \partial x^i$ i $Y = g^j \partial / \partial x^j$, hem calculat $\nabla_X Y = (\mathcal{L}_X g^k + \Gamma_{ij}^k f^i g^j) \partial / \partial x^k$, i això en el punt p requereix simplement conèixer $(\mathcal{L}_X g^k)(p) = D(g^k \circ \gamma)(0)$. Podem escriure doncs

$$\nabla_{\gamma'(t)} Y = \left(D(g^k \circ \gamma)(t) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) D\tilde{\gamma}^i(t) (g^j \circ \gamma)(t) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)},$$

essent $\tilde{\gamma}$ l'expressió local de γ .

(8.3.3) Signi $\gamma: I \rightarrow M$ un camí diferenciable. Aleshores existeix una única aplicació $\nabla_t: \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$ que compleix les propietats següents:

i) És \mathbf{R} -lineal.

ii) Si $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$, llavors

$$\nabla_t(f\mathbf{w}) = Df \mathbf{w} + f \nabla_t \mathbf{w}.$$

iii) Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_t(Y \circ \gamma)(t) = \nabla_{\gamma'(t)} Y.$$

(8.3.4) Diem que $\nabla_t \mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$ és la **derivada covariant** de \mathbf{w} **al llarg** de γ .

Altres possibles notacions: $\nabla_t \mathbf{w} = \nabla_t^\gamma \mathbf{w} = \nabla_{\gamma'(t)} \mathbf{w} = \nabla_{\frac{d}{dt}} \mathbf{w} = \frac{\nabla}{dt} \mathbf{w}$.

(8.3.5) Considerem una carta (U, φ) en M , tal que $\gamma(I) \subset U$. Llavors una base de $\mathfrak{X}(\gamma)$ està formada pels camps vectorials al llarg de γ definits pels camps vectorials coordenats: $\partial/\partial x^i \circ \gamma$.

Signi $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Es pot expressar $\mathbf{w} = w^i \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma$, on $w^i: I \rightarrow \mathbf{R}$. Escrivim també $\gamma' = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma$ (essent $(q^i(t))$ l'expressió local de $\gamma(t)$). Llavors

$$\nabla_t \mathbf{w} = \left(\dot{w}^k + (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \dot{q}^i w^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \circ \gamma.$$

(8.3.6) De manera anàloga al concepte de camp vectorial al llarg d'una aplicació, es defineix **camp tensorial de tipus (r, s) al llarg d'una aplicació** $F: N \rightarrow M$ com una aplicació $Z: N \rightarrow \text{Tens}_s^r(\text{TM})$ tal que, per a tot $q \in N$, $Z(q) \in \text{Tens}_s^r(\text{T}_{F(q)}M)$.

Els camps tensorials al llarg de F de tipus (r, s) diferenciables constitueixen un $\mathcal{C}^\infty(N)$ -mòdul que denotarem per $\mathcal{T}_s^r(F)$.

En una base coordenada apropiada $Z \in \mathcal{T}_s^r(F)$ s'expressa

$$Z|_V = Z_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (dx^{j_1} \circ F) \otimes \dots \otimes (dx^{j_s} \circ F) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \circ F \right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \circ F \right),$$

essent $Z_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}: V \rightarrow \mathbf{R}$ funcions diferenciables en un conjunt obert $V \subset N$.

Ens interessarà particularment el cas d'un camí diferenciable $\gamma: I \rightarrow M$ i els $\mathcal{C}^\infty(I)$ -mòduls dels camps tensorials diferenciables al llarg de γ , $\mathcal{T}_s^r(\gamma)$.

(8.3.7) La derivació covariant de camps tensorials diferenciables al llarg d'un camí $\gamma: I \rightarrow M$ es defineix tal com amb camps tensorials en M , i dona lloc a una derivació $\nabla_t: \mathcal{T}_\bullet^r(\gamma) \rightarrow \mathcal{T}_\bullet^r(\gamma)$ de la \mathbf{R} -àlgebra $\mathcal{T}_\bullet^r(\gamma)$, de grau $(0, 0)$, que

commuta amb les contraccions interiors, i que estén la derivació ordinària de $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ i la derivació covariant de $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

Si $Z \in \mathcal{T}_\bullet(\gamma)$, llavors $\nabla_t Z \in \mathcal{T}_\bullet(\gamma)$ s'anomena **derivada covariant de Z al llarg de γ** .

(8.3.8) Les propietats donades permeten calcular la derivada covariant de qualsevol camp tensorial al llarg de γ .

Per exemple, si $\alpha \in \Omega^1(\gamma)$ és una 1-forma diferencial al llarg de γ , i $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$, llavors

$$D\langle \alpha, \mathbf{w} \rangle = \langle \nabla_t \alpha, \mathbf{w} \rangle + \langle \alpha, \nabla_t \mathbf{w} \rangle.$$

En coordenades, si $\alpha = A_i dx^i \circ \gamma$,

$$\nabla_t \alpha = \left(\dot{A}_j - (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \dot{q}^i A_k \right) dx^j \circ \gamma.$$

8.4 Transport paral·lel i geodèsiques

En aquest apartat M és una varietat diferenciable i ∇ una connexió en M .

(8.4.1) Sigui $\gamma: I \rightarrow M$ un camí diferenciable. Un camp vectorial al llarg de γ diferenciable, $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$, es diu **paral·lel** si la seva derivada covariant al llarg de γ és nul·la,

$$\nabla_t \mathbf{w} = 0.$$

(8.4.2) Siguin $M, \nabla, \gamma: I \rightarrow M$ com abans. Donats $t_o \in I$ i $\mathbf{w}_o \in T_{\gamma(t_o)}M$, existeix un únic $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$ paral·lel tal que $\mathbf{w}(t_o) = \mathbf{w}_o$.

(8.4.3) Es diu que \mathbf{w} és el **transport paral·lel** del vector \mathbf{w}_o al llarg de γ (respecte a la connexió ∇).

(8.4.4) En coordenades l'equació del transport paral·lel té la forma

$$\dot{w}^k + (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \dot{q}^i w^j = 0,$$

i doncs és una equació lineal homogènia de primer ordre no autònoma per a $w(t)$.

(8.4.5) Amb les mateixes notacions, l'aplicació $T_{\gamma(t_o)}M \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$ definida per $\mathbf{w}_o \mapsto \mathbf{w}$ és lineal.

Si (\mathbf{e}_i) és una base de $T_{\gamma(t_o)}M$ i \mathbf{w}_i són els corresponents transports paral·lels, llavors:

- Per a tot $t \in I$, $(\mathbf{w}_i(t))$ és una base de $T_{\gamma(t)}M$.

- (\mathbf{w}_i) és una base del $\mathcal{C}^\infty(I)$ -mòdul $\mathfrak{X}(\gamma)$.

(8.4.6) Sigui $P_{t_0 t}: T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t)}M$ l'operador de transport paral·lel al llarg de γ . Donat qualsevol $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$,

$$\nabla_t \mathbf{w}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P_{t_0 t}^{-1} \cdot \mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(t_0)}{t - t_0},$$

de manera que el transport paral·lel determina la derivada covariant al llarg de γ .

(8.4.7) En una varietat diferenciable arbitrària no té sentit parlar de l'acceleració d'un camí com si fos un suposat «vector». Tanmateix, si disposem d'una connexió, podem obtenir una **acceleració** calculant la derivada covariant $\nabla_t \gamma'$, que és un camp vectorial al llarg de γ .

(8.4.8) Un camí diferenciable $\gamma: I \rightarrow M$ es diu **geodèsica** de la connexió ∇ si γ' és paral·lel al llarg de γ :

$$\nabla_t \gamma' = 0.$$

Si en coordenades γ s'expressa $(q^i(t))$, llavors γ és una geodèsica si satisfà l'equació diferencial de segon ordre

$$\ddot{q}^k + (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \dot{q}^i \dot{q}^j = 0.$$

(8.4.9) Donat un punt $v_p \in T_p M$, hi ha una única geodèsica maximal amb condició inicial v_p .

(8.4.10) Les geodèsiques de ∇ es corresponen amb les corbes integrals d'un cert camp vectorial S en TM , l'*esprai geodèsic* de ∇ (A.4.6).

(8.4.11) Sigui $\gamma: I \rightarrow M$ una geodèsica, i $\varphi: J \rightarrow I$ un difeomorfisme entre intervals oberts de \mathbf{R} . El camí reparametritzat $\gamma \circ \varphi$ és una geodèsica si φ és una afinitat.

(8.4.12) Un camp vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es diu **paral·lel** si és paral·lel al llarg de qualsevol camí diferenciable.

És el mateix dir que $\nabla_v Y = 0$ per a tot vector v , que $\nabla_X Y = 0$ per a tot camp vectorial X , o que $\nabla Y = 0$.

(8.4.13) Es defineix igualment el concepte de **camp tensorial paral·lel** al llarg d'un camí: $\nabla_t Z = 0$.

I el concepte de **camp tensorial paral·lel** $T \in \mathcal{T}^\bullet(M)$: $\nabla_v T = 0$ per a tot $v \in TM$, $\nabla_X T = 0$ per a tot camp vectorial X , o simplement $\nabla T = 0$.

(8.4.14) Encara que estem suposant que totes les aplicacions considerades són diferenciables, a vegades és necessari considerar camins diferenciables a trossos.

Considerem el cas d'un interval compacte no degenerat $I \subset \mathbf{R}$. Un camí $\gamma: I \rightarrow M$ es diu **de classe** C^k quan ho és la seva expressió local; això significa que les derivades d'ordre $\leq k$ d'aquesta, definides en l'*interior* de I , es poden prolongar per continuïtat a la frontera de I . També que γ admet una prolongació de classe C^k a un interval obert $J \supset I$.

Un camí $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ es diu **de classe** C^k **a trossos** (on $k \geq 1$) quan hi ha nombres $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ tals que la restricció de γ a cadascun dels subinterval·ls $[t_{i-1}, t_i]$ és de classe C^k .

En particular, si γ és de classe C^1 a trossos, $\gamma'(t)$ està definida en tot l'interval excepte en aquests punts t_i , on tanmateix hi existeixen els seus límits laterals.

- (8.4.15) Si $\gamma: I \rightarrow M$ és un camí de classe C^1 a trossos, es pot definir el transport paral·lel d'un vector al llarg de γ tot resolent l'equació $\nabla_t \mathbf{w} = 0$ en cadascun dels interval·ls $[t_{i-1}, t_i]$, i posant el valor final de $\mathbf{w}(t)$ en un interval com la condició inicial en l'interval següent.

De manera semblant podem considerar camins de classe C^2 a trossos que són concatenació de geodèsiques (per exemple, triangles geodèsics).

8.5 Torsió i curvatura d'una connexió

En aquest apartat M és una varietat diferenciable i ∇ una connexió en M .

- (8.5.1) L'aplicació $T: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definida per

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

és $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilineal (i antisimètrica), per tant equival a un camp tensorial $T \in \mathcal{T}_2^1(M)$, anomenat (per abús de llenguatge) **tensor de torsió** de la connexió.

- (8.5.2) Una connexió es diu **simètrica** o **sense torsió** quan la seva torsió és nul·la.

- (8.5.3) Considerem una referència local (E_i) de camps vectorials diferenciables, i sigui (E^i) la referència dual. Si Γ_{ij}^k són els corresponents símbols de Christoffel, i $[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k$, llavors

$$T = T_{ij}^k E^i \otimes E^j \otimes E_k, \quad \text{amb } T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k - c_{ij}^k.$$

Per tant ∇ és sense torsió sii en una referència *coordenada* els Γ_{ij}^k són simètrics en (i, j) .

(8.5.4) Dues connexions en M són iguals sii tenen les mateixes geodèsiques i la mateixa torsió.

Donada una connexió en M n'hi ha una altra, única, que té les mateixes geodèsiques i torsió nul·la.

(8.5.5) L'aplicació $R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definida per

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

és $\mathcal{C}^\infty(M)$ -trilineal (i antisimètrica en (X, Y)), per tant equival a un camp tensorial $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$, anomenat **tensor de curvatura** de la connexió.

(8.5.6) Considerem una referència local (E_i) de camps vectorials. Si Γ_{ij}^k són els corresponents símbols de Christoffel, i $[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k$, llavors

$$R = R_{ijk}^\ell E^i \otimes E^j \otimes E^k \otimes E_\ell,$$

$$\text{amb } R_{ijk}^\ell = \Gamma_{jk, i}^\ell - \Gamma_{ik, j}^\ell + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^\ell - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^\ell - c_{ij}^m \Gamma_{mk}^\ell.$$

(8.5.7) Si la torsió de ∇ és nul·la, llavors $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$ (identitat de Bianchi algebraica).

(8.5.8) Una connexió es diu **plana** si el seu tensor de curvatura és nul.

(8.5.9) Sigui una varietat dotada d'una connexió. Les condicions següents són equivalents:

- La connexió és plana.
- Al voltant de qualsevol punt hi ha una base de camps vectorials *coordenats* paral·lels.
- Dins un conjunt obert difeomorf a una bola, el transport paral·lel entre dos punts al llarg d'un camí que els uneix no depèn del camí triat.

9 Varietats pseudoriemannianes

9.1 Varietats pseudoriemannianes

(9.1.1) Sigui M una varietat diferenciable. Una **mètrica pseudoriemanniana** (o semiriemanniana) en M és un camp tensorial $g \in \mathcal{T}_2(M)$ 2-covariant, simètric i no-degenerat.

Aquestes dues darreres propietats signifiquen que, en cada $p \in M$, $g_p \in \mathbb{T}_p^*M \otimes \mathbb{T}_p^*M$ defineix una mètrica en l'espai tangent \mathbb{T}_pM , és a dir, una forma bilineal simètrica no-degenerada $g_p: \mathbb{T}_pM \times \mathbb{T}_pM \rightarrow \mathbf{R}$.

(9.1.2) Es diu **mètrica riemanniana** si g és definit positiu.

És a dir, si en cada punt g_p és un producte escalar en \mathbb{T}_pM .

(9.1.3) Una **mètrica lorentziana** és una mètrica de signatura $(1, m-1)$ (o $(m-1, 1)$).

(9.1.4) Una **varietat pseudoriemanniana** [**riemanniana**, **lorentziana**] és una varietat dotada d'una mètrica pseudoriemanniana [riemanniana, lorentziana].

(9.1.5) Algunes notacions:

- $(u_p|v_p) = g_p(u_p, v_p)$, essent $u_p, v_p \in \mathbb{T}_pM$.
- $\|v_p\| = \sqrt{(v_p|v_p)}$ si $(v_p|v_p) \geq 0$.
- $(X|Y) = g(X, Y): M \rightarrow \mathbf{R}$, essent $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Dos vectors $u, v \in \mathbb{T}_pM$ són ortogonals si $(u|v) = 0$.

Dos camps vectorials X, Y són *ortogonals* si ho són en tot punt, és a dir, si $(X|Y) = 0$.

En el cas riemannà també podem parlar de l'angle entre dos vectors no nuls $u, v \in \mathbb{T}_pM$: és un nombre θ tal que $\cos \theta = (u|v) / \|u\| \|v\|$.

(9.1.6) Expressió local en una carta (U, φ) . Si $g_{ij} = (\partial/\partial x^i | \partial/\partial x^j)$, llavors $g|_U = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. La matriu (g_{ij}) és en tot $p \in U$ simètrica no-degenerada (i definida positiva en el cas riemannà).

Més generalment, sigui (E_i) una base de camps vectorials en un obert U . Llavors $g|_U = g_{ij} E^i \otimes E^j$, essent $g_{ij} = (E_i|E_j)$, i (E^i) la base dual de (E_i) .

(9.1.7) *La mètrica estàndard de \mathbf{R}^n*

La **mètrica riemanniana estàndard** de \mathbf{R}^n és $g = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j$ en el

sistema de coordenades canònic.

(9.1.8) *L'espai de Minkowski*

L'espai de Minkowski és la varietat lorentziana donada per l'espai \mathbf{R}^n i la **mètrica de Minkowski**: $g = \eta_{ij} dx^i \otimes dx^j$, on $\eta = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ (o amb el signe oposat).

(9.1.9) Si $j: N \hookrightarrow M$ és una subvarietat immersa d'una varietat riemanniana amb mètrica g , llavors $j^*(g)$ és una mètrica riemanniana en N .

Aquest resultat pot ser fals si g és pseudoriemanniana.

(9.1.10) Una **isometria** [**isometria local**] entre dues varietats pseudoriemannianes (M_1, g_1) i (M_2, g_2) és un difeomorfisme [difeomorfisme local] $F: M_1 \rightarrow M_2$ tal que $F^*(g_2) = g_1$.

(9.1.11) Una isometria d'una varietat pseudoriemanniana (M, g) és un difeomorfisme de M en ella mateixa que deixa la mètrica invariant.

Una **isometria infinitesimal** o **camp de Killing** és un camp vectorial X en M tal que els difeomorfismes F^t definits pel seu flux són isometries.

(9.1.12) X és una isometria infinitesimal de (M, g) sii $\mathcal{L}_X g = 0$.

(9.1.13) Tota varietat diferenciable paracompacta admet una mètrica riemanniana.

(9.1.14) Es pot provar que una varietat paracompacta M admet una mètrica lorentziana sii hi existeix un camp vectorial diferenciable sense punts crítics. Suposant M connexa, això es compleix sii M és no compacta o bé té característica d'Euler-Poincaré nul·la.

9.2 Algunes construccions en varietats pseudoriemannianes

En aquest apartat (M, g) és una varietat pseudoriemanniana.

(9.2.1) La mètrica en cada punt $p \in M$ defineix un isomorfisme d'espais vectorials

$$\hat{g}_p: \mathbb{T}_p M \rightarrow \mathbb{T}_p^* M, \quad \langle \hat{g}_p(u_p), v_p \rangle = g(u_p, v_p).$$

Globalment això defineix un difeomorfisme

$$\hat{g}: \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}^*M,$$

que de fet és un isomorfisme de fibrats vectorials.

Aquest isomorfisme es trasllada als mòduls de seccions: l'aplicació

$$\mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M), \quad X \mapsto \hat{g} \circ X \equiv X^\flat$$

és un isomorfisme, amb invers $\theta \mapsto \hat{g}^{-1} \circ \theta \equiv \theta^\sharp$.

(9.2.2) En coordenades l'isomorfisme $\hat{g}: TM \rightarrow T^*M$ s'expressa $(x^i, v^i) \mapsto (x^i, v^i g_{ij}(x))$, i el seu invers $(x^i, \alpha_i) \mapsto (x^i, \alpha_i g^{ij}(x))$, essent (g^{ij}) la matriu inversa de (g_{ij}) : $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$.

És freqüent escriure per exemple $v_j = v^i g_{ij}$, etc. Aquest fet d'abaixar i apujar els índexs justifica la notació v^\flat , α^\sharp , i que aquests isomorfismes s'anomenin *isomorfismes musicals*.

(9.2.3) Més generalment, els isomorfismes musicals definits per una mètrica permeten abaixar o apujar índexs qualssevol en un camp tensorial. Els camps tensorials obtinguts d'aquesta manera a vegades són dits geomètricament equivalents.

(9.2.4) Donada una funció $f: M \rightarrow \mathbf{R}$, el **gradient** de f és el camp vectorial

$$\text{grad } f = \hat{g}^{-1} \circ \text{d}f.$$

Per tant, $(\text{grad } f | X) = \langle \text{d}f, X \rangle$.

En coordenades, $\text{grad } f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$.

(9.2.5) En una varietat pseudoriemanniana (M, g) existeix una mesura canònica v_g , anomenada **volum riemannianà**.

En el domini d'una carta (U, φ) , la integral d'una funció $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ ve donada en termes de la seva expressió local per

$$\int_U f \, dv_g = \int_{\varphi(U)} \tilde{f}(x^1, \dots, x^m) \sqrt{|\det(g_{ij})|} \, dx^1 \cdots dx^m,$$

on (g_{ij}) és la matriu de g en la carta donada.

(9.2.6) En el cas de ser M orientada aquesta mesura ve induïda per una forma de volum canònica Ω_g , també anomenada **forma de volum riemannianà**. En una carta corresponent a l'orientació de M s'expressa

$$\Omega_g = \sqrt{|\det(g_{ij})|} \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

9.3 La connexió de Levi-Civita

En aquest apartat (M, g) és una varietat pseudoriemanniana.

(9.3.1) Una connexió ∇ en M es diu **riemanniana** si la mètrica és un camp tensorial paral·lel, és a dir, $\nabla g = 0$.

Això també es pot expressar dient que $\nabla_X g = 0$ per a tot camp vectorial X , i també de la manera següent: per a qualssevol $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\mathcal{L}_X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

- (9.3.2) Que una connexió ∇ sigui riemanniana també equival al següent: donats un camí $\gamma: I \rightarrow M$ i $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$ qualssevol, es compleix

$$D(\mathbf{v}|\mathbf{w}) = (\nabla_t \mathbf{v} | \mathbf{w}) + (\mathbf{v} | \nabla_t \mathbf{w}).$$

En aquestes condicions, si \mathbf{v}, \mathbf{w} són paral·lels llavors $(\mathbf{v}|\mathbf{w})$ és constant, i doncs el transport paral·lel és una isometria.

En particular, si γ és una geodèsica llavors $(\gamma'|\gamma')$ és constant.

- (9.3.3) *Teorema fonamental de la geometria riemanniana*

En una varietat pseudoriemanniana existeix una única connexió riemanniana sense torsió.

Aquesta connexió està definida per la **fórmula de Koszul**:

$$2(\nabla_X Y | Z) = \mathcal{L}_X(Y|Z) + \mathcal{L}_Y(X|Z) - \mathcal{L}_Z(X|Y) + ([X, Y] | Z) + ([Z, X] | Y) + ([Z, Y] | X).$$

- (9.3.4) La connexió definida s'anomena **connexió de Levi-Civita** de (M, g) . Si no es diu el contrari, sempre que tinguem una varietat pseudoriemanniana la considerarem dotada de la connexió de Levi-Civita.

- (9.3.5) Donada una carta de M , en la corresponent base de camps vectorials coordenats, els símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita són

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right).$$

També s'escriuen $\Gamma_{ij}^k = g^{k\ell} [ij, \ell]$, on els $[ij, \ell] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right)$ s'anomenen *símbols de Christoffel de primera espècie*.

9.4 Subvarietats d'una varietat riemanniana

- (9.4.1) Sigui $j: M \hookrightarrow \widetilde{M}$ una subvarietat immersa d'una varietat riemanniana amb mètrica \tilde{g} i connexió de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$. Llavors $g = j^*(\tilde{g})$ és una mètrica riemanniana en M .

- (9.4.2) La inclusió permet identificar $T_p M$ com a subespai de $T_{j(p)} \widetilde{M}$ per a tot $p \in M$. Tenim una descomposició

$$T_{j(p)} \widetilde{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$$

en suma directa de subespais ortogonals. Amb ella doncs tot vector $w \in T_{j(p)}\widetilde{M}$ es descompon en suma $w = w^\top + w^\perp$ de part tangent més part normal.

- (9.4.3) Considerem dos camps vectorials X, Y en M . En un veïnat de cada punt $p \in M$ els podem estendre a camps vectorials definits en un obert de \widetilde{M} , i usar la connexió de \widetilde{M} per a calcular $\widetilde{\nabla}_X Y$; podem usar aquesta notació ja que el valor d'aquesta expressió en cada punt de M no depèn de les extensions usades.

Tenim doncs un camp vectorial $\widetilde{\nabla}_X Y: M \rightarrow T\widetilde{M}$ al llarg de la inclusió. Podem descompondre'l com a suma d'un camp vectorial tangent a M i un camp vectorial normal a M :

$$\widetilde{\nabla}_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top + (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp.$$

- (9.4.4) *La connexió de Levi-Civita d'una subvarietat*

L'expressió

$$\nabla_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top$$

defineix una connexió en M , que coincideix amb la connexió de Levi-Civita de g .

- (9.4.5) L'expressió

$$II(X, Y) = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp$$

és $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilineal i simètrica.

Per a cada punt $p \in M$ l'aplicació II defineix doncs una aplicació bilineal simètrica $T_p M \times T_p M \rightarrow (T_p M)^\perp$ anomenada **segona forma fonamental** de M .

Per definició tenim doncs la *fórmula de Gauss*:

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y).$$

Si N és un camp vectorial normal a M es compleix l'*equació de Weingarten*

$$(\widetilde{\nabla}_X N \mid Y) = -(N \mid II(X, Y)).$$

- (9.4.6) Suposem ara que M i \widetilde{M} són varietats *orientades* i que M és una *hipersuperfície* en \widetilde{M} . En aquest cas hi ha un únic camp vectorial normal unitari N en M tal que, si (X_1, \dots, X_m) és una base positiva de M ,¹⁴ (X_1, \dots, X_m, N) és una base positiva de \widetilde{M} .

¹⁴És a dir, per a cada $p \in M$, $(X_1(p), \dots, X_m(p))$ és una base positiva de l'espai vectorial orientat $T_p M$.

En aquestes condicions es pot reemplaçar la segona forma fonamental vectorial II per una **segona forma fonamental escalar**

$$h(X, Y) = (II(X, Y) | N),$$

de manera que $II(X, Y) = h(X, Y)N$. Hem definit doncs un camp tensorial 2-covariant simètric h en M .

Per a cada $p \in M$, associat a la forma quadràtica h_p a través de la mètrica g_p , hi ha un endomorfisme autoadjunt S_p en cada espai tangent T_pM , anomenat **endomorfisme de Weingarten** o **operador de forma**. Globalment és un camp tensorial $S \in \mathcal{T}_1^1(M)$. Per definició,

$$(S(X) | Y) = h(X, Y).$$

Els valors propis de S es diuen **curvatures principals**. El producte de totes elles s'anomena **curvatura gaussiana**: $K = \det(S)$, mentre que la seva mitjana aritmètica és la **curvatura mitjana**: $H = \frac{1}{m} \operatorname{tr}(S)$.

La teoria de les superfícies de \mathbf{R}^3 es pot continuar desenvolupant seguint les línies esbossades ...

- (9.4.7) Sigui M una varietat riemanniana i $C \subset M$ una corba connexa orientada. Es pot parametritzar C localment amb un camí $c: I \rightarrow M$ tal que $\|c'\| = 1$ (*paràmetre arc*) amb l'orientació de C . Sigui $\mathbf{t} = c' \in \mathfrak{X}(c)$ el vector tangent: per a cada $s \in I$ $\mathbf{t}(s)$ és una base positiva de $T_{c(s)}C$. Suposem que els vectors $(\mathbf{t}, \nabla_s \mathbf{t}, \dots, \nabla_s^{m-1} \mathbf{t})$ són linealment independents en un $s_0 \in I$. Aplicant-hi el procediment d'ortonormalització de Gram-Schmidt obtenim una base ortonormal $(\mathbf{f}_1(s), \dots, \mathbf{f}_m(s))$ de $T_{c(s)}M$ per a s en un veïnat de s_0 . És la **referència de Frenet**. Les derivades covariants d'aquests vectors són combinacions lineals d'ells mateixos amb uns coeficients dits curvatures: són les fórmules de Frenet–Serret. Etc.

- (9.4.8) *Teorema d'embedding de Nash*

Tota varietat riemanniana amb base numerable d'oberts és isomètrica a una subvarietat d'un \mathbf{R}^N .

9.5 Curvatura en una varietat pseudoriemanniana

En aquest apartat (M, g) és una varietat pseudoriemanniana.

- (9.5.1) *El tensor de Riemann*

Sigui R el tensor de curvatura de la connexió de Levi-Civita de g . El **tensor de curvatura de Riemann** és el camp tensorial $\operatorname{Rie} \in \mathcal{T}_4(M)$ obtingut

abaixant l'índex contravariant de R al darrer lloc:

$$\text{Rie}(X, Y, Z, W) = (R(X, Y)Z | W).$$

En una base de camps vectorials, $\text{Rie} = R_{ijkl}E^i \otimes \dots \otimes E^\ell$, on $R_{ijkl} = R_{ijk}^{\dots n} g_{n\ell}$.

Hi ha diversos convenis possibles en aquesta definició; per les simetries de Rie, el resultat final pot diferir en un signe.

(9.5.2) Una varietat riemanniana és **plana** si és localment isomètrica a l'espai euclidià.

(9.5.3) Una varietat riemanniana és plana sii la seva connexió de Levi-Civita és plana (és a dir, el seu tensor de curvatura és nul).

(9.5.4) *El tensor de Ricci*

El **tensor de curvatura de Ricci** és el camp tensorial $\text{Ric} \in \mathcal{T}_2(M)$ obtingut fent la contracció interior del primer índex covariant de R amb el seu índex contravariant:

$$\text{Ric} = c_1^1(R).$$

En una base de camps vectorials, $\text{Ric} = R_{jk}E^j \otimes E^k$, on $R_{jk} = R_{ijk}^i$.

Aquí també hi ha diversos convenis possibles en la definició, que poden produir canvis de signe.

(9.5.5) *La curvatura escalar*

La **curvatura escalar** és la funció $S \in \mathcal{C}^\infty(M)$ obtinguda fent la traça del tensor de Ricci:

$$S = \text{tr}_g(\text{Ric}) = \text{tr}(\text{Ric}^\sharp).$$

En coordenades, $S = R_k^k = g^{kj} R_{jk}$.

(9.5.6) En el cas d'una superfície els tensors esmentats tenen un sol component independent que és, essencialment, la curvatura gaussiana de la superfície. De fet, el *theorem egregium* és conseqüència de la fórmula $K = \frac{\text{Rie}(X, Y, Y, X)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - (X|Y)^2}$ per a (X, Y) una base arbitrària de l'espai tangent. La curvatura escalar és $S = 2K$.

9.6 Distància en una varietat riemanniana

(9.6.1) Sigui M una varietat pseudoriemanniana, $\gamma: I \rightarrow M$ un camí de classe C^1 a trossos i tal que $(\gamma'|\gamma') \geq 0$. La **longitud** (o *llargada*) de γ és

$$\ell(\gamma) = \int_I \|\gamma'\|.$$

La longitud és invariant per reparametritzacions: si $\varphi: J \rightarrow I$ és un difeomorfisme entre intervals oberts de \mathbf{R} , $\ell(\gamma \circ \varphi) = \ell(\gamma)$.

(9.6.2) Sigui M una varietat riemanniana *connexa*. Donats $p, q \in M$, sigui

$$d(p, q) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ camí } C^1 \text{ a trossos de } p \text{ a } q\}$$

(9.6.3) L'aplicació d és una distància que defineix la topologia de M .

S'anomena la **distància riemanniana** de M .

(9.6.4) Sigui M una varietat diferenciable connexa, però no necessàriament para-compacta. Les condicions següents són equivalents:

- M admet una mètrica riemanniana.
- M és metrizable.
- M té base numerable d'oberts.
- M és paracompacta.

(9.6.5) Una varietat riemanniana connexa es diu **geodèsicament completa** si les seves geodèsiques estan definides en tot \mathbf{R} .

(9.6.6) *Teorema de Hopf-Rinow*

Sigui M una varietat riemanniana connexa, d la seva distància riemanniana. Les condicions següents són equivalents:

- Els conjunts tancats i fitats (per d) són compactes.
- L'espai mètric M és complet.
- M és geodèsicament completa.

En aquestes condicions, donats $p, q \in M$ existeix una geodèsica que els uneix, de longitud $d(p, q)$.

10 Varietats simplèctiques

10.1 Varietats simplèctiques. Teorema de Darboux

(10.1.1) Sigui M una varietat diferenciable. Una **forma simplèctica** en M és una 2-forma diferencial $\omega \in \Omega^2(M)$ tancada ($d\omega = 0$) i no-degenerada.

Per a cada $p \in M$, $\omega_p \in \Lambda^2 T_p^*M$ defineix una forma bilineal alternada en T_pM , $\omega_p: T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbf{R}$. Que sigui no-degenerada significa que l'aplicació lineal $\widehat{\omega}_p: T_pM \rightarrow T_p^*M$ deduïda, $\widehat{\omega}_p(u_p) = \omega_p(u_p, \cdot)$, és un isomorfisme

(10.1.2) Una **varietat simplèctica** és una varietat dotada d'una forma simplèctica.

(10.1.3) Una forma simplèctica ω és localment exacta. Quan ho és globalment, es diu que la varietat simplèctica és **exacta**. Si $\omega = d\theta$, es diu que θ és un **potencial simplèctic** de ω .

(10.1.4) Sigui (M, ω) una varietat simplèctica. Aleshores:

- $\dim M$ és parella, $m = 2n$.
- L'aplicació $\widehat{\omega}: TM \rightarrow T^*M$, $v \mapsto i_v\omega$, és un isomorfisme de fibrats vectorials.
- L'aplicació $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$, $X \mapsto i_X\omega = \widehat{\omega} \circ X$, és un isomorfisme de $\mathcal{C}^\infty(M)$ -mòduls.
- M és orientable.

Com a forma de volum es pot prendre $\Omega = \omega \wedge \dots \wedge \omega$, o també $\Omega = \frac{1}{n!} \omega^{\wedge n}$, o fins i tot $\Omega = (-1)^{[n/2]} \frac{1}{n!} \omega^{\wedge n}$.

(10.1.5) \mathbf{R}^{2n} té una forma simplèctica canònica,

$$\omega = dx^1 \wedge dx^{n+1} + dx^2 \wedge dx^{n+2} + \dots + dx^n \wedge dx^{2n},$$

o també $\omega = dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 + \dots + dx^{2n-1} \wedge dx^{2n}$.

(10.1.6) Si N és una varietat diferenciable qualsevol, el seu fibrat cotangent T^*N està dotat d'una forma simplèctica canònica, $\omega_N = -d\theta_N$.

(10.1.7) Sigui (U, φ) una carta de M , amb funcions coordenades $\varphi = (z^1, \dots, z^m)$. Si $\omega_{ij} = \omega(\partial/\partial z^i, \partial/\partial z^j)$, llavors $\omega|_U = \frac{1}{2} \omega_{ij} dz^i \wedge dz^j$. La matriu (ω_{ij}) és en tot punt antisimètrica i no-degenerada.

Si $X = f^i \partial/\partial z^i$, $i_X\omega = f^i \omega_{ij} dz^j$.

En les coordenades naturals corresponents dels fibrats tangent i cotangent, l'expressió local de $\widehat{\omega}$ és $\widehat{\omega}(z^i, u^i) = (z^i, u^i \omega_{ij})$.

(10.1.8) **Teorema de Darboux**

Signi (M, ω) una varietat simplèctica de dimensió $2n$. Per a tot punt $p \in M$ existeix una carta $(U, (x^i, y_i))$ en p tal que

$$\omega|_U = dx^i \wedge dy_i.$$

Una tal carta es diu **carta simplèctica**, i les coordenades es diuen **simplèctiques**, o **de Darboux**.

(10.1.9) Aquest teorema afirma que tota varietat simplèctica és localment isomorfa a \mathbf{R}^{2n} amb la seva forma simplèctica canònica. Això implica que, a diferència de la geometria riemanniana, en la geometria simplèctica no hi ha invariants locals altres que la dimensió.

(10.1.10) No hi ha una caracterització simple de les varietats que admeten una estructura simplèctica. No tota varietat orientable de dimensió parella n'admet. Per exemple, si M és compacta, cal $H_{\text{dR}}^2(M) \neq 0$.

10.2 Camps vectorials hamiltonians

En aquest apartat (M, ω) és una varietat simplèctica.

(10.2.1) Considerem l'isomorfisme $\widehat{\omega}: TM \rightarrow T^*M$. Donada una funció $h: M \rightarrow \mathbf{R}$ es defineix el **camp hamiltonià** o **gradient simplèctic** de h com el camp vectorial

$$X_h = \widehat{\omega}^{-1} \circ dh.$$

En altres termes,

$$i_{X_h} \omega = dh.$$

(10.2.2) Es diu que h és la **funció hamiltoniana** de X_h . Està determinada per X_h llevat d'una funció localment constant.

(10.2.3) Un camp vectorial X en M es diu **hamiltonià** si és el camp hamiltonià d'una funció.

Un camp vectorial es diu **localment hamiltonià** si cada punt té un veïnat obert sobre el qual X és hamiltonià.

Denotem per $\mathfrak{X}_h(M) \subset \mathfrak{X}_{\text{lh}}(M) \subset \mathfrak{X}(M)$ els subespais vectorials dels camps vectorials hamiltonians i localment hamiltonians.

(10.2.4) Sigui $X \in \mathfrak{X}(M)$. Les tres afirmacions següents són equivalents:

- X és localment hamiltonià.
- $i_X\omega$ és una 1-forma diferencial tancada.
- $\mathcal{L}_X\omega = 0$.

(10.2.5) *Teorema de Liouville*

La forma de volum simplèctica Ω és invariant pels camps vectorials localment hamiltonians.

(10.2.6) Per a cada $p \in M$, els valors dels camps vectorials hamiltonians en el punt p recorren tot T_pM .

(10.2.7) Si α és una forma diferencial, $\mathcal{L}_fX\alpha = f\mathcal{L}_X\alpha + df \wedge i_X\alpha$.

(10.2.8) *Teorema de Li Hua Zhong* ¹⁵

Sigui (M, ω) una varietat simplèctica connexa, $\alpha \in \Omega^k(M)$ una forma diferencial invariant per tots els camps hamiltonians.

Si k és imparell, $\alpha = 0$. Si k és parell, $\alpha = c\omega^{\wedge \frac{k}{2}}$, on $c \in \mathbf{R}$.

(10.2.9) Si X, Y són camps vectorials localment hamiltonians, aleshores $[X, Y]$ és una camp vectorial hamiltonià, amb hamiltoniana $\omega(Y, X)$.

(10.2.10) *Expressió local en coordenades de Darboux*

Sigui (x^i, y_i) un sistema de coordenades de Darboux: $\omega = dx^i \wedge dy_i$. Llavors

$$\widehat{\omega} \left(A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + B_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) = A^i dy_i - B_i dx^i.$$

L'expressió del camp hamiltonià X_h és

$$X_h = \frac{\partial h}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

(10.2.11) Sigui N una varietat, $X \in \mathfrak{X}(N)$. La funció lineal $\widehat{X}: T^*N \rightarrow \mathbf{R}$, definida per $\widehat{X}(p_q) = \langle p_q, X(q) \rangle$, és la hamiltoniana del camp vectorial $X^{T^*} \in \mathfrak{X}(T^*N)$.

10.3 Claudàtor de Poisson

(10.3.1) Sigui M una varietat, i $\omega \in \Omega^2(M)$ una 2-forma diferencial no-degenerada, de la qual per ara no suposem que sigui tancada. Donada una funció f en M , podem definir-ne com abans el gradient respecte a ω per $X_f = \widehat{\omega}^{-1} \circ df$.

¹⁵També escrit Lee Hwa-Chung.

Donades dues funcions $f, g: M \rightarrow \mathbf{R}$, en definim el **parèntesi de Poisson** (o **claudàtor de Poisson**) com la funció

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = i_{X_g} i_{X_f} \omega = X_g \cdot f = -X_f \cdot g.$$

(10.3.2) Es compleix

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\}, \\ \{fg, h\} &= f\{g, h\} + g\{f, h\} \end{aligned}$$

(i anàlogament per la dreta).

$$(10.3.3) \quad i_{[X_f, X_g] + X_{\{f, g\}}} \omega = -i_{X_g} i_{X_f} d\omega.$$

(10.3.4) ω és tancada sii se satisfà

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f, g\}}.$$

$$(10.3.5) \quad d\omega(X_f, X_g, X_h) = \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{f, h\}\} + \{h, \{f, g\}\}.$$

(10.3.6) ω és tancada sii el seu parèntesi de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ satisfà la identitat de Jacobi.

(10.3.7) Sigui (M, ω) una varietat simplèctica.

L'espai vectorial $\mathcal{C}^\infty(M)$, amb el parèntesi de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$, és una \mathbf{R} -àlgebra de Lie.

L'aplicació $\mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, $f \mapsto X_f$, és un antihomomorfisme d'àlgebres de Lie.

El nucli d'aquest morfisme són les funcions localment constants; la imatge, els camps vectorials hamiltonians.

(10.3.8) *Expressió local en coordenades de Darboux*

Sigui (x^i, y_i) un sistema de coordenades de Darboux per a ω . Llavors

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x^i}.$$

(10.3.9) Considerem coordenades (z^i) qualssevol en M . Llavors

$$\{f, g\} = \{z^i, z^j\} \frac{\partial f}{\partial z^i} \frac{\partial g}{\partial z^j}.$$

(10.3.10) Encara en coordenades qualssevol, escrivim $\omega = \frac{1}{2} a_{ij} dz^i \wedge dz^j$, on $a_{ij} = \omega(\partial/\partial z^i, \partial/\partial z^j)$; sigui $A = (a_{ij})$.

D'altra banda, escrivim $b^{ij} = \{z^i, z^j\}$; sigui $B = (b^{ij})$.

Ambdues matrius estan relacionades per $B = (A^\top)^{-1}$.

(10.3.11) Amb les mateixes notacions, les coordenades són de Darboux sii $A = J$, essent $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$.

(10.3.12) Sigui (M, ω) una varietat simplèctica.

Unes coordenades (x^i, y_i) són de Darboux sii satisfan les *relacions de commutació canòniques*

$$\{x^i, x^j\} = 0, \{y_i, y_j\} = 0, \{x^i, y_j\} = \delta_j^i.$$

(10.3.13) *Teorema de Darboux generalitzat*

Sigui (M, ω) una varietat simplèctica de dimensió $2n$. Siguin f_1, \dots, f_r ($r \leq n$) funcions definides en un veïnat obert de $p \in M$, amb diferencials linealment independents en p , i tals que

$$\{f_i, f_j\} = 0$$

(es diu que «estan en involució»). Llavors existeixen funcions $f_{r+1}, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ tals que, en un veïnat de p , $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ és una carta simplèctica de M ($\omega = \sum_i df_i \wedge dg_i$).

10.4 Simplectomorfismes i transformacions canòniques

(10.4.1) Siguin (M_1, ω_1) i (M_2, ω_2) varietats simplèctiques. Una aplicació $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ es diu ***simplèctica*** si

$$\varphi^*(\omega_2) = \omega_1.$$

(10.4.2) Un difeomorfisme simplèctic s'anomena ***simplectomorfisme*** (o isomorfisme de varietats simplèctiques).

La composició de simplectomorfismes, o l'invers d'un simplectomorfisme, són simplectomorfismes.

(10.4.3) Sigui $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ un difeomorfisme entre varietats simplèctiques. Les afirmacions següents són equivalents.

- φ és un simplectomorfisme
- Per a tota $h \in \mathcal{C}^\infty(M_2)$, $\varphi^*(X_h) = X_{\varphi^*(h)}$.
- Per a totes $g, h \in \mathcal{C}^\infty(M_2)$, $\varphi^*\{g, h\} = \{\varphi^*(g), \varphi^*(h)\}$.

La darrera afirmació significa que $\varphi^*: \mathcal{C}^\infty(M_2) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M_1)$ és un isomorfisme d'àlgebres de Lie.

(10.4.4) Si $f: N_1 \rightarrow N_2$ és un difeomorfisme, llavors $T^*f: T^*N_1 \rightarrow T^*N_2$ és un simplectomorfisme per a les estructures simplèctiques canòniques.

(10.4.5) Un simplectomorfisme o automorfisme d'una varietat simplèctica (M, ω) és un difeomorfisme $\varphi: M \rightarrow M$ tal que $\varphi^*(\omega) = \omega$.

Podem definir un **simplectomorfisme infinitesimal** de M com un camp vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que el seu flux deixa ω invariant, és a dir, que ω és invariant per X : $\mathcal{L}_X \omega = 0$. Això significa, doncs, que X és un camp vectorial localment hamiltonià.

(10.4.6) Siguin (M_1, ω_1) i (M_2, ω_2) varietats simplèctiques. Un difeomorfisme $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ es diu **transformació canònica** si aplica camps vectorials localment hamiltonians en camps vectorials localment hamiltonians.

(10.4.7) Sigui $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ un difeomorfisme entre varietats simplèctiques connexes. φ és una transformació canònica sii existeix un $c \in \mathbf{R}^*$ tal que

$$\varphi^*(\omega_2) = c\omega_1.$$

A més, si $X_1 \in \mathfrak{X}_{\text{lh}}(M_1)$ té hamiltoniana local h_1 i $\varphi_*(X_1) = X_2 \in \mathfrak{X}_{\text{lh}}(M_2)$ té hamiltoniana local h_2 , existeix un $k \in \mathbf{R}$ tal que, localment, $ch_1 = \varphi^*(h_2) + k$.

(10.4.8) Es compleix també que $\varphi^*\{g, h\} = \frac{1}{c}\{\varphi^*(g), \varphi^*(h)\}$.

(10.4.9) Es diu que c és la **valència** de la transformació canònica. Un simplectomorfisme és, doncs, una transformació canònica *univalent*.

(10.4.10) Sigui $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ una transformació canònica de valència c entre varietats simplèctiques exactes, amb formes simplèctiques $\omega_i = -d\theta_i$.

Existeix localment una funció $F_1 \in \mathcal{C}^\infty(M_1)$ tal que

$$\varphi^*(\theta_2) - c\theta_1 = dF_1.$$

(10.4.11) Es diu que F_1 és la **funció generatriu** de la transformació canònica.

10.5 Varietats de Poisson

(10.5.1) Sigui M una varietat, $\mathcal{C}^\infty(M)$ la seva àlgebra de funcions diferenciables. Una **estructura de Poisson** en M és un producte (dit **parèntesi de Poisson**)

$$\mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M), \quad (f, g) \mapsto \{f, g\}$$

\mathbf{R} -bilineal que satisfà les propietats següents:

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (antisimetria)
- $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (identitat de Jacobi)

- $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ (regla de Leibniz)

M , dotada d'aquest producte, s'anomena **varietat de Poisson**.

(10.5.2) L'espai vectorial real $\mathcal{C}^\infty(M)$ està dotat, doncs, de dues estructures: és una àlgebra associativa commutativa amb el producte ordinari de funcions i una àlgebra de Lie amb el parèntesi de Poisson. Ambdues estructures estan relacionades per la regla de Leibniz, que significa que, per a tota f , $\{f, -\}$ és una derivació respecte al producte associatiu.

També ho és $\{-, f\}$, en virtut de l'antisimetria.

Una àlgebra associativa i commutativa dotada d'un producte de Lie que satisfà la regla de Leibniz es diu *àlgebra de Poisson*.

(10.5.3) Com que $\{-, h\}$ és una derivació de $\mathcal{C}^\infty(M)$, es correspon amb un camp vectorial diferenciable X_h , anomenat **camp vectorial hamiltonià**¹⁶ de h . Per definició,

$$\{f, h\} = X_h \cdot f.$$

L'aplicació

$$\mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad h \mapsto X_h$$

és un antihomomorfisme d'àlgebres de Lie:

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f, g\}}.$$

(10.5.4) El centre de $\mathcal{C}^\infty(M)$ respecte al parèntesi de Lie està format per les funcions f tals que $\{f, g\} = 0$ per a tota g ; equivalentment, són les funcions f tals que $X_f = 0$. A vegades s'anomenen *funcions de Casimir*.

(10.5.5) Donat un parèntesi de Poisson existeix un camp de bivectors diferenciable $\Lambda \in \text{Sec}(\Lambda^2 TM)$ tal que

$$\{f, g\} = \Lambda(df, dg).$$

Λ és el **tensor de Poisson** de la varietat de Poisson.

(10.5.6) Recíprocament, donada una secció diferenciable Λ de $\Lambda^2 TM$, la fórmula anterior permet definir un parèntesi de funcions antisimètric i satisfent la regla de Leibniz; però la identitat de Jacobi se satisfà sii Λ satisfà una condició d'integrabilitat que es pot expressar com

$$[\Lambda, \Lambda] = 0,$$

on $[-, -]$ denota el *parèntesi de Schouten* de camps de multivectors.

¹⁶Un altre conveni s'obtidria definint X_h com $\{h, -\}$.

(10.5.7) A partir del tensor de Poisson Λ es defineix un morfisme de fibrats vectorials

$$\widehat{\Lambda}: T^*M \rightarrow TM, \quad \alpha_x \mapsto \Lambda(\alpha_x, -).$$

Notem que $\widehat{\Lambda} \circ dh = X_h$.

(10.5.8) Si $U \subset M$ és un subconjunt obert d'una varietat de Poisson la restricció del tensor de Poisson la dota d'una estructura de varietat de Poisson.

(10.5.9) En particular, siguin (x^i) coordenades locals de M en un conjunt obert U .

Es pot expressar $\Lambda|_U = \frac{1}{2} \Lambda^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$. Donades $f, g \in \mathcal{C}^\infty(U)$, el seu parèntesi de Poisson és $\{f, g\} = \Lambda^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}$. En particular, $\{x^i, x^j\} = \Lambda^{ij}$.

(10.5.10) El rang de l'estructura de Poisson en un punt $x \in M$ és el rang del seu tensor de Poisson en aquell punt, és a dir, $\text{rang } \widehat{\Lambda}_x = \dim \text{Im } \widehat{\Lambda}_x$, que és un nombre parell $\leq \dim M$.

(10.5.11) En qualsevol varietat el tensor de Poisson nul defineix una estructura de Poisson de rang 0.

(10.5.12) Una varietat simplèctica, dotada amb el seu parèntesi de Poisson, és una varietat de Poisson de rang màxim ($= \dim M$). La relació entre les dues estructures ve donada pel fet que $\widehat{\Lambda} = {}^t \widehat{\omega}^{-1}$.

Recíprocament, una varietat de Poisson correspon a una varietat simplèctica sii té rang màxim.

(10.5.13) *Estructura de Lie–Poisson en una àlgebra de Lie*

Sigui \mathfrak{g} una \mathbf{R} -àlgebra de Lie de dimensió finita, \mathfrak{g}^* el seu espai dual dotat de la seva estructura diferenciable canònica, $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ la seva àlgebra de funcions diferenciables. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$, la seva derivada $Df(x)$ en un punt $x \in \mathfrak{g}^*$ és una forma lineal en \mathfrak{g}^* , o sigui, un element de $\mathfrak{g}^{**} \cong \mathfrak{g}$. D'aquesta manera es defineix un producte de funcions

$$\{f, g\}(x) = \langle x, [Df(x), Dg(x)] \rangle,$$

anomenat **parèntesi de Lie–Poisson** de \mathfrak{g}^* .

(10.5.14) *Morfismes de varietats de Poisson*

Siguin M, N varietats de Poisson. Un **morfisme de Poisson** és una aplicació diferenciable $\varphi: M \rightarrow N$ tal que preserva els parèntesis de Poisson respectius:

$$\varphi^* \{g_1, g_2\}_N = \{\varphi^*(g_1), \varphi^*(g_2)\}_M.$$

(10.5.15) *Teorema de descomposició de Weinstein*

Sigui (M, Λ) una varietat de Poisson de dimensió m , $p \in M$ un punt, $2r$ el rang de Λ_p . Existeix una carta local de M centrada en p , amb coordenades $(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_{m-2r})$, tal que, en un veïnat de p ,

$$\Lambda = \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{j < k} f_{jk}(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \wedge \frac{\partial}{\partial z_k},$$

amb f_{jk} funcions tals que $f(0) = 0$.

El primer sumand defineix una estructura simplèctica sobre la subvarietat $z = 0$, mentre que el segon és l'anomenada *estructura de Poisson transversa*.

(10.5.16) *Foliació simplèctica d'una varietat de Poisson*

Sigui (M, Λ) una varietat de Poisson. La distribució tangent $\text{Im } \widehat{\Lambda} \subset \text{TM}$ està generada pels camps vectorials hamiltonians i doncs és diferenciable. És integrable, de manera que les seves varietats integrals maximals defineixen una foliació, anomenada **foliació simplèctica** de M . Cada fulla d'aquesta foliació té una estructura simplèctica natural. Dos punts pertanyen a la mateixa fulla sii es poden unir per la juxtaposició d'un nombre finit de corbes integrals de camps vectorials hamiltonians.

A Complementes

En aquesta secció s'apleguen alguns resultats rellevants que no han tingut cabuda dins del desenvolupament dels temes de l'assignatura però han anat apareixent al llarg del curs dins la llista de problemes o en exàmens.

A.1 Producte de varietats

Siguin M_i ($1 \leq i \leq k$) varietats diferenciables. Hem definit la varietat producte $M_1 \times \dots \times M_k$. Denotem les projeccions per $\text{pr}_i: M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$. Són aplicacions diferenciables.

Per simplicitat, en tota l'exposició no considerarem més que el producte de dues varietats.

(A.1.1) Una aplicació $G: N \rightarrow M_1 \times M_2$ és diferenciable sii ho són les seves components $G_i = \text{pr}_i \circ G$ ($1 \leq i \leq 2$).

(A.1.2) *L'espai tangent d'un producte*

Siguin $p_i \in M_i$, i escrivim per abreviar $p = (p_1, p_2)$. Considerem les aplicacions tangents $T_p \text{pr}_i: T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2) \rightarrow T_{p_i} M_i$. Llavors l'aplicació

$$(T_p \text{pr}_1, T_p \text{pr}_2): T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2) \rightarrow T_{p_1} M_1 \times T_{p_2} M_2$$

és un isomorfisme d'espais vectorials.

Eventualment, amb aquest isomorfisme podem identificar un espai $T_{p_i} M_i$ amb un subespai de $T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2)$. També podem escriure $T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2) = T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2$. Així un vector tangent del producte s'escriu $u_1 + u_2$, essent $u_1 \in T_{p_1} M_1$ i $u_2 \in T_{p_2} M_2$.

(A.1.3) Considerem una aplicació diferenciable $G: N \rightarrow M_1 \times M_2$. Mitjançant l'isomorfisme anterior, $T_q G: T_q N \rightarrow T_{G(q)}(M_1 \times M_2)$ s'identifica amb l'aplicació $(T_q G_1, T_q G_2): T_q N \rightarrow T_{G_1(q)} M_1 \times T_{G_2(q)} M_2$. És a dir,

$$T_q(G_1, G_2) = (T_q G_1, T_q G_2).$$

(A.1.4) Considerem ara una aplicació diferenciable $F: M_1 \times M_2 \rightarrow N$. Sigui $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$. Usem les identificacions anteriors. Sigui $u = (u_1, u_2) \in T_p(M_1 \times M_2) \cong T_{p_1} M_1 \times T_{p_2} M_2$. Llavors

$$T_p F \cdot u = T_{p_1} F(\cdot, p_2) \cdot u_1 + T_{p_2} F(p_1, \cdot) \cdot u_2.$$

En particular, donada $f: M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbf{R}$,

$$\langle d_p f, u \rangle = \langle d_{p_1} f(\cdot, p_2), u_1 \rangle + \langle d_{p_2} f(p_1, \cdot), u_2 \rangle.$$

(A.1.5) *Teorema de la funció implícita*

Sigui una aplicació diferenciable $F: M_1 \times M_2 \rightarrow N$, posem $q = F(p_1, p_2)$ i suposem que $T_{p_2}F(p_1, \cdot): T_{p_2}M_2 \rightarrow T_qN$ és un isomorfisme.

El teorema de la funció implícita assegura l'existència local d'una única aplicació f , definida en un veïnat de p_1 i amb valors en un veïnat de p_2 , tal que

$$F(x_1, x_2) = q \iff x_2 = f(x_1).$$

La «funció implícita» f també és diferenciable, i

$$T_{p_1}f = -(T_{p_2}F(p_1, \cdot))^{-1} \circ T_{p_1}F(\cdot, p_2).$$

(A.1.6) Totes les consideracions anteriors es poden fer amb aplicacions de classe C^r , amb $r \geq 1$. En el teorema de la funció implícita, si F és de classe C^r , f també ho és.

(A.1.7) La identificació del tangent d'un producte com el producte dels tangents en cada punt, realitzada globalment, dona lloc a un difeomorfisme

$$(T \text{pr}_1, T \text{pr}_2): T(M_1 \times M_2) \rightarrow TM_1 \times TM_2.$$

(A.1.8) Considerem per exemple un camp de vectors tangents Y en $M_1 \times M_2$. Amb la identificació donada pel difeomorfisme anterior es pot escriure $Y = (Y_1, Y_2)$, essent $Y_1: M_1 \times M_2 \rightarrow TM_1$ i $Y_2: M_1 \times M_2 \rightarrow TM_2$, que de fet són camps vectorials al llarg de les projeccions pr_1 i pr_2 .

Amb la mateixa identificació, un camp vectorial X_1 en M_1 (per exemple) dona lloc a un camp vectorial X en $M_1 \times M_2$: $X(p_1, p_2) = (X_1(p_1), 0)$.

Més particularment, el camp vectorial unitat d/dt de \mathbf{R} dona lloc a un camp vectorial en la varietat producte $\mathbf{R} \times M$, que podem denotar per $\partial/\partial t$.

A.2 Grups de Lie

(A.2.1) Un *grup de Lie* és un conjunt G dotat d'estructures de grup i de varietat diferenciable, de manera que el producte i la inversió són aplicacions diferenciables:

$$\mu: G \times G \rightarrow G, \quad (x, y) \mapsto xy;$$

$$\iota: G \rightarrow G, \quad x \mapsto x^{-1}.$$

(A.2.2) Aquestes operacions són diferenciables sii ho és l'aplicació $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.

(A.2.3) Sigui G un grup de Lie, $g \in G$ un element fixat. La translació per l'esquerra

$$L_g: G \rightarrow G, \quad L_g(x) = gx$$

i la translació per la dreta

$$R_g: G \rightarrow G, \quad R_g(x) = xg$$

són difeomorfismes.

(A.2.4) Un **subgrup de Lie** (regular) d'un grup de Lie G és un subconjunt $H \subset G$ que és alhora subgrup i subvarietat (regular). Amb les estructures induïdes, H també és un grup de Lie.

Per a comprovar si un subgrup $H \subset G$ d'un grup de Lie és una subvarietat, n'hi ha prou amb veure-ho al voltant d'un punt (per exemple, l'element neutre e).

(A.2.5) Anàlogament, un **subgrup de Lie immers** és un grup de Lie que és alhora subgrup i subvarietat immersa.

(A.2.6) Dins els grups multiplicatius \mathbf{R}^* , \mathbf{C}^* , \mathbf{H}^* dels cossos dels nombres reals, complexos i quaternions, els elements de mòdul 1 en formen subgrups de Lie: \mathbf{S}_0 , \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_3 .

Dins el grup lineal real $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, el conjunt $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ de les matrius de determinant 1 n'és un subgrup de Lie. També ho és el conjunt $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ de les matrius ortogonals, així com el de les matrius ortogonals de determinant 1, $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$.

(A.2.7) Un **morfisme de grups de Lie** és una aplicació $f: G \rightarrow G'$ entre grups de Lie que és morfisme de grups i de varietats.

Un morfisme f sempre té rang constant.

(A.2.8) Si $f: G \rightarrow G'$ és un morfisme de grups de Lie, llavors $\mathrm{Ker} f \subset G$ és un subgrup de Lie (regular).

En canvi, la imatge $f(G)$ pot no ser una subvarietat regular de G' .

(A.2.9) Sigui G un grup de Lie. Un camp vectorial X en G es diu **invariant per l'esquerra** quan és invariant per les translacions per l'esquerra L_g ($g \in G$):

$$T(L_g) \circ X = X \circ L_g.$$

Denotem per $\mathfrak{X}_L(G)$ el conjunt dels camps vectorials invariants per l'esquerra en G .

De manera anàloga es defineix el concepte de camp vectorial **invariant per la dreta**.

(A.2.10) D'acord amb la seva definició, un camp vectorial invariant per l'esquerra està determinat pel seu valor en el neutre. De fet, fixat un vector tangent $u \in T_e G$, l'aplicació

$$X_u: G \rightarrow TG, \quad g \mapsto T_e(L_g) \cdot u,$$

és un camp vectorial diferenciable, invariant per l'esquerra.

Considerem coordenades apropiades de G , en les quals l'expressió local de la multiplicació és $\widehat{\mu}$. Llavors l'expressió local de X_u és

$$\widehat{X}_u(x) = (x, D_2 \widehat{\mu}(x, \hat{e}) \cdot \mathbf{u}),$$

essent \mathbf{u} els components de u en les coordenades considerades.

(A.2.11) Doncs es conclou que l'aplicació

$$\mathfrak{X}_L(G) \rightarrow T_e G, \quad X \mapsto X(e)$$

és un isomorfisme d'espais vectorials.

(A.2.12) Si (u_i) és una base de $T_e G$, els camps vectorials invariants per l'esquerra X_i corresponents són una base del \mathbf{R} -espai vectorial $\mathfrak{X}_L(G)$. Encara més, són linealment independents en cada punt, de manera que són una base del $\mathcal{C}^\infty(M)$ -mòdul $\mathfrak{X}(G)$ dels camps vectorials diferenciables en G ; doncs, tot grup de Lie és paral·lelitzable.

(A.2.13) El conjunt dels camps vectorials invariants per l'esquerra $\mathfrak{X}_L(G)$ és una subàlgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$.

(A.2.14) L'isomorfisme anterior $\mathfrak{X}_L(G) \cong T_e G$ permet transportar l'estructura d'àlgebra de Lie dels camps vectorials invariants per l'esquerra als vectors tangents en el neutre.

L'**àlgebra de Lie** de G , usualment representada per \mathfrak{g} o $\text{Lie}(G)$, és qual·sevol d'aquests dos conjunts, $\mathfrak{X}_L(G)$ o $T_e(G)$, amb aquesta estructura.

Es podrien fer construccions similars amb els camps vectorials invariants per la dreta.

(A.2.15) Donada una base (u_i) de \mathfrak{g} , podem escriure $[u_i, u_j] = c_{ij}^k u_k$. Els nombres $c_{ij}^k \in \mathbf{R}$ s'anomenen *constants d'estructura* de l'àlgebra de Lie (en la base donada).

(A.2.16) *El grup lineal*

El grup lineal $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ és un subconjunt obert de l'espai vectorial $M_n(\mathbf{R})$. Per tant la seva àlgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})$ s'identifica amb l'espai vectorial $T_I(\text{GL}_n(\mathbf{R})) \cong M_n(\mathbf{R})$.

Donat $u \in M_n(\mathbf{R})$, sigui X_u el camp vectorial invariant per l'esquerra definit per u ; amb la identificació $T(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \times M_n(\mathbf{R})$, aquest és $X_u(g) = (g, gu)$. Es comprova que $[X_u, X_v] = X_{[u,v]}$, essent $[u, v]$ el commutador de les matrius u, v . D'aquesta manera, l'àlgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})$ del grup lineal s'identifica amb l'àlgebra de Lie $M_n(\mathbf{R})$.

(A.2.17) Sigui G un grup de Lie, X un camp vectorial invariant per l'esquerra. Sigui γ la corba integral maximal de X tal que $\gamma(0) = e$.

Donat $x \in G$, $\xi(t) = x\gamma(t)$ és la corba integral maximal de X amb condició inicial $\xi(0) = x$.

γ està definida en tot \mathbf{R} , de manera que X és complet.

De fet, $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow G$ és un morfisme de grups de Lie.

Es diu que γ és un **subgrup uniparamètric**, i que $X(e) \in \mathfrak{g}$ és el seu **generador infinitesimal**.

A.3 Orientabilitat

(A.3.1) Una **forma de volum** en una varietat M és una forma diferencial de grau màxim $\Omega \in \Omega^m(M)$ que no s'anulla enlloc. Llavors tota altra forma diferencial de grau m s'escriu $f\Omega$, amb f una funció qualsevol.

Si Ω és una forma de volum, en cada punt Ω_p defineix una orientació de l'espai vectorial T_pM .

(A.3.2) Si Ω és una forma de volum en M i X és un camp vectorial, llavors existeix una única funció $\mathrm{div}_\Omega X$ tal que

$$\mathcal{L}_X \Omega = (\mathrm{div}_\Omega X) \Omega.$$

S'anomena **divergència** de X respecte a Ω .

(A.3.3) Una varietat M es diu **orientable** si té una forma de volum. Una **orientació** de M és una tria d'una classe de formes de volum, $\{f\Omega \mid f > 0\}$. Si M és connexa, llavors admet dues orientacions.

(A.3.4) Un **atles orientat** d'una varietat és un atles tal que tots els canvis de coordenades tenen jacobians positius.

(A.3.5) Si una varietat té una forma de volum llavors té un atles orientat.

El recíproc és cert si M és paracompacta.

(A.3.6) La noció d'orientabilitat és important en l'estudi de la integració en varietats.

A.4 Equacions diferencials de segon ordre

(A.4.1) Sigui $\xi: I \rightarrow TM$ un camí en TM . ξ és l'aixecament canònic (velocitat) d'un camí en M sii $\xi = T(\tau_M) \circ \xi'$.

(A.4.2) Sigui Y un camp vectorial en TM . Totes les corbes integrals de Y són aixecaments de camins en M sii

$$T(\tau_M) \circ Y = \text{Id}_{TM}.$$

És a dir, a més de ser secció de τ_{TM} , Y és secció de $T(\tau_M)$.

(A.4.3) D'un camp vectorial $Y \in \mathfrak{X}(TM)$ que satisfà la condició anterior es diu que satisfà la **condició de segon ordre**. Si $\gamma: I \rightarrow M$ és un camí, Y defineix una **equació diferencial de segon ordre** en M :

$$\gamma'' = Y \circ \gamma'.$$

(A.4.4) En coordenades naturals (x^i, u^i) de TM , l'expressió d'un d'aquests camps vectorials és

$$Y = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + a^i(x, u) \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

i l'expressió local de l'equació diferencial de segon ordre corresponent és $\ddot{x} = a(x, \dot{x})$.

(A.4.5) *Esprais*

Sigui Z un camp vectorial en TM satisfent la condició de segon ordre. Les condicions següents són equivalents:

- i) Per a qualsevol $c \in \mathbf{R}^*$ i qualsevol solució $\xi: I \rightarrow M$ de l'equació diferencial de segon ordre definida per Z , el camí $\eta(t) = \xi(ct)$ n'és també solució.
- ii) Per a qualsevol $c \in \mathbf{R}$ i qualsevol $v_x \in TM$, $Z(cv_x) = cT(m_c) \cdot Z(v_x)$, on $m_c: TM \rightarrow TM$ és l'homotècia de raó c sobre les fibres.
- iii) $[\Delta, Z] = Z$, on Δ és el camp de Liouville de TM .
(L'expressió local de Δ , en coordenades naturals, és $\Delta = u^i \partial / \partial u^i$.)
- iv) En coordenades naturals (x^i, u^i) qualssevol de TM l'expressió de Z és

$$Z = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + a^i(x, u) \frac{\partial}{\partial u^i},$$

on les $a^i(x, u)$ són homogènies de grau 2 en u .

Un camp vectorial satisfent la condició de segon ordre i aquestes condicions equivalents es diu **esprai**.

En la hipòtesi que Z sigui de classe C^∞ en tot TM sencer, es pot provar que la seva expressió en coordenades té la forma $Z(x, u) = u^k \frac{\partial}{\partial x^k} + h_{ij}^k(x) u^i u^j \frac{\partial}{\partial u^k}$, amb h_{ij}^k simètriques respecte als índexs inferiors.

(A.4.6) *L'esprai geodèsic d'una connexió*

Sigui ∇ una connexió en M . Existeix un camp vectorial $S \in \mathfrak{X}(TM)$, satisfent la condició de segon ordre, caracteritzat per la propietat que les corbes integrals de S són les velocitats de les geodèsiques de ∇ . S és un esprai; s'anomena l'**esprai geodèsic** de la connexió.

En coordenades naturals de TM s'expressa

$$S = u^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma_{ij}^k u^i u^j \frac{\partial}{\partial u^k},$$

on Γ_{ij}^k són els símbols de Christoffel de la connexió.

A.5 Les formes diferencials canòniques del fibrat cotangent

(A.5.1) Sobre T^*M existeix una 1-forma diferencial canònica θ_M , definida per

$$\theta_M(p) = {}^t(\mathbb{T}_p \pi_M) \cdot p \quad (p \in T^*M).$$

La 2-forma diferencial

$$\omega_M = -d\theta_M$$

és no-degenerada.

(A.5.2) θ_M, ω_M són les **formes diferencials canòniques** (o **formes de Liouville**) de T^*M .

(A.5.3) Considerem una carta de M , i siguin (x^i, p_i) les coordenades naturals corresponents de T^*M . L'expressió de les formes diferencials canòniques en aquestes cartes és

$$\theta_M = p_i dx^i, \quad \omega_M = dx^i \wedge dp_i.$$

(A.5.4) La contracció amb ω_M defineix un isomorfisme entre els fibrats vectorials tangent i cotangent:

$$\widehat{\omega}_M: T(T^*M) \rightarrow T^*(T^*M), \quad \widehat{\omega}_M(w_p) = i_{w_p} \omega.$$

(A.5.5) En les corresponents coordenades naturals s'expressa $\widehat{\omega}_M(x, p; u, h) = (x, p; -h, u)$.

(A.5.6) L'aplicació

$$\mathfrak{X}(T^*M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(T^*M), \quad X \mapsto i_X \omega_M,$$

és un isomorfisme de $\mathcal{C}^\infty(T^*M)$ -mòduls.

(A.5.7) Existeix un difeomorfisme canònic $T(T^*M) \cong T^*(T^*M)$.

També es pot provar que hi ha un difeomorfisme canònic $T(T^*M) \cong T^*(TM)$. Tanmateix, no existeix cap difeomorfisme *canònic* entre aquestes varietats i $T(TM)$.

(A.5.8) Sobre T^*M existeix una forma de volum canònica.

Es pot prendre per exemple $\Omega_M = (-1)^{m(m-1)/2} \frac{1}{m!} \omega_M \wedge \dots \wedge \omega_M$.

Llavors en coordenades naturals $\Omega_M = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dp_m$.

A.6 Fluxos dependents del temps

La formulació geomètrica més simple d'una equació diferencial en una varietat ve donada per un camp vectorial, que modelitza una equació diferencial ordinària, de primer ordre, autònoma, en forma explícita. La formulació geomètrica de casos més generals requereix l'ús d'estructures més complicades. En aquesta secció considerarem el cas d'una equació no autònoma, o dependent del temps, de la forma $x' = f(t, x)$. La situació més simple s'obté treballant en la varietat producte $\mathbf{R} \times M$.

(A.6.1) Un ***camp vectorial dependent del temps*** en M és una aplicació $X: W \rightarrow TM$, definida en un subconjunt obert $W \subset \mathbf{R} \times M$, tal que, per a tot $(t, p) \in W$, $X(t, p) \in T_p M$.

És a dir, X és un camp vectorial al llarg de la projecció $W \rightarrow M$.

(A.6.2) Aquest camp vectorial defineix una equació diferencial

$$x' = X(t, x);$$

una solució d'aquesta equació és un camí $\gamma: I \rightarrow M$ tal que, per a tota t ,

$$(t, \gamma(t)) \in W \quad \text{i} \quad \gamma'(t) = X(t, \gamma(t)).$$

Si $\gamma(t_0) = p_0$, es diu que γ satisfà la condició inicial (t_0, p_0) .

(A.6.3) Si X és de classe C^1 , el teorema d'existència i unicitat permet demostrar l'existència de solucions maximals i del flux. Una manera d'obtenir aquests resultats és convertir l'equació diferencial en una equació autònoma equivalent.

(A.6.4) A partir de X es pot construir un camp vectorial \tilde{X} en W , a vegades anomenat la **suspensió** de X :

$$\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial t} + X,$$

on estem utilitzant el camp vectorial unitat de \mathbf{R} , $\partial/\partial t$, i que l'espai tangent d'un producte és la suma directa dels espais tangents dels factors: $T_{(t,p)}W = T_{(t,p)}(\mathbf{R} \times M) = T_t\mathbf{R} \oplus T_pM$.

(A.6.5) Una corba integral de \tilde{X} és un camí $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1): I \rightarrow W \subset \mathbf{R} \times M$ tal que

$$D\tilde{\gamma}_0 = 1, \quad \tilde{\gamma}'_1 = X \circ \tilde{\gamma}.$$

De la primera equació es dedueix que $\tilde{\gamma}_0(t) = t + \text{const}$, de manera que només quan $\text{const} = 0$ (cosa que es pot aconseguir aplicant una translació al paràmetre d'evolució) el camí $\tilde{\gamma}_1$ és solució de l'equació dependent del temps.

(A.6.6) El nou camp vectorial \tilde{X} té solucions maximals $\tilde{\gamma}_{t_0,p}(t)$ i un flux maximal $\tilde{F}: \tilde{D} \rightarrow W$, amb domini $\tilde{D} \subset \mathbf{R} \times W \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times M$, i amb $\tilde{\gamma}_{t_0,p}(t) = \tilde{F}(t, t_0, p)$. Observem que $\tilde{\gamma}_{t_0,p}(0) = (t_0, p)$.

(A.6.7) Donat $(t_0, p) \in W$, sigui $t \mapsto \gamma_{t_0,p}(t)$ la solució maximal de $x' = X(t, x)$ amb condició inicial $\gamma_{t_0,p}(t_0) = p$. Sigi $F: D \rightarrow M$ l'aplicació, definida en un subconjunt $D \subset \mathbf{R} \times W$, per

$$F(t, t_0, p) = \gamma_{t_0,p}(t).$$

És el **flux dependent del temps** de X .

(A.6.8) El subconjunt $D \subset \mathbf{R} \times W$ és obert, i, si X és de classe C^k ($k \geq 1$), el flux $F: D \rightarrow M$ és de classe C^k .

La demostració d'aquest resultat es pot fer de manera senzilla a partir de la teoria independent del temps aplicada a la suspensió de X . Només cal notar que es pot definir F a partir del flux \tilde{F} de \tilde{X} i una translació: $\tilde{F}(t - t_0, t_0, p) = (t, F(t, t_0, p))$. Així doncs el domini D és el transformat de \tilde{D} pel difeomorfisme $(s, t_0, p) \mapsto (s + t_0, t_0, p)$, i el grau de diferenciabilitat de F és el de \tilde{F} .

(A.6.9) Sigi F' la velocitat de F respecte a la primera variable real: $F' = TF \circ \frac{\partial}{\partial t}$. Aleshores

$$F'(t, t_0, p) = X(t, F(t, t_0, p)).$$

(A.6.10) Sigi

$$F^{ts} = F(t, s, \cdot): M_{ts} \rightarrow M.$$

El seu domini és el conjunt obert $M_{ts} \subset M$ obtingut tallant D amb $\{t\} \times \{s\} \times M$.

Les aplicacions F^{ts} satisfan la llei de grup

$$\begin{aligned} F^{tt} &= \text{Id}_M, \\ F^{t''t'} \circ F^{t't} &= F^{t''t} \end{aligned}$$

(allà on es pugui calcular la composició).

$F^{ts}: M_{ts} \rightarrow M_{st}$ és un difeomorfisme, amb invers F^{st} .

(A.6.11) Si X és un camp vectorial *independent del temps* amb flux F , aleshores el seu flux dependent del temps ve donat per $F^{t't} = F^{t'-t}$.

Derivada de Lie

(A.6.12) Considerem una funció dependent del temps $f: W \rightarrow \mathbf{R}$, de classe C^1 . Volem avaluar el canvi del valor de f al llarg de les corbes integrals de X , $f(t, F^{tt_0}(p))$. Podem escriure aquesta expressió com $(F^{tt_0})^*(f_t)(p)$; aquí, per a cada t , $f_t \equiv f(t, \cdot)$ és una funció definida en un conjunt obert de M .

(A.6.13) Es compleix que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_1} f(t, F^{tt_0}(p)) = (F^{t_1 t_0})^* \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=t_1} + \mathcal{L}_{X_{t_1}} f_{t_1} \right) (p),$$

on hem utilitzat una notació similar per a $X_t \equiv X(t, \cdot)$; en particular,

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} f(t, F^{tt_0}(p)) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{L}_X f \right) (t_0, p),$$

on s'entén que $\mathcal{L}_X f(t, p) = (\mathcal{L}_{X_t} f_t)(p)$.

(A.6.14) Amb hipòtesis i notacions similars, es poden obtenir expressions anàlogues per a la derivada de Lie d'un **camp tensorial dependent del temps** R :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_1} (F^{tt_0})^*(R_t) &= (F^{t_1 t_0})^* \left(\frac{\partial R}{\partial t} + \mathcal{L}_X R \right) \Big|_{t=t_1}, \\ \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (F^{tt_0})^*(R_t) &= \left(\frac{\partial R}{\partial t} + \mathcal{L}_X R \right) \Big|_{t=t_0}. \end{aligned}$$

Índex terminològic

- aixecament canònic d'un camí al fibrat tangent (5.1.2)
- àlgebra de les formes diferencials (6.3.8)
- àlgebra de les funcions diferenciables (1.5.3)
- àlgebra de Lie del grup lineal (A.2.16)
- àlgebra de Lie dels camps vectorials (4.4.9)
- àlgebra de Lie d'un grup de Lie (A.2.14)
- àlgebra dels camps tensorials (6.2.3)
- àlgebra dels camps tensorials contravariants (6.2.3)
- àlgebra dels camps tensorials covariants (6.2.3)
- aplicació cotangent en un punt (4.9.1)
- aplicació de classe C^∞ (1.3.4)
- aplicació de classe C^k (1.3.13)
- aplicació diferenciable (1.3.4)
- aplicació simplèctica (10.4.1)
- aplicació tangent d'una aplicació (4.2.1)
- aplicació tangent d'una aplicació en un punt (2.2.1)
- atles (1.1.5)
- atles compatibles (1.1.6)
- atles orientat (A.3.4)
- base de vectors cotangents associada a una carta (2.6.6)
- base de vectors tangents associada a una carta (2.3.1)
- camí (2.1.1)
- camins tangents (2.1.2)
- camp de Killing (9.1.11)
- camps vectorials relacionats per una aplicació (4.5.1)
- camp tensorial (6.1.3)
- camp tensorial al llarg d'una aplicació (8.3.6)
- camp tensorial invariant per un camp vectorial (6.5.9)
- camp tensorial invariant per un difeomorfisme (6.5.8)
- camp tensorial paral·lel (8.4.13)
- camp tensorial paral·lel al llarg d'un camí (8.4.13)
- camp vectorial (4.3.1)
- camp vectorial al llarg d'una aplicació (5.1.1)
- camp vectorial complet (5.4.2)
- camp vectorial coordinat (4.3.4)
- camp vectorial hamiltonià en una varietat de Poisson (10.5.3)
- camp vectorial hamiltonià en una varietat simplèctica (10.2.1)
- camp vectorial invariant per l'esquerra en un grup de Lie (A.2.9)
- camp vectorial invariant per un difeomorfisme (5.7.7)
- camp vectorial localment hamiltonià (10.2.3)
- camp vectorial paral·lel (8.4.12)
- camp vectorial paral·lel al llarg d'un camí (8.4.1)
- camp vectorial projectable per una aplicació (4.5.1)
- camp vectorial tangent a una subvarietat (4.3.14)
- camp vectorial unitat de \mathbf{R} (4.3.9)
- canvi de carta (1.1.3)
- carta adaptada a una subvarietat (3.1.1)
- carta (d'una varietat diferenciable) (1.1.11)
- carta (en un espai topològic) (1.1.1)
- carta natural del fibrat cotangent (4.6.4)
- carta natural del fibrat tangent (4.1.5)

- carta producte (1.2.8)
- carta simplèctica (10.1.8)
- cartes compatibles (1.1.4)
- claudàtor de Lie (4.4.8)
- claudàtor de Poisson (10.3.1)
- codimensió d'una subvarietat (3.1.1)
- codistribució (7.5.1)
- components d'una 1-forma diferencial (4.7.2)
- components d'un camp tensorial (6.1.5)
- components d'un camp vectorial (4.3.2)
- components d'un vector tangent (2.3.2)
- condició de segon ordre (A.4.3)
- connexió (8.1.1)
- connexió afí (8.1.1)
- connexió de Levi-Civita (9.3.4)
- connexió de Levi-Civita d'una subvarietat (9.4.4)
- connexió estàndard de \mathbf{R}^n (8.1.6)
- connexió plana (8.5.8)
- connexió riemanniana (9.3.1)
- connexió sense torsió (8.5.2)
- connexió simètrica (8.5.2)
- constants d'estructura d'una àlgebra de Lie (A.2.15)
- contracció d'una 1-forma diferencial amb un camp vectorial (4.8.1)
- contracció d'una forma diferencial amb un camp vectorial (6.3.14)
- contracció interior de camps tensorials mixtos (6.2.5)
- coordenades de Darboux (10.1.8)
- coordenades d'un punt (1.1.2)
- coordenades simplèctiques (10.1.8)
- corba (1.1.10)
- corba integral d'un camp vectorial (5.2.1)
- corba integral maximal (5.2.3)
- curvatura d'una connexió (8.5.5)
- curvatura escalar (9.5.5)
- derivació covariant (8.1.1)
- derivació covariant de camps tensorials (8.2.2)
- derivació puntual de l'àlgebra de les funcions (2.5.1)
- derivada covariant d'un camp tensorial al llarg d'un camí (8.3.7)
- derivada covariant d'un camp vectorial (8.1.1)
- derivada covariant d'un camp vectorial al llarg d'un camí (8.3.4)
- derivada de Lie d'un camp tensorial (6.5.1)
- derivada de Lie d'un camp vectorial (5.7.2)
- derivada d'una funció segons un camp vectorial (4.4.1)
- derivada d'una funció segons un vector tangent (2.4.1)
- derivada d'un camí (5.1.2)
- difeomorfisme (1.4.1)
- difeomorfisme local (3.3.5)
- diferencial covariant (8.2.6)
- diferencial d'una funció (4.7.9)
- diferencial d'una funció en un punt (2.6.2)
- diferencial exterior (6.4.2)
- dimensió d'una varietat (1.1.9)
- distància riemanniana (9.6.3)
- distribució diferenciable (7.1.6)
- distribució generada per un conjunt de camps vectorials (7.1.4)
- distribució integrable (7.2.2)
- distribució involutiva (7.2.6)
- distribució regular (7.1.8)
- distribució regular en un punt (7.1.8)
- distribució tangent (7.1.1)
- divergència d'un camp vectorial (A.3.2)
- dualitat entre camps vectorials i 1-formes diferencials (4.8.6)
- embedding (3.6.2)
- enganxament d'aplicacions diferenciables (1.3.8)
- equació diferencial (5.2.1)

- equació diferencial de segon ordre (A.4.3)
- equivalència entre camps vectorials i derivacions (4.4.7)
- equivalència entre classes de tangència de camins i derivacions puntuals (2.5.5)
- espai cotangent (2.6.1)
- espai de cohomologia de de Rham (6.4.10)
- espai de Minkowski (9.1.8)
- espai tangent (2.1.8)
- espai tangent d'una subvarietat (3.4.1)
- espai tangent d'un producte (A.1.2)
- esprai (A.4.5)
- esprai geodèsic d'una connexió (A.4.6)
- estructura de Lie–Poisson (10.5.13)
- estructura de Poisson (10.5.1)
- estructura diferenciable (1.1.8)
- existència de funcions altiplà (1.6.5)
- expressió local d'una aplicació (1.3.1)
- extensió local de funcions (1.6.8)
- fibrat cotangent (4.6.1)
- fibrat tangent (4.1.2)
- fibrat tangent d'una subvarietat (4.3.14)
- flux a temps t (5.3.5)
- flux d'un camp vectorial (5.3.1)
- foliació (7.3.10)
- foliació simplèctica d'una varietat de Poisson (10.5.16)
- forma canònica d'una immersió (3.4.3)
- forma canònica d'una subimmersió (3.5.10)
- forma canònica d'una submersió (3.5.1)
- forma de volum (A.3.1)
- forma de volum riemanniana (9.2.6)
- forma diferencial de grau k (6.3.2)
- forma diferencial de grau 1 (4.7.1)
- forma diferencial exacta (6.4.8)
- forma diferencial tancada (6.4.8)
- forma simplèctica (10.1.1)
- formes de Liouville (A.5.2)
- formes diferencials canòniques del fibrat cotangent (A.5.2)
- fórmula de Cartan (6.6.6)
- fórmula de Koszul (9.3.3)
- fórmula de Palais (6.4.5)
- funció altiplà (1.6.7)
- funció diferenciable (1.5.1)
- funció generatriu d'una transformació canònica (10.4.11)
- funció hamiltoniana (10.2.2)
- funcions coordenades (1.1.2)
- generador infinitesimal d'un grup uniparamètric de transformacions (5.5.6)
- generador infinitesimal d'un subgrup uniparamètric d'un grup de Lie (A.2.17)
- geodèsica d'una connexió (8.4.8)
- gradient (9.2.4)
- gradient simplèctic (10.2.1)
- grup de Lie (A.2.1)
- grup uniparamètric de transformacions (5.5.2)
- grup uniparamètric local de transformacions (5.5.9)
- hipersuperfície (3.1.4)
- identitat de Jacobi (4.4.9)
- imatge directa d'una 1-forma diferencial per un difeomorfisme (4.9.8)
- imatge directa d'una funció per un difeomorfisme (1.5.11)
- imatge directa d'un camp tensorial per un difeomorfisme (6.2.9)
- imatge directa d'un camp vectorial per un difeomorfisme (4.5.3)
- imatge recíproca d'una 1-forma diferencial per una aplicació (4.9.2)
- imatge recíproca d'una funció per una aplicació (1.5.4)

- imatge recíproca d'un camp tensorial covariant (6.2.6)
- imatge recíproca d'un camp tensorial per un difeomorfisme (6.2.9)
- immersió (3.3.2)
- immersió difeomorfa (3.6.2)
- isometria (9.1.10)
- isometria infinitesimal (9.1.11)
- isometria local (9.1.10)
- isomorfisme canònic entre un espai vectorial i els seus espais tangents (2.4.5)
- lema de construcció de varietats (4.1.1)
- lema de la ceba (1.7.6)
- lema de Poincaré (6.4.9)
- lema d'escapament (5.4.1)
- lema de translació (5.2.6)
- lema d'Urysohn llis (1.7.10)
- lleis de grup (5.3.3)
- longitud d'un camí (9.6.1)
- mètrica de Minkowski (9.1.8)
- mètrica lorentziana (9.1.3)
- mètrica pseudoriemanniana (9.1.1)
- mètrica riemanniana (9.1.2)
- mètrica riemanniana estàndard de \mathbf{R}^n (9.1.7)
- morfisme de grups de Lie (A.2.7)
- morfisme de Poisson (10.5.14)
- obert coordinat (1.1.2)
- operador local (4.8.7)
- òrbita d'un camp vectorial (5.6.1)
- òrbita d'un punt per una acció (5.5.4)
- orientació d'una varietat (A.3.3)
- parèntesi de Lie (4.4.8)
- parèntesi de Lie–Poisson (10.5.13)
- parèntesi de Poisson (10.3.1)
- parèntesi de Poisson (10.5.1)
- partició contínua de la unitat (1.7.1)
- partició de la unitat subordinada a un recobriment (1.7.1)
- partició diferenciable de la unitat (1.7.4)
- potencial simplèctic (10.1.3)
- producte d'un camp tensorial per una funció (6.2.1)
- producte d'un camp vectorial per una funció (4.3.6)
- producte exterior (6.3.7)
- producte tensorial de dos camps tensorials (6.2.2)
- projecció canònica del fibrat cotangent (4.6.1)
- projecció canònica del fibrat tangent (4.1.2)
- pull-back d'una 1-forma diferencial per una aplicació (4.9.2)
- pull-back d'una funció (1.5.4)
- pull-back d'un camp tensorial covariant (6.2.6)
- pull-back d'un camp tensorial per un difeomorfisme (6.2.9)
- pull-back d'un camp vectorial per un difeomorfisme (4.5.3)
- punt crític d'una aplicació (3.5.4)
- punt crític d'un camp vectorial (5.6.1)
- punt regular d'una aplicació (3.5.4)
- punt regular d'un camp vectorial (5.6.1)
- push-forward d'una 1-forma diferencial per un difeomorfisme (4.9.8)
- push-forward d'una funció per un difeomorfisme (1.5.11)
- push-forward d'un camp tensorial per un difeomorfisme (6.2.9)
- push-forward d'un camp vectorial per un difeomorfisme (4.5.3)
- rang d'una aplicació (3.3.1)
- redreçament d'un camp vectorial (5.6.5)
- referència de Frenet (9.4.7)
- relació d'equivalència regular (3.7.1)
- secció local d'una distribució tangent (7.1.3)
- segona forma fonamental escalar (9.4.6)

- segona forma fonamental vectorial (9.4.5)
- símbols de Christoffel (8.1.4)
- símbols de Christoffel de primera espècie (9.3.5)
- simplectomorfisme (10.4.2)
- simplectomorfisme infinitesimal (10.4.5)
- sistema de coordenades (1.1.2)
- sistema de Pfaff (7.5.5)
- sistema linealitzat d'una equació diferencial en un punt d'equilibri (5.6.7)
- subfibrat tangent (7.1.10)
- subgrup de Lie (A.2.4)
- subgrup uniparamètric d'un grup de Lie (A.2.17)
- subimmersió (3.5.9)
- submersió (3.3.2)
- subvarietat (3.1.1)
- subvarietat de \mathbf{R}^n (1.2.7)
- subvarietat immersa (3.6.1)
- subvarietat oberta (1.2.5)
- subvarietat regular (3.1.1)
- suma de dos camps tensorials (6.2.1)
- suma de dos camps vectorials (4.3.6)
- superfície (1.1.10)
- suport d'una funció (1.6.1)
- tensor de curvatura de Ricci (9.5.4)
- tensor de curvatura de Riemann (9.5.1)
- tensor de curvatura d'una connexió (8.5.5)
- tensor de Poisson (10.5.5)
- tensor de torsió d'una connexió (8.5.1)
- teorema de Chow–Rashevski (7.6.3)
- teorema de Darboux (10.1.8)
- teorema de Darboux generalitzat (10.3.13)
- teorema de descomposició de Weinstein (10.5.15)
- teorema de Frobenius (7.3.1)
- teorema de Godement (3.7.7)
- teorema de Grobman–Hartman (5.6.8)
- teorema de Hopf–Rinow (9.6.6)
- teorema de la funció implícita (A.1.5)
- teorema de la funció inversa (3.3.4)
- teorema de la invariància de la dimensió (1.1.1)
- teorema de Li Hua Zhong (10.2.8)
- teorema de Liouville (10.2.5)
- teorema de l'òrbita (7.6.2)
- teorema del rang constant (3.5.11)
- teorema del valor regular (3.5.5)
- teorema d'embedding de Nash (9.4.8)
- teorema de redreçament de camps vectorials (5.6.5)
- teorema d'existència de particions de la unitat (1.7.8)
- teorema d'existència i unicitat per a equacions diferencials (5.2.5)
- teorema d'extensió de funcions (3.2.6)
- teorema d'*embedding* de Whitney (3.6.8)
- teorema fonamental sobre el flux d'un camp vectorial (5.3.4)
- torsió d'una connexió (8.5.1)
- transformació canònica (10.4.6)
- transport paral·lel d'un vector al llarg d'un camí (8.4.3)
- valència d'una transformació canònica (10.4.9)
- valor crític d'una aplicació (3.5.4)
- valor regular d'una aplicació (3.5.4)
- varietat analítica (1.1.13)
- varietat de classe C^r (1.1.13)
- varietat de Poisson (10.5.1)
- varietat diferenciable (1.1.9)
- varietat geodèsicament completa (9.6.5)
- varietat integral d'una distribució tangent (7.2.1)
- varietat integral maximal d'una distribució (7.3.9)
- varietat lorentziana (9.1.4)

varietat orientable (A.3.3)
varietat paral·lelitzable (4.3.10)
varietat producte (1.2.8)
varietat pseudoriemanniana (9.1.4)
varietat quocient (3.7.3)
varietat riemanniana (9.1.4)
varietat riemanniana plana (9.5.2)
varietats difeomorfes (1.4.2)
varietat simplèctica (10.1.2)
varietat simplèctica exacta (10.1.3)
varietat topològica (1.1.13)

vector cotangent (2.6.1)
vector tangent (2.1.4)
vector tangent a una subvarietat (3.4.1)
vector tangent coordinat (2.3.1)
vector tangent d'un camí en un instant (2.4.10)
vector tangent unitat a \mathbf{R} (2.4.8)
velocitat d'un camí (5.1.2)
velocitat d'un camí en un instant (2.4.10)
volum riemannià (9.2.5)

Índex de notacions

En aquesta llista recollim notacions usades, habitualment o esporàdicament, al llarg de l'assignatura, començant per algunes notacions d'àlgebra lineal, càlcul i alguns conjunts específics.

S'ha d'entendre que algunes notacions emprades són circumstancials i podrien ser canviades tranquil·lament per d'altres igual de raonables (exemple: hem escrit habitualment les expressions locals com \widehat{F} , però \widetilde{F} , o $F_{\psi,\varphi}$, també serien bones opcions). Mentre que d'altres notacions han estat triades per designar construccions concretes de manera precisa, i a vegades amb la intenció d'evitar confusions (exemple: l'aplicació tangent $T_p F$ és designada en alguns textos per $(F_*)_p$, $(dF)_p$, ... i a vegades sense especificar el punt). En l'explicació de les notacions ometem especificar la diferenciabilitat necessària per portar a terme les operacions que s'esmenten.

| | |
|--|--|
| $\mathcal{L}in(E, F)$, $\text{Hom}(E, F)$ | espai de les aplicacions lineals entre dos espais vectorials |
| $E^* = \mathcal{L}in(E, K)$ | espai dual d'un K -espai vectorial E |
| $\langle \alpha, u \rangle = \alpha \cdot u = \alpha(u)$ | contracció d'un covector $\alpha \in E^*$ i un vector $u \in E$ |
| ${}^t T: F^* \rightarrow E^*$ | aplicació transposada d'una aplicació lineal $T: E \rightarrow F$ |
| $Df(x): E \rightarrow F$ | derivada (o diferencial) en x d'una aplicació f entre oberts d'espais vectorials reals E i F |
| $D_{(x, \mathbf{u})} f$ | derivada direccional de f en x segons el vector \mathbf{u} |
| $D_i f$, $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ | derivada parcial de $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ respecte a la i -èsima variable |
| $Jf(x) = (D_i f^j)$ | matriu jacobiana de $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ |
| $Df(t_0)$, $\left. \frac{d}{dt} \right _{t_0} f$ | derivada de $f: \mathbf{R} \rightarrow F$ en t_0 (considerada com a element de F) |
| S_n | esfera n -dimensional |
| $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$, \mathbf{P}_n | espai projectiu real n -dimensional |
| \mathbf{T}^n | tor n -dimensional |
| $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ | conjunt de les matrius quadrades d'ordre n amb coeficients reals |
| $\text{GL}_n(\mathbf{R})$, $\text{GL}(n, \mathbf{R})$ | grup lineal (en n variables sobre \mathbf{R}) |
| $\text{SL}_n(\mathbf{R})$, $\text{SL}(n, \mathbf{R})$ | grup lineal especial |
| $\text{O}_n(\mathbf{R})$, $\text{O}(n, \mathbf{R})$ | grup ortogonal |

$\text{SO}_n(\mathbf{R}), \text{SO}(n, \mathbf{R})$

grup ortogonal especial

Tema 1

(U, φ)

carta d'una varietat

$\dim M$

dimensió d'una varietat M

$M \times N$

varietat producte de dues varietats

\widehat{F}

expressió local d'una aplicació $F: M \rightarrow N$ respecte a cartes de M i N

$\mathcal{C}^\infty(M, N)$

conjunt de les aplicacions diferenciables entre les varietats M i N

$\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{F}(M)$

\mathbf{R} -àlgebra de les $\mathcal{C}^\infty(M)$ reals diferenciables en M

$F^*(g)$

imatge recíproca o pull-back d'una funció $g: N \rightarrow \mathbf{R}$ per una aplicació $F: M \rightarrow N$

Tema 2

$\mathcal{C}_{M,p}$

conjunt dels camins en M que passen per p a $t = 0$

$T_p M$

espai tangent a la varietat M en un punt p

$\theta_{\varphi,p}: T_p M \rightarrow \mathbf{R}^m$

bijecció $[\gamma] \mapsto D\dot{\gamma}(0)$ definida per una carta (U, φ) en p

$T_p F$

aplicació tangent d'una aplicació F en p

$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, E_i^\varphi|_p$

vectors tangents coordinats en p associats a una carta φ amb funcions coordinades (x^i)

$\mathcal{L}_u f, u \cdot f, u(f)$

derivada d'una funció $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ segons un vector tangent $u \in T_p M$

$\lambda_p: V \rightarrow T_p V$

isomorfisme canònic entre un espai vectorial real finitodimensional V i el seu espai tangent en un punt p

$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0}, E|_{t_0}$

vector tangent unitat de \mathbf{R} en t_0

$\dot{\gamma}'(t), \dot{\gamma}(t)$

velocitat o vector tangent d'un camí $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}$ en $t \in I$

$\mathcal{D}_p(M)$

espai de les derivacions puntuals de $\mathcal{C}^\infty(M)$ en p

$T_p^* M$

espai cotangent a M en p

$d_p f, df(p)$

diferencial d'una funció $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ en un punt p

Tema 3

M/R

varietat quocient de M per una relació d'equivalència regular R

Tema 4

| | |
|--|---|
| $\tau_M: TM \rightarrow M$ | fibrat tangent de M |
| $\Phi: \tau_M^{-1}(U) \rightarrow \hat{U} \times \mathbf{R}^m$ | carta natural de la varietat TM definida per una carta $\varphi: U \rightarrow \hat{U}$ de M |
| TF | aplicació tangent de F |
| $\frac{\partial}{\partial x^i}, E_i^\varphi$ | camp vectorial coordinats definits per una carta φ amb funcions coordenades (x^i) |
| $\mathfrak{X}(M), \mathcal{T}^1(M)$ | $\mathcal{C}^\infty(M)$ -mòdul i \mathbf{R} -àlgebra de Lie dels camps vectorials diferenciables en M |
| $\frac{d}{dt}, \frac{d}{dx}, \frac{\partial}{\partial t}, \dots$ | camp vectorial unitat de \mathbf{R} |
| $\mathcal{L}_X f, X \cdot f, X(f)$ | derivada d'una funció f respecte a un camp vectorial X en M |
| $[X, Y]$ | parèntesi de Lie de dos camps vectorials |
| $X \underset{F}{\sim} Y$ | camps vectorials X, Y relacionats per una aplicació F |
| $F_*(X)$ | imatge directa o push-forward d'un camp vectorial X per un difeomorfisme F |
| $F^*(Y)$ | imatge recíproca o pull-back d'un camp vectorial Y per un difeomorfisme F |
| $\pi_M: T^*M \rightarrow M$ | fibrat cotangent de M |
| $\Phi^\vee: \pi_M^{-1}(U) \rightarrow \hat{U} \times \mathbf{R}^m$ | carta natural de la varietat T^*M definida per una carta $\varphi: U \rightarrow \hat{U}$ de M |
| $\Omega^1(M), \mathcal{T}_1(M)$ | $\mathcal{C}^\infty(M)$ -mòdul de les 1-formes diferenciables en M |
| df | diferencial d'una funció |
| $\langle \omega, X \rangle, \omega(X), i_X \omega$ | contracció d'una 1-forma diferencial ω i un camp vectorial X |
| $F^*(\omega)$ | imatge recíproca o pull-back d'una 1-forma diferencial ω per una aplicació F |
| $F_*(\theta)$ | imatge directa o push-forward d'una 1-forma diferencial θ per un difeomorfisme F |

Tema 5

| | |
|-----------|--|
| γ' | velocitat o derivada d'un camí, aixecament canònic d'un camí en M al fibrat tangent TM |
|-----------|--|

| | |
|--|---|
| $\gamma_p: I_p \rightarrow M$ | corba integral maximal d'un camp vectorial amb condició inicial $(0, p)$ |
| $F_X: \mathcal{D}_X \rightarrow M$ | flux d'un camp vectorial X ($\mathcal{D}_X \subset \mathbf{R} \times M$) |
| $F'_X: \mathcal{D}_X \rightarrow \text{TM}$ | vector tangent de F_X respecte a la variable temporal t |
| $F_X^t: M_t \rightarrow M_{-t}$ | difeomorfismes definits pel flux d'un camp vectorial X |
| \mathcal{O}_p | òrbita de p per un grup de transformacions |
| Tema 6 | |
| $R(p), R_p$ | valor d'un camp tensorial R en un punt p |
| $R(X_1, \dots, X_\ell, \theta_1, \dots, \theta_k)$ | acció d'un camp tensorial de tipus (k, ℓ) sobre k 1-formes diferencials i ℓ camps vectorials |
| $R + S, fR$ | suma de dos camps tensorials, producte d'una funció per un camp tensorial |
| $\mathcal{T}_\ell^k(M)$ | $\mathcal{C}^\infty(M)$ -mòdul dels camps tensorials k -contravariants ℓ -covariants diferenciables en M |
| $R \otimes S$ | producte tensorial de dos camps tensorials |
| $\mathcal{T}^\bullet(M)$ | $\mathcal{C}^\infty(M)$ -àlgebra dels camps tensorials diferenciables |
| $\mathcal{T}^\bullet(M)$ | $\mathcal{C}^\infty(M)$ -àlgebra dels camps tensorials diferenciables contravariants |
| $\mathcal{T}_\bullet(M)$ | $\mathcal{C}^\infty(M)$ -àlgebra dels camps tensorials diferenciables covariants |
| $c_j^i(R)$ | contracció de l' i -èsim índex contravariant amb el j -èsim índex covariant d'un camp tensorial homogeni mixt |
| $F^*(S)$ | imatge recíproca o pull-back d'un camp tensorial covariant S per una aplicació F , o d'un camp tensorial qualsevol per un difeomorfisme |
| $F_*(R)$ | imatge directa o push-forward d'un camp tensorial R per un difeomorfisme F |
| $\Omega^k(M)$ | $\mathcal{C}^\infty(M)$ -mòdul de les k -formes diferencials diferenciables en M |
| $\alpha \wedge \beta$ | producte exterior de dues formes diferencials |
| $\Omega^\bullet(M)$ | $\mathcal{C}^\infty(M)$ -àlgebra de les formes diferencials diferenciables en M |
| $i_X \alpha, i(X)\alpha, X \lrcorner \alpha$ | contracció d'una forma diferencial α amb un camp vectorial X |

$d\alpha$ diferencial exterior d'una forma diferencial α
 $\mathcal{L}_X R$ derivada de Lie d'un camp tensorial R respecte a un camp vectorial X

Tema 7

$\mathfrak{X}_{\text{loc}}(M)$ conjunt dels camps vectorials locals diferenciables de M
 $D|_U$ distribució tangent induïda sobre una subvarietat oberta $U \subset M$ per una distribució tangent D en M
 $\text{Sec}_{\text{loc}}(D)$ conjunt de les seccions locals diferenciables d'una distribució tangent D
 $\text{Dist}(\mathcal{V})$ distribució tangent generada per un conjunt de camps vectorials locals \mathcal{V}
 D° codistribució anihiladora d'una distribució tangent D

Tema 8

∇ operador de derivació covariant
 Γ_{ij}^k símbols de Christoffel d'una connexió
 $\nabla_t \equiv \nabla_t^\gamma$ operador de derivació covariant al llarg d'un camí γ (t , paràmetre)
 T operador de torsió d'una connexió
 R operador de curvatura d'una connexió

Tema 9

\hat{g} isomorfisme musical definit per una mètrica g
 $\text{grad } f$ gradient d'una funció f respecte a una mètrica
 v_g volum riemannianà definit per una mètrica
 $[ij, k]$ símbols de Christoffel de primera espècie
 II segona forma fonamental d'una subvarietat d'una varietat riemanniana
 h segona forma fonamental escalar d'una hipersuperfície
 S aplicació de Weingarten o operador de forma
 K, H curvatures gaussiana i mitjana
 Rie tensor de Riemann
 Ric tensor de Ricci
 S curvatura escalar

$\ell(\gamma)$ longitud d'un camí γ en una varietat riemanniana
 $d(p, q)$ distància riemanniana

Tema 10

$\hat{\omega}$ isomorfisme musical definit per una forma simplèctica ω
 X_h camp vectorial hamiltonià, o gradient simplèctic, d'una funció h respecte a una forma simplèctica
 $\mathfrak{X}_h(M) \subset \mathfrak{X}_{\text{lh}}(M)$ camps vectorials hamiltonians i localment hamiltonians d'una varietat simplèctica M
 $\{f, g\}$ claudàtor de Poisson, o parèntesi de Poisson, de les funcions f, g en una varietat simplèctica
 $\hat{\Lambda}$ isomorfisme musical definit per un tensor de Poisson Λ

Complements

$\partial/\partial t$ camp vectorial en $\mathbf{R} \times M$ deduït del camp vectorial unitat de \mathbf{R}
 L_g, R_g translacions per l'esquerra i per la dreta definides per un element $g \in G$ d'un grup de Lie
 X_u camp vectorial invariant per l'esquerra definit per un vector tangent $u \in T_e G$ en un grup de Lie
 $\mathfrak{X}_L(G)$ \mathbf{R} -àlgebra de Lie dels camps vectorials invariants per l'esquerra en un grup de Lie G
 $\mathfrak{g}, \text{Lie}(G)$ àlgebra de Lie d'un grup de Lie G
 $\text{div}_\Omega X$ divergència d'un camp vectorial X respecte a una forma de volum ΩX
 γ'' aixecament canònic a TTM d'un camí γ en M
 θ_M, ω_M formes diferencials canòniques del fibrat cotangent de M
 \bar{X} suspensió d'un camp vectorial dependent del temps X
 $F(t, t_0, p) = F^{tt_0}(p)$ flux dependent del temps d'un camp vectorial dependent del temps