Varietats Diferenciables
Problemes

Grau de Matemàtiques
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

setembre 2016

Sumari

1 Varietats diferenciables **1**

2 Vectors tangents i cotangents **5**

3 Subvarietats i aplicacions **7**

4 Els fibrats tangent i cotangent **9**

5 Equacions diferencials i fluxos **13**

6 Camps tensorials **16**

8 Connexions **21**

9 Varietats riemannianes **23**

1 Varietats diferenciables

Problemes bàsics

1. Sigui $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=1,2}$ l'atles de $\mathbf{S}_n$ donat per les projeccions estereogràfiques des dels pols. Calculeu l'expressió explícita (en coordenades de $\mathbf{R}^{n+1}$ o $\mathbf{R}^n$) de les aplicacions φ_1, $(\varphi_1)^{-1}$, φ_2, $(\varphi_2)^{-1}$. Comproveu que $\varphi_2 \circ (\varphi_1)^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2$ per a tot $p \in \mathbf{R}^n - \{0\}$.

2. A $\mathbf{S}_1$ es consideren els atles:

   (a) $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=1,2}$, on

   $$\varphi_1^{-1}\colon]0, 2\pi[\to U_1 = \mathbf{S}_1 - \{(1,0)\}, \qquad \varphi_2^{-1}\colon]-\pi, \pi[\to U_2 = \mathbf{S}_1 - \{(-1,0)\}$$

   estan definides per $\varphi_j^{-1}(t) = (\cos t, \sin t)$.

   (b) $\{(V_j, \psi_j)\}_{j=1,\ldots,4}$, on $V_1 = \{(x,y) \in \mathbf{S}_1 \mid x > 0\}$, $V_2 = \{(x,y) \in \mathbf{S}_1 \mid y > 0\}$, $V_3 = \{(x,y) \in \mathbf{S}_1 \mid x < 0\}$, $V_4 = \{(x,y) \in \mathbf{S}_1 \mid y < 0\}$ i $\psi_1(x,y) = y = \psi_3(x,y)$, $\psi_2(x,y) = x = \psi_4(x,y)$.

   (a) Proveu que ambdós donen estructura diferenciable a $\mathbf{S}_1$.

   (b) Compareu aquestes dues estructures, entre sí i amb la donada per la projecció estereogràfica.

3. Es recorda que un subconjunt $M \subset \mathbf{R}^n$ es diu subvarietat (de classe C^∞) si, per a cada punt $x \in M$, existeixen un obert U de $\mathbf{R}^n$ contenint x, i un difeomorfisme de classe C^∞ $\psi\colon U \to V$, tals que $\psi(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^m \times \{0\}) = T$.

   (a) Proveu que la restricció de ψ, considerada com a aplicació $\psi_o\colon U \cap M \to T \subset \mathbf{R}^m$, és una carta de M.

   (b) Proveu que aquestes cartes defineixen sobre M una estructura de varietat diferenciable.

4. Proveu que l'estructura diferenciable de $\mathbf{S}_2$ definida per les projeccions estereogràfiques i la que té com a subvarietat de $\mathbf{R}^3$ coincideixen.

5. Sigui $M = f^{-1}(0) \subset \mathbf{R}^2$, on $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ és l'aplicació definida per $f(x,y) = (x^2/4) - y^2 + y^4$. Considerem en M la topologia induïda per la de $\mathbf{R}^2$. És M una subvarietat diferenciable de dimensió 1 de $\mathbf{R}^2$? Trobeu l'obert $N \subset M$ que és una subvarietat diferenciable de dimensió 1 de $\mathbf{R}^2$ i que és maximal amb aquestes propietats.

6. Siguin $I_1 =]0, 2\pi[$, $I_2 =]-\pi, \pi[$ i

   $$\begin{array}{rccc} \Phi_j\colon & I_j & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\sin 2t, \sin t) \end{array} \qquad (j = 1, 2)$$

   Considerem en $E_j = \Phi_j(I_j)$ la topologia induïda per Φ_j.

   (a) Proveu que, d'aquesta manera, es pot dotar E_1 i E_2 d'estructura de varietat diferenciable.

   (b) Coincideixen E_1 i E_2, com a subconjunts de $\mathbf{R}^2$? I com a espais topològics?

   (c) Proveu que E_1 i E_2 són difeomorfes.

7. Definim la banda de Möbius com l'espai quocient M de $[0, 2\pi] \times]-1, 1[$ per la relació $\sim$ que identifica cada punt amb ell mateix i, a més, $(0, y) \sim (2\pi, -y)$, per a tot $y \in]-1, 1[$. Doneu una estructura diferenciable a M.

8. Siguin $M \subset \mathbf{R}^n$ una subvarietat i $f\colon M \to \mathbf{R}$ una funció real. Proveu que f és una funció de classe C^k sobre la varietat diferenciable M si i només si per a tot punt $x_0 \in M$ existeixen un veïnat obert U dins $\mathbf{R}^n$ i una funció $F\colon U \to \mathbf{R}$ de classe C^k tals que f i F coincideixen sobre $U \cap M$.

   Conclogueu-ne l'enunciat següent:

   Sigui $F\colon W \to \mathbf{R}$ una funció, on $W \subset \mathbf{R}^n$ obert, i $M \subset W$ una subvarietat; si F és de classe C^k, llavors $F|_M$ és una funció de classe C^k sobre la varietat M. En particular, les funcions $\pi^i\colon M \to \mathbf{R}$, $\pi^i(x) = x^i$, són C^∞.

9. Sigui h la funció "alçada" sobre $\mathbf{S}_2$, $h(x,y,z) = z$. Proveu que és una funció C^∞ de dues maneres diferents.

10. Siguin $M \subset \mathbf{R}^m$, $N \subset \mathbf{R}^n$ subvarietats, i $f\colon M \to N$ una aplicació. Proveu que f és una aplicació de classe C^k entre les varietats M i N si i només si per a tot punt $x_0 \in M$ existeixen un veïnat obert U dins $\mathbf{R}^m$ i una funció $F\colon U \to \mathbf{R}^n$ de classe C^k tals que f i F coincideixen sobre $U \cap M$.

    Conclogueu-ne l'enunciat següent:

    Sigui $F\colon U \to V$ una funció, on $U \subset \mathbf{R}^m$ i $V \subset \mathbf{R}^n$ són oberts. Siguin $M \subset U$, $N \subset \mathbf{R}^n$ subvarietats. Proveu que, si F és de classe C^k, llavors $F|_M\colon M \to N$ és de classe C^k entre les varietats M i N.

11. Suposeu que $f\colon U \to V$ és un difeomorfisme de classe C^∞ entre dos oberts de $\mathbf{R}^n$, i sigui $M \subset U$ una subvarietat. Proveu $f(M)$ és subvarietat i que $f|_M\colon M \to f(M)$ és un difeomorfisme.

12. Proveu de dues maneres que l'aplicació antipodal $h(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ és un difeomorfisme de $\mathbf{S}_n$ en $\mathbf{S}_n$.

13. Sigui $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 + y^2 = z^2 + t^2 = 1\}$.

    (a) Proveu que T és una subvarietat de $\mathbf{R}^4$ i doncs té una estructura de varietat diferenciable.

    (b) Compareu aquesta estructura diferenciable amb la que resulta de considerar T com a la varietat producte $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$.

    (c) Donats $r, R \in \mathbf{R}$ amb $R > r > 0$, considerem la funció $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definida per

    $$F(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 - r^2.$$

    Comproveu que $M = F^{-1}(0)$ és una subvarietat.

    (d) Proveu que M i T són varietats difeomorfes.

14. Siguin $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, |z| < 1\}$, i F l'aplicació:

    $$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x^2 - y^2, 2xy, z) \end{array}$$

    (a) Proveu que M és una varietat diferenciable.

    (b) Proveu que F indueix una aplicació $F|_M$ de M en M. És un difeomorfisme, $F|_M$?

15. Proveu que és un difeomorfisme de $\mathbf{S}_2$ en $\mathbf{S}_2$ la restricció a l'esfera de l'aplicació

    $$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x \cos z - y \sin z, x \sin z + y \cos z, z) \end{array}$$

16. Un *grup de Lie* és un conjunt G dotat amb les estructures de grup i de varietat diferenciable, i tal que el producte i la inversió

    $$\begin{array}{rccc} \mu\colon & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (g, h) & \longmapsto & g\,h \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \iota\colon & G & \longrightarrow & G \\ & g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

    són aplicacions diferenciables.

    (a) Proveu que el producte i la inversió són diferenciables si i només si ho és l'aplicació χ,

    $$\begin{array}{rccc} \chi\colon & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (g, h) & \longmapsto & gh^{-1} \end{array}$$

    (b) Si G és un grup de Lie i g un element de G, proveu que és un difeomorfisme la *translació per l'esquerra*, L_g:

    $$\begin{array}{rccc} L_g\colon & G & \longrightarrow & G \\ & h & \longmapsto & g\,h \end{array}$$

17. Proveu que els grups següents són grups de Lie. Digueu també si són connexos i si són compactes.

    (a) El grup lineal $\mathsf{GL}(n, \mathbf{R})$.

    (b) El grup ortogonal $\mathsf{O}(2, \mathbf{R})$.

    (c) El grup especial lineal $\mathsf{SL}(2, \mathbf{R})$.

Problemes addicionals

18. Sigui $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x,y \in\,]0,1[\}$. Per a cada $s \in\,]0,1[$ definim $U_s = \{(s,y) \in M\}$, i φ_s com a l'aplicació de $U_s \to\,]0,1[$ que envia (s,y) a y. Digueu en què és incorrecte el raonament següent: *"A M es considera l'atles $\{(U_s,\varphi_s)\}_{s\in]0,1[}$. Evidentment, les aplicacions φ_s són homeomorfismes. A més, els diferents U_s són disjunts, per tant no cal preocupar-se del canvi de coordenades. Així doncs, hem dotat M d'estructura de varietat diferenciable de dimensió 1."*

19. Siguin $U \subset \mathbf{R}^m$ obert, i $f\colon U \to \mathbf{R}^p$ una funció de classe C^∞. Proveu que U i el graf de f són varietats difeomorfes.

20. Digueu si són difeomorfes entre elles les superfícies següents: paraboloide el·líptic, esfera, paraboloide hiperbòlic, cilindre, pla, hiperboloide d'un full, pla sense un punt, mig con sense vèrtex, tor.

21. Considereu el grup especial lineal $\mathsf{SL}(2,\mathbf{R}) := \{M \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbf{R}) \mid \det(M) = 1\}$

    (a) Proveu que admet una estructura de varietat diferenciable de dimensió 3.

    (b) Proveu que l'aplicació
    $$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathsf{SL}(2,\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \frac{b+a\,i}{d+c\,i} \end{array}$$
    és C^∞ i té per imatge el semiplà $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$. (A $\mathbf{C}$ es considera l'estructura de varietat diferenciable real que s'obté identificant-lo amb $\mathbf{R}^2$).

22. *El grup de Lie* $\mathbf{S}_3$

    Recordem primer que el *cos dels quaternions* de Hamilton es construeix prenent $\mathbf{H} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^4$ amb la suma ordinària i el producte
    $$(\xi,\mathbf{x})(\eta,\mathbf{y}) = (\xi\eta - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}, \xi\mathbf{y} + \eta\mathbf{x} + \mathbf{x}\times\mathbf{y}),$$
    on $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ són els productes escalar i vectorial de $\mathbf{R}^3$.

    Es comprova que així es defineix un cos no commutatiu amb unitat $1 = (1,\mathbf{0})$, i que l'invers de x és $x^{-1} = \dfrac{\bar{x}}{|x|^2}$, on, si $x = (\xi,\mathbf{x})$,
    $$\bar{x} = (\xi,-\mathbf{x}) \qquad |x| = (x\bar{x})^{1/2} = \sqrt{\xi^2 + \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \|x\| \quad \text{(norma euclidiana de } \mathbf{R}^4\text{)}$$
    designen el *conjugat* i el *mòdul* de x. Els quaternions de mòdul 1 són els punts de l'esfera $\mathbf{S}_3$.

    (a) Proveu que $\mathbf{S}_3$ és un subgrup del grup multiplicatiu $\mathbf{H}^*$, i que és un grup de Lie.

    (b) Es consideren $H^+ = \{(\xi,\mathbf{x}) \in \mathbf{S}_3 \mid \xi > 0\}$ i l'aplicació $v\colon H^+ \to v(H^+) \subset \mathbf{R}^3$ definida per $v(\xi,\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.
    Proveu que (H^+,v) és una carta de $\mathbf{S}_3$.

    (c) Designem per μ la multiplicació de $\mathbf{S}_3$. Proveu que existeix un obert $U \subset H^+$ contenint el neutre i tal que $\mu(U\times U) \subset H^+$.

    (d) Calculeu l'expressió local de μ sobre $U \times U$ en la carta (H^+,v).

    (e) Designem per ι la inversió de $\mathbf{S}_3$. Proveu que ι deixa H^+ invariant i calculeu l'expressió local de ι en la carta (H^+,v).

Indicacions i respostes

1. Si $U_1 = \mathbf{S}_n - \{(0,\dots,0,1)\}$, aleshores:
$$\varphi_1(x_1,\dots,x_{n+1}) = \tfrac{(x_1,\dots,x_n)}{1-x_{n+1}}, \quad (\varphi_1)^{-1}(y_1,\dots,y_n) = \tfrac{(2y_1,\dots,2y_n,y_1^2+\dots+y_n^2-1)}{y_1^2+\dots+y_n^2+1}$$
$$\varphi_2(x_1,\dots,x_{n+1}) = \tfrac{(x_1,\dots,x_n)}{1+x_{n+1}}, \quad (\varphi_2)^{-1}(y_1,\dots,y_n) = \tfrac{(2y_1,\dots,2y_n,1-y_1^2-\dots-y_n^2)}{1+y_1^2+\dots+y_n^2}$$

4. Considereu, per exemple, $U = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 < 0, z > 0\}$, i $\psi\colon U \to V = \psi(U)$ definida per $\psi(x,y,z) = (x,y,z-\sqrt{1-x^2-y^2})$; és un difeomorfisme tal que $\psi(U\cap\mathbf{S}_2) = V \cap (\mathbf{R}^2\times\{0\})$. Posant $H = U \cap \mathbf{S}_2$ i definint $\phi\colon H \to \psi(H) \subset \mathbf{R}^2\times\{0\} = \mathbf{R}^2$ obtenim una carta de $\mathbf{S}_2$ com a subvarietat de $\mathbf{R}^3$. D'aquesta manera s'obté un atles format per sis cartes.

5. b) No, M no és subvarietat diferenciable. (Dibuixeu-la!)
6. b) Sí com a subconjunts, però no com a espais topològics. c) Restringiu l'aplicació $F(x, y) = (x, -y)$.
8. Mitjançant un difeomorfisme ψ convertiu localment M en un obert d'un subespai m-dimensional; una funció sobre aquest s'estén trivialment a una funció de n variables.
10. Procediu com al problema 8.
14. b) No, no és injectiva.
17. a) Ni connex ni compacte. b) No connex, sí compacte. c) Connex, no compacte.
18. Falla una condició topològica a U_s.

2 Vectors tangents i cotangents

Problemes bàsics

1. Els tres camins següents compleixen que $\gamma_j(0) = (0,1,0) =: p$.

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1\colon & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (t, 1+t^2, t) \end{array} \quad \begin{array}{rccc} \gamma_2\colon & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (\sin t, \cos t, t) \end{array} \quad \begin{array}{rccc} \gamma_3\colon & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (\sinh t, \cosh t, t) \end{array}$$

   (a) Comproveu que tots tres defineixen el mateix vector tangent en p.

   (b) Deriveu, en p, la funció $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$, respecte de cadascun dels camins.

2. Siguin F l'aplicació antipodal de $\mathbf{S}_2$, $p_1 = (0,0,1)$, $p_2 = (0,0,-1)$, $p_3 = (1,0,0)$ i $p_4 = (-1,0,0)$:

   (a) Calculeu la matriu de $\mathrm{T}_{p_3}(F)$, considerant en p_3 la carta donada per la projecció estereogràfica des del pol nord i en p_4 la que correspon a la projecció des del pol sud.

   (b) El mateix, però ara considerant en tots dos punts la primera de les cartes esmentades.

   (c) El mateix per a $\mathrm{T}_{p_1}(F)$, utilitzant les cartes definides per les projeccions estereogràfiques apropiades.

   (d) Interpreteu geomètricament (dibuixant el pla tangent de l'esfera dins de $\mathbf{R}^3$) les aplicacions dels apartats precedents.

3. Sigui $M \subset \mathbf{R}^n$ una subvarietat. Justifiqueu que $\mathrm{T}_p(M)$ s'identifica a un subespai de $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n) = \{p\} \times \mathbf{R}^n$ mitjançant l'aplicació $j\colon \mathrm{T}_pM \to \{p\} \times \mathbf{R}^n$ següent: si $\gamma\colon I \to M$ és un camí C^1 tal que $\gamma(0) = p$, i el considerem com a aplicació amb valors en $\mathbf{R}^n$, llavors $j([\gamma]) = (\gamma(0), \mathrm{D}\gamma(0))$.

4. (a) Sigui $f\colon \mathsf{GL}(n,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ donada per $f(A) = \det A$. Proveu que $\mathrm{d}_p f \neq 0$ per a tot $p \in \mathsf{GL}(n,\mathbf{R})$.

   (b) Proveu que la mateixa funció, ara definida de $\mathsf{SL}(n,\mathbf{R})$ en $\mathbf{R}$, té diferencial nul·la arreu.

   (c) Sigui $g\colon \mathsf{SL}(2,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ donada per $g(A) = \mathrm{tr}(A)$. Proveu que $\mathrm{d}_p g = 0$ si $p = \mathrm{I}d$. Significa això que g té un extrem en p?

5. Considerem el grup de Lie $G = \mathsf{SL}(2,\mathbf{R})$. Sigui $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$ l'espai vectorial de les matrius 2×2 amb coeficients reals que tenen traça 0.

   (a) Si $e = \mathrm{I}d$, proveu que $\mathrm{T}_e(G)$ és un espai vectorial isomorf a $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$.

   (b) Doneu una base de $\mathrm{T}_g(G)$, on $g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Descriviu l'aplicació $\mathrm{T}_e(L_g)$ (e, g com abans, L_g la translació per l'esquerra) i proveu que és un isomorfisme.

6. Considerem M_1, M_2 varietats, la varietat producte $M_1 \times M_2$ i un punt $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ d'aquesta varietat.

   (a) Raoneu que podem identificar $\mathrm{T}_p(M_1 \times M_2)$ amb $\mathrm{T}_{p_1}M_1 \times \mathrm{T}_{p_2}N_2$ mitjançant $[\gamma] = [(\gamma_1, \gamma_2)] \mapsto ([\gamma_1], [\gamma_2])$.

   (b) Sigui N una varietat. Una aplicació $F\colon N \to M_1 \times M_2$ es pot expressar com $F(q) = (F_1(q), F_2(q))$. Proveu que l'aplicació F és diferenciable si i només si ho són F_1 i F_2. Proveu també que, per a cada punt $q \in N$, podem identificar T_qF amb $(\mathrm{T}_qF_1, \mathrm{T}_qF_2)$.

   (c) Siguin $G\colon M_1 \times M_2 \to N$ una aplicació diferenciable i $v = (v_1, v_2) = ([\gamma_1], [\gamma_2]) \in T_p(M_1 \times M_2)$ un vector tangent. Proveu $\mathrm{T}_pG \cdot v = \mathrm{T}_{p_1}G(\cdot, p_2) \cdot v_1 + \mathrm{T}_{p_2}G(p_1, \cdot) \cdot v_2$.

   (d) Considerem una funció diferenciable $f\colon M_1 \times M_2 \to \mathbf{R}$ una funció diferenciable. Proveu $\langle \mathrm{d}_p f, v\rangle = \langle \mathrm{d}_{p_1} f(\cdot, p_2), v_1\rangle + \langle \mathrm{d}_{p_2} f(p_1, \cdot), v_2\rangle$.

Problemes addicionals

7. Sigui M una varietat diferenciable, $\mathrm{C}^\infty(M)$ la seva àlgebra de funcions diferenciables, $p \in M$. Sigui F_p el conjunt de les funcions diferenciables definides en algun veïnat obert de p,

$$F_p = \{f \colon U \to \mathbf{R} \mid U \subset M \text{ obert}, \ p \in U, \ f \text{ diferenciable}\}.$$

Donades $f, f' \in F_p$, posarem $f \sim f'$ quan existeix un veïnat obert $W \ni p$ tal que f i f' coincideixen en W. Aquesta és clarament una relació d'equivalència. Les classes d'equivalència s'anomenen *gèrmens* de funcions diferenciables en p. Representem per $[f]$ el germen d'una funció f. I representem per $\mathcal{F}_p$ el conjunt dels gèrmens en p (el conjunt quocient de F_p).

   (a) Raoneu que la suma i el producte de funcions ordinàries permeten definir aquestes operacions amb gèrmens de funcions, amb les quals $\mathcal{F}_p$ és una $\mathbf{R}$-àlgebra.

   (b) Considerem ara l'aplicació $\gamma \colon \mathrm{C}^\infty(M) \to \mathcal{F}_p$ que, a cada funció f definida en tot M, li assigna el seu germen, $f \mapsto [f]$. Justifiqueu que és suprajectiva. És injectiva?

   (c) I considerem ara l'aplicació $\delta \colon \mathcal{F}_p \to \mathrm{T}^*_p M$ tal que $\delta[f] = \mathrm{d}_p f$ (diferencial de f en p). Justifiqueu que està ben definida.

   (d) Proveu que δ és suprajectiva.

   (e) L'aplicació $\alpha \colon \mathcal{F}_p \to \mathbf{R}$ tal que $[f] \mapsto f(p)$ (avaluació d'un germen en p) està clarament ben definida, i de fet és un morfisme de $\mathbf{R}$-àlgebres. Per tant el seu nucli $\mathfrak{m}_p = \operatorname{Ker} \alpha$ (el conjunt dels gèrmens que s'anul·len en p) és un ideal de $\mathcal{F}_p$. A partir d'ara restringim l'aplicació δ anterior a aquest ideal, $\delta \colon \mathfrak{m}_p \to \mathrm{T}^*_p M$. Justifiqueu que aquesta encara és suprajectiva.

   (f) Proveu que $\mathfrak{m}_p^2 = \operatorname{Ker} \delta$, d'on es dedueix que $\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \cong \mathrm{T}^*_p M$.

Indicacions i respostes

1. b) 0.
2. a) i c): $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; b): $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. c) No, p és un punt de sella.
5. b) Matrius de la forma $\begin{pmatrix} v_2 + v_3 - 2v_4 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$. c) En les bases: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathrm{T}_e(G)$ i $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathrm{T}_g(G)$, $\mathrm{T}_e(L_g)$ té matriu $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3 Subvarietats i aplicacions

Problemes bàsics

1. Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació C^∞ de rang constant, $q \in N$ un punt. Proveu que $M' = F^{-1}(q)$ és una subvarietat de M i que $\mathrm{T}_p(M') = \operatorname{Ker} \mathrm{T}_p(F)$ per a tot $p \in M'$.

2. Proveu que l'aplicació $c\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ definida per $c(\theta) = e^{i\theta}$ és una immersió. Raoneu que indueix un difeomorfisme local $c\colon \mathbf{R} \to \mathbf{S}_1$. Proveu que, per a cada interval obert $I \subset \mathbf{R}$ tal que $c|_I$ és injectiva, l'aplicació $(c|_I)^{-1}\colon c(I) \subset \mathbf{S}_1 \to I$ és una carta de $\mathbf{S}_1$.

3. Proveu que les coordenades polars ens donen cartes de $\mathbf{R}^2$ adaptades a la subvarietat $\mathbf{S}_1 \subset \mathbf{R}^2$.

4. Considereu l'aplicació $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definida per $F(z) = z^2$.
   (a) Proveu que F indueix un difeomorfisme local $f\colon \mathbf{S}_1 \to \mathbf{S}_1$ tal que $f(p) = f(q)$ si i només si $p = \pm q$.
   (b) Proveu que $\mathbf{S}_1$ és difeomorfa a la recta projectiva $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$. Per fer-ho seguiu els passos següents.
      i. Proveu que la projecció natural $\pi\colon \mathbf{R}^2 - \{0\} \to \mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ és una submersió suprajectiva. Proveu que el mateix passa amb la restricció $\pi\colon \mathbf{S}_1 \to \mathbf{P}_1(\mathbf{R})$ i que, per tant, aquesta és un difeomorfisme local.
      ii. Raoneu que existeix una única aplicació $f_0\colon \mathbf{P}_1(\mathbf{R}) \to \mathbf{S}_1$ tal que $f = f_0 \circ \pi$. Proveu que f_0 és bijectiva i difeomorfisme local i, doncs, un difeomorfisme.

5. De les aplicacions que s'esmenten, digueu quines de les característiques següents posseeixen: submersió, immersió, *embedding*, injecció i suprajecció.
   (a) L'aplicació $F|_M$, definida al cilindre, del problema 14 del tema 1.
   (b) L'aplicació $\det\colon \mathsf{GL}(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$.
   (c) L'aplicació traça en $\mathsf{SL}(2, \mathbf{R})$.
   (d) L'aplicació $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{S}_1$ donada per $f(t) = (\cos t, \sin t)$.
   (e) La injecció canònica $i\colon \mathbf{S}_4 \to \mathbf{R}^5$.

6. *El mètode dels multiplicadors de Lagrange*
   Siguin $V \subset \mathbf{R}^n$ un obert, i $f\colon V \to \mathbf{R}$ una funció C^1. Sigui $M \subset V$ una subvarietat definida com a $M = F^{-1}(0)$, on $F\colon V \to \mathbf{R}^p$ és una submersió. Sigui $f_0\colon M \to \mathbf{R}$ la restricció de f. Proveu que un punt $x_0 \in M$ és crític per a f_0 si i només si $\mathrm{d}_{x_0} f$ és combinació lineal de les $\mathrm{d}_{x_0} F^k$.

7. *Subgrups de Lie*
   Un *subgrup de Lie* d'un grup de Lie G és un subconjunt H que és subgrup i subvarietat.
   (a) Proveu que H és també un grup de Lie.
   (b) Doneu exemples de subgrups de Lie.
   (c) Proveu que si $H \subset G$ és un subgrup, per a comprovar que és una subvarietat basta veure-ho al voltant d'un punt (per exemple, el neutre).

8. *Morfismes de grups de Lie*
   Un *morfisme de grups de Lie* és una aplicació $f\colon G \to G'$ entre grups de Lie que és morfisme de grups i de varietats.
   (a) Proveu que f té rang constant.
   (b) Proveu que $\operatorname{Ker} f \subset G$ és un subgrup de Lie.
   (c) Considereu $f\colon \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $f(m, n) = m + n\theta$, on θ és irracional. Comproveu que és un morfisme de grups de Lie, però que la imatge no és una subvarietat regular de $\mathbf{R}$.

9. *El grup de Lie* $\mathsf{SL}(n, \mathbf{R})$
   (a) Proveu que $\mathsf{SL}(n, \mathbf{R}) \subset \mathsf{GL}(n, \mathbf{R})$ és un subgrup de Lie a partir de la funció determinant. Proveu també que té dimensió $n^2 - 1$.
   (b) Proveu que $\det(I + A) = 1 + \operatorname{tr} A + o(\|A\|)$.
   (c) Proveu que $\mathrm{D}\det(I) \cdot A = \operatorname{tr} A$.
   (d) Proveu que $\mathrm{T}_I(\mathsf{SL}(n, \mathbf{R}))$ s'identifica amb les matrius de traça nul·la.

Problemes addicionals

10. Sigui $f\colon]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}^2$, donada per $f(t) = \big(t\cos(1/t), t\sin(1/t)\big)$. Proveu que f és un *embedding*, però no és una aplicació tancada.

11. Proveu que el tor $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$ es pot identificar, per un *embedding*, amb una subvarietat de $\mathbf{R}^3$, i també amb una subvarietat de $\mathbf{R}^4$ que no està continguda en cap $\mathbf{R}^3 \subset \mathbf{R}^4$.

Indicacions i respostes

5. a) immersió, submersió i suprajectiva; b) submersió; c) suprajectiva; d) immersió, submersió i suprajectiva; e) immersió, *embedding* i injectiva.
7. c) Si $x \in H$, considereu la translació L_x, que és un difeomorfisme de G que aplica e en x.
8. a) Sigui $x \in G$. Observeu que $f = L_{f(x)} \circ f \circ L_x^{-1}$ i apliqueu la regla de la cadena per a obtenir una relació entre $\mathrm{T}_x(f)$ i $\mathrm{T}_e(f)$. b) Apliqueu el problema 1. c) La imatge és densa en $\mathbf{R}$.
11. Considereu constants $R > r > 0$ i $f(\phi,\theta) = ((R + r\cos\phi)\cos\theta, (R + r\cos\phi)\sin\theta, r\sin\phi)$.

4 Els fibrats tangent i cotangent

Problemes bàsics

1. Siguin M una varietat i $N \subset M$ una subvarietat.
   (a) Proveu que $\mathrm{T}N \subset \mathrm{T}M$ és una subvarietat.
   (b) Sigui $X \in \mathfrak{X}(M)$ un camp vectorial tal que $X_p \in \mathrm{T}_p(N)$ per a tot $p \in N$. Proveu que la restricció de X a N defineix un camp vectorial en N.

2. Siguin M una varietat i $N \subset M$ una subvarietat definida per l'anul·lació d'un sistema de lligams $f^1, \ldots, f^r \colon M \to \mathbf{R}$, linealment independents en tot punt de N. Proveu que un camp vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ és tangent a N si i només si $\mathcal{L}_X f^j$ s'anul·la en N per a tot $j = 1, \ldots, r$.

3. A l'esfera $\mathbf{S}_2$, hi considerem l'atles definit per les projeccions esterogràfiques, (U_j, φ_j), $j = 1, 2$, on $U_1 = \mathbf{S}_2 - \{(0,0,1)\}$, $U_2 = \mathbf{S}_2 - \{(0,0,-1)\}$, $\varphi_1 = (u_1, u_2)$, $\varphi_2 = (v_1, v_2)$. Un camp $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{S}_2)$ s'expressa sobre U_1 com a $(A\,u_1 - B\,u_2)\,\partial/\partial u_1 + (B\,u_1 + A\,u_2)\,\partial/\partial u_2$, on A i B són constants.
   (a) Trobeu l'expressió de X en la carta (U_2, φ_2).
   (b) Proveu que X s'anul·la en algun punt.
   (c) Calculeu la derivada segons X, en el punt $(0, -1, 0)$, de la restricció a $\mathbf{S}_2$ de la funció de $\mathbf{R}^3$ definida per $f(x, y, z) = z$.

4. Siguin $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, |z| < 1\}$ i F la restricció a M de la funció de $\mathbf{R}^3$ definida per $F(x, y, z) = (x^2 - y^2, 2xy, z)$.
   (a) Proveu que els camps vectorials de $\mathbf{R}^3$: $X = \partial/\partial z$ i $Y = -y\,\partial/\partial x + x\,\partial/\partial y$ restringeixen a camps tangents a M.
   (b) Estan X i Y F-relacionats amb ells mateixos?

5. Un camp vectorial en $\mathbf{R}^n$ es diu *lineal* si és de la forma $x \mapsto (x, Ax)$, per a certa matriu A. Denotem aquest camp per Λ_A. Proveu que $[\Lambda_A, \Lambda_B] = \Lambda_{[B,A]}$, on $[A, B] = AB - BA$ designa el commutador de les matrius A i B. (En altres paraules, l'aplicació $A \mapsto \Lambda_A$ és un antihomomorfisme d'àlgebres de Lie).

6. Sigui f el difeomorfisme de $\mathbf{R}^2$ definit per $f(x, y) = (-y, x)$. Sigui $X = u\,\partial/\partial x + v\,\partial/\partial y$ un camp vectorial en $\mathbf{R}^2$. Se suposa que X és invariant per f, és a dir, que $f_*(X) = X$.
   (a) Proveu que la condició de ser X f-invariant equival a $u(-x, -y) = -u(x, y)$ i $v(x, y) = -u(-y, x)$.
   (b) Què es pot dir dels punts crítics de X?
   (c) Determineu X suposant que és lineal.
   (d) Doneu un exemple de X que no sigui lineal.

7. Considereu els camps de $\mathbf{R}^2$: $X_1 = (x + y)\,\partial/\partial x - \partial/\partial y$, $X_2 = (y^2 + 1)\,\partial/\partial x + x\,\partial/\partial y$.
   (a) Proveu que generen el $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^2)$-mòdul $\mathfrak{X}(\mathbf{R}^2)$.
   (b) Expresseu el camp $Z = (x^2 + y^2)\,\partial/\partial x + (x^2 - y^2)\,\partial/\partial y$ com a combinació lineal de X_1 i X_2.
   (c) Calculeu $[X_1, X_2]$.

8. Considereu el camp vectorial $X = -y\partial/\partial x + x\,\partial/\partial y \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^2)$.
   (a) Proveu que X restringeix a un camp vectorial $X_0 \in \mathfrak{X}(S_1)$. Proveu que X_0 no s'anul·la enlloc i que, per tant, $\mathbf{S}_1$ és una varietat paral·lelitzable.
   (b) Trobeu la relació entre el camp vectorial X_0 i el camp vectorial $\partial/\partial\theta$ corresponent a les cartes locals de $\mathbf{S}_1$ introduïdes al Problema 2 del Tema 3.

9. Siguin $\omega = x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x \in \Omega^1(\mathbf{R}^2)$, i ω_0 el seu pull-back a $\mathbf{S}_1$.
   (a) Proveu que ω_0 no s'anul·la enlloc i és invariant per qualsevol gir.

(b) Existeix algun camp $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^2)$ tal que $\langle \omega, X \rangle = 1$?

(c) Existeix algun camp $X_0 \in \mathfrak{X}(\mathbf{S}_1)$ tal que $\langle \omega_0, X \rangle = 1$?

(d) Sigui $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{S}_1$ donada per $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Calculeu $f^*(\omega_0)$.

10. *Camps invariants en un grup de Lie*

Sigui G un grup de Lie. Un camp Y en G es diu *invariant per l'esquerra* quan, per a tot $g \in G$, Y és invariant per la translació per l'esquerra L_g, és a dir, Y està L_g-relacionat amb ell mateix, $\mathrm{T}(L_g) \circ Y = Y \circ L_g$.

(a) Fixem un vector tangent en el neutre, $u \in \mathrm{T}_e(G)$. Proveu que l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} X_u\colon & G & \longrightarrow & \mathrm{T}(G) \\ & g & \longmapsto & \mathrm{T}_e(L_g) \cdot u \end{array}$$

defineix un camp vectorial C^∞.

(b) Proveu que el camp vectorial X_u és invariant per l'esquerra.

(c) Deduïu-ne que tot grup de Lie és paral·lelitzable.

11. *L'àlgebra de Lie d'un grup de Lie*

Siguin G un grup de Lie, $\mathrm{T}_e(G)$ l'espai tangent al neutre i $\mathfrak{X}_L(G)$ el conjunt de camps vectorials invariants per l'esquerra.

(a) Proveu que l'aplicació $\mathfrak{X}_L(G) \to \mathrm{T}_e(G)$ definida per $X \mapsto X(e)$ és un isomorfisme d'espais vectorials.

(b) Proveu que els camps invariants per l'esquerra constitueixen una subàlgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$.

L'isomorfisme donat per l'apartat (a) permet transportar l'estructura d'àlgebra de Lie dels camps invariants als vectors tangents en el neutre. Es diu que $\mathfrak{X}_L(G)$, o $\mathrm{T}_e(G)$, és l'*àlgebra de Lie* de G, i es denota sovint per $\mathfrak{g}$.

12. *L'àlgebra de Lie del grup lineal*

El grup lineal $\mathsf{GL}(m, \mathbf{R})$ és un obert de l'espai vectorial $\mathsf{M}_m(\mathbf{R})$. Per tant la seva àlgebra de Lie $\mathfrak{gl}(m, \mathbf{R})$ s'identifica amb l'espai vectorial $\mathrm{T}_I(\mathsf{GL}(m, \mathbf{R})) \cong \mathsf{M}_m(\mathbf{R})$.

Donat $u \in \mathsf{M}_m(\mathbf{R})$, sigui X_u el camp invariant per l'esquerra definit per u (problema 16).

(a) Proveu que $X_u(g) = (g, gu)$.

(b) Proveu que $[X_u, X_v] = X_{[u,v]}$. (En altres termes, es pot identificar $\mathfrak{gl}(m, \mathbf{R})$ amb l'àlgebra de Lie $\mathsf{M}_m(\mathbf{R})$.)

13. Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació de classe C^2.

(a) Donades cartes de M i N, calculeu la matriu de l'aplicació tangent $\mathrm{T}_{u_p}(\mathrm{T}F)$, on $u_p \in \mathrm{T}M$, en les bases de vectors tangents coordenats associades a les cartes naturals corresponents de $\mathrm{T}M$ i $\mathrm{T}N$.

(b) Proveu que si F és una immersió (o submersió, o difeomorfisme local), aleshores $\mathrm{T}F$ també ho és

14. Sigui M una varietat diferenciable.

(a) Si $\alpha \in \Omega^1(M)$, sigui $\widetilde{\alpha}\colon \mathrm{T}M \to \mathbf{R}$ la funció definida per $\widetilde{\alpha}(u_p) = \alpha_p(u_p)$. Trobeu l'expressió local de $\widetilde{\alpha}$ en una carta natural de $\mathrm{T}M$ a partir de l'expressió local de α. Proveu que $\widetilde{\alpha}$ és de classe C^∞.

(b) Si $h \in \mathrm{C}^\infty(M)$, es defineix $h^{\mathrm{T}} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}M)$ per $h^{\mathrm{T}} = \widetilde{\mathrm{d}h}$. Trobeu l'expressió local de h^{T}.

(c) Doneu un exemple de funció $f\colon \mathrm{T}\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, de classe C^∞, que sigui lineal en les velocitats però que no sigui del tipus h^{T}.

(d) Sigui $Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}M)$ tal que, per a tota funció $h \in \mathrm{C}^\infty(M)$, $\mathcal{L}_Y h^{\mathrm{T}} = 0$. Proveu que $Y = 0$.

Problemes addicionals

15. Sigui M una varietat, amb fibrat tangent $\mathrm{T}M$. Proveu que $\pi\colon \mathrm{T}M \to M$ és una submersió i que cada espai tangent $\mathrm{T}_p(M)$ és una subvarietat de $\mathrm{T}M$.

16. Proveu que el fragment de con $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 = z^2, z > 0\}$ és una varietat diferenciable paral·lelitzable, i doneu-ne una base global de camps vectorials.

17. Siguin M una varietat i $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Proveu que, com a operador diferencial, en general $XY \notin \mathfrak{X}(M)$.

18. Donats una varietat M i $X \in \mathfrak{X}(M)$, justifiqueu si és cert o fals que:
    (a) Si U és un obert de M i $X_p = 0$ en tot $p \in U$, aleshores $[X, Y]_p = 0$, per a qualssevol $Y \in \mathfrak{X}(M)$ i $p \in U$.
    (b) Si $\gamma\colon I \to M$ és un camí i $X_{\gamma(t)} = 0$ per a tot $t \in I$, aleshores $[X, Y]_{\gamma(t)} = 0$ per a tot $Y \in \mathfrak{X}(M)$ i $t \in I$.
    (c) Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ i $X_p = Y_p = 0$, aleshores $[X, Y]_p = 0$.

19. Sigui $M = \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Proveu que una forma diferencial $\sigma \in \Omega^1(M)$ és el *pull-back* d'una forma de $\Omega^1(\mathbf{S}_1)$ respecte de la projecció

$$\begin{array}{rccc} \pi\colon & M & \longrightarrow & \mathbf{S}_1 \\ & p & \longmapsto & p/\|p\| \end{array}$$

si i només si és del tipus $\sigma = f(x, y)\,\big(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x\big)$ on f és una funció homogènia de grau -2.

20. Proveu que una forma diferencial $\omega \in \Omega^1(\mathbf{S}_2)$ que sigui invariant per tota rotació de l'espai $\mathbf{R}^3$ ha de ser nul·la.

21. *L'àlgebra de Lie de* $\mathbf{S}_3$

    Considereu el grup de Lie dels quaternions $\neq 0$, $\mathbf{H}^* = \mathbf{H} - \{0\}$. Identifiquem $\mathrm{T}(\mathbf{H}^*) = \mathbf{H}^* \times \mathbf{H}$, de manera que donar un vector tangent en el neutre és donar un element de $\mathbf{H}$.

    Siguin $X_0, \ldots, X_3$ els camps invariants de $\mathbf{H}^*$ obtinguts a partir dels vectors tangents $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, 0, 1) \in \mathbf{H} \cong \mathrm{T}_{(1,\mathbf{0})}(\mathbf{H}^*)$.
    (a) Calculeu $X_0, \ldots, X_3$.
    (b) Calculeu els parèntesis de Lie d'aquests camps.
    (c) Es recorda que $\mathbf{S}_3 \subset \mathbf{H}^*$ és un grup de Lie. Proveu que els camps X_i $(i = 1, 2, 3)$ defineixen una base de camps invariants X_i^0 per al grup de Lie $\mathbf{S}_3$. Quins són els parèntesis de Lie d'aquests camps?

22. Proveu que tota esfera de dimensió imparella té un camp vectorial C^∞ que no s'anul·la enlloc.

23. *La hessiana d'una funció en un punt crític.*

    Sigui M una varietat diferenciable de dimensió m, $f\colon M \to \mathbf{R}$ una funció de classe C^2. Es diu que un punt $p \in M$ és *crític* de f si $\mathrm{d}f(p) = 0$.
    (a) Sigui $p \in M$ un punt crític de f. Considereu l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{H}_p f\colon & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & \mathbf{R} \\ & (X, Y) & \mapsto & (X \cdot (Y \cdot f))(p). \end{array}$$

    Proveu que $\mathrm{H}_p f(gX, Y) = g(p)\,\mathrm{H}_p f(X, Y)$ per a tota funció g, i que és simètrica.
    Deduïu-ne que

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{H}_p f\colon & \mathrm{T}_p(M) \times \mathrm{T}_p(M) & \to & \mathbf{R} \\ & (u_p, v_p) & \mapsto & \mathrm{H}_p f(X, Y), \end{array}$$

    on $X(p) = u_p$, $Y(p) = v_p$, està ben definida i és una forma bilineal simètrica. S'anomena *hessiana* de f en el punt crític p.

(b) Donada una carta (U, φ) de M al voltant de p, proveu que la matriu de $\mathrm{H}_p f$ en la base de $\mathrm{T}_p M$ definida per la carta coincideix amb la matriu hessiana de l'expressió local de f respecte a la carta en el punt $\varphi(p)$.

(c) Un punt crític p de f es diu *no-degenerat* si $\mathrm{H}_p f$ és no-degenerada. Proveu que els punts crítics no-degenerats són aïllats (dins el conjunt de punts crítics).

(d) Una *funció de Morse* és una funció tal que tots els seus punts crítics són no-degenerats. Proveu que si M és compacta i f és una funció de Morse llavors f té un nombre finit de punts crítics.

(e) Considerant $\mathbf{S}_2 \subset \mathbf{R}^3$, proveu que la "funció alçada" z és una funció de Morse.

(f) S'anomena *índex de Morse* d'una funció f en un punt crític p la màxima dimensió d'un subespai de $\mathrm{T}_p M$ sobre el qual la hessiana és definida negativa (o sigui, el nombre de coeficients < 0 en tota reducció de la hessiana a la forma diagonal).

Suposem M compacta, i f una funció de Morse. Sigui c_k el nombre de punts crítics de f amb índex de Morse k, i $\chi = c_0 - c_1 + c_2 - \ldots + (-1)^m c_m$. Calculeu χ per a la funció de l'apartat anterior.

Indicacions i respostes

1. (a) Podeu suposar que N ve definida localment per $F^{-1}(0)$, on F és una submersió. Llavors $\mathrm{T}F$ és també una submersió i $\mathrm{T}N$ n'és una fibra apropiada.
3. a) $(-A\, v_1 - B\, v_2)\, \partial/\partial v_1 + (B\, v_1 - A\, v_2)\, \partial/\partial v_2$. b) Als pols, X s'anul·la. c) A.
4. b) X sí, Y no.
7. b) $Z = \frac{y^4+x^3+y^2-x^2-x^2y^2+xy^2}{x^2+y^2+xy+1}\, X_1 + \frac{x^3-y^3+x^2+y^2+x^2y-xy^2}{x^2+y^2+xy+1}\, X_2$.
   c) $[X_1, X_2] = -(x + y^2 + 2y + 1)\partial/\partial x + (x + y)\partial/\partial y$.
9. (b) No. (c) Sí. (d) $f^*(\omega_0) = \mathrm{d}t$.
10. a) Primer veieu que és un camp sobre un obert coordenat i després feu servir que les translacions són difeomorfismes.
    c) Considereu una base (u_i) de $\mathrm{T}_e(G)$ i construïu amb ella una base de camps invariants.
12. b) Observeu que X_u és un camp lineal.
14. c) Proveu que l'expressió local de Y en qualsevol carta natural té coordenades nul·les si satisfà aquesta condició.
18. b) És fals, a) i c) són certs.
19. Feu servir els resultats del problema 8 i treballeu amb la composició de π amb la injecció canònica de $\mathbf{S}_1$ dins M.
20. Donat p, sigui q el seu antipodal. Trobeu dos girs que enviïn p a q; però X_p a dos vectors diferents.
21. a)
$$\begin{aligned}
X_0 &= x^0\partial/\partial x^0 + x^1\partial/\partial x^1 + x^2\partial/\partial x^2 + x^3\partial/\partial x^3 \\
X_1 &= -x^1\partial/\partial x^0 + x^0\partial/\partial x^1 + x^3\partial/\partial x^2 - x^2\partial/\partial x^3 \\
X_2 &= -x^2\partial/\partial x^0 - x^3\partial/\partial x^1 + x^0\partial/\partial x^2 + x^1\partial/\partial x^3 \\
X_3 &= -x^3\partial/\partial x^0 + x^2\partial/\partial x^1 - x^1\partial/\partial x^2 + x^0\partial/\partial x^3
\end{aligned}$$
    b) $[X_0, X_i] = 0$, $[X_i, X_j] = 2X_k$, on (i, j, k) és una permutació cíclica de $(1, 2, 3)$.
22. Mireu els camps invariants de l'esfera $\mathbf{S}_3$ (problema 21).

5 Equacions diferencials i fluxos

Problemes bàsics

1. Siguin el camp vectorial $X = (x - 2yz)\,\partial/\partial x + (y + 2xz)\,\partial/\partial y + 2z\,\partial/\partial z \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^3)$, el paraboloide S d'equació $x^2 + y^2 = z$ i la parametrització local μ de S donada per l'aplicació $\mu\colon U = \,]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\to S$ definida per $\mu(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$. Proveu que X és tangent a S i trobeu el flux de $X \in \mathfrak{X}(S)$, primer sobre l'obert $\mu(U) \subset S$ i després als altres punts de S.

2. Donats $p \in M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ i $\omega \in \Omega^1(M)$, sigui $\sigma\colon I \to M$ la corba integral de X per p. Proveu que $\sigma^*(\omega) = \big((\omega \cdot X) \circ \sigma\big)\,\mathrm{d}t$.

3. Siguin $M = \mathsf{SL}(2, \mathbf{R})$ i
$$\begin{array}{rcl} \Phi \quad : \mathbf{R} \times M & \longrightarrow & M \\ (t, A) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \end{array}$$
   (a) Proveu que Φ està ben definida i és un grup uniparamètric.
   (b) Trobeu l'òrbita que passa per la identitat, i el seu vector tangent en aquest punt.
   (c) Determineu el generador infinitesimal de Φ.

4. Siguin $X = y\,\partial/\partial x$, $Y = (x^2/2)\,\partial/\partial y$ camps de $\mathbf{R}^2$. Proveu que són complets, però que $[X, Y]$ i $X + Y$ no ho són pas.

5. Sigui X un camp vectorial de classe C^1 en M. Per a cada $p \in M$, posem $I_p = \,]a(p), b(p)[$ per a l'interval maximal de definició de la corba integral σ_p de X per p. Proveu les afirmacions següents.
   (a) Si X té suport compacte, aleshores és complet.
   (b) Si I_p és un interval fitat, aleshores la imatge $\sigma_p(I_p)$ és un subconjunt tancat de M.
   (c) Si existeix un interval $]-\varepsilon, \varepsilon[$ contingut en tots els intervals I_p, llavors X és complet.

6. Trobeu una carta local de $\mathbf{R}^2$ que redreci el camp vectorial $X = -y\,\partial/\partial x + x\,\partial/\partial y \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^2)$ al voltant del punt $(1, 0)$.

7. *Subgrups uniparamètrics d'un grup de Lie.*

   Siguin G un grup de Lie i X un camp vectorial invariant per l'esquerra. Sigui γ la corba integral maximal de X tal que $\gamma(0) = e$.
   (a) Proveu que $\xi(t) = x\gamma(t)$ és una corba integral de X per a qualsevol $x \in G$.
   (b) Proveu que γ està definida en tot $\mathbf{R}$. (Basta veure que si γ està definida en t_1 i t_2, també està definida en $t_1 + t_2$; a tal fi considereu el camí $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t_1)\gamma(t - t_1)$.)
   Conclogueu que X és complet.
   (c) Proveu que $\gamma\colon \mathbf{R} \to G$ és un morfisme de grups de Lie.

   Es diu que γ és un *subgrup uniparamètric*, i que $X(e) \in \mathrm{T}_e(G) = \mathfrak{g}$ és el seu *generador infinitesimal.* Cal observar que la imatge $\gamma(\mathbf{R}) \subset G$ pot no ser una subvarietat regular.

8. Siguin $U = \mathbf{S}_2 - \{(0, 0, 1)\}$ i $\varphi\colon U \to \mathbf{R}^2$ la projecció estereogràfica.
   (a) Si $\theta_0 \in \,]-\pi/2, \pi/2[$, comproveu que una parametrització per l'arc del paral·lel de latitud θ_0 és
$$\alpha(t) = \varphi^{-1}\left(\sqrt{\frac{1 + \sin\theta_0}{1 - \sin\theta_0}}\cos\left(\frac{t + t_0}{\cos\theta_0}\right), \sqrt{\frac{1 + \sin\theta_0}{1 - \sin\theta_0}}\sin\left(\frac{t + t_0}{\cos\theta_0}\right)\right),$$
   on t_0 és una constant i $t \in \mathbf{R}$.
   (b) Sigui X el camp que en cada punt de $U - \{(0, 0, -1)\}$ és tangent al paral·lel, parametritzat per l'arc, que passa per aquell punt. Si $p = (1, 0, 0)$, doneu un nou atles de $\mathbf{S}_2$ en un veïnat de p que rectifiqui X a un camp coordenat.

Problemes addicionals

9. Trobeu un grup uniparamètric que actuï sobre $\mathbf{S}_2$ de manera que tingui, exactament, dues òrbites que es redueixen a un punt i una altra que és una circumferència.

10. *Tot camp de* $\mathbf{S}_2$ *té un punt crític.*

    (a) Justifiqueu que n'hi ha prou amb demostrar que no existeix cap camp de norma 1 (norma euclidiana de $\mathbf{R}^3$) sobre $\mathbf{S}_2$.

    (b) Suposeu que existís un $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{S}_2)$ unitari. Proveu que l'aplicació definida per $G_t(p) = p + tX(p)$ dóna, per a t prou petita, una bijecció entre $\mathbf{S}_2$ i l'esfera de centre l'origen i radi $\sqrt{1+t^2}$.

    (c) Sigui S_r l'esfera de centre l'origen i radi r, on $r \in \,]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$, per a algun ε prou petit. Definim un camp $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(S_r)$ fent que, per a $q \in S_r$, $\widetilde{X}(q) = \|q\| X(q/\|q\|)$.

       Empreu $\widetilde{X}$ per a estendre l'aplicació G_t a tot l'anell esfèric $A = \{q \in \mathbf{R}^3 \mid \|q\| \in \,]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\}$ i doneu una fórmula que relacioni el volum de A amb el de la seva imatge $G_t(A)$.

    (d) Proveu que el jacobià de G_t en un punt $q \in A$ és un polinomi en t de grau 3. Deduïu que el volum de $G_t(A)$ s'expressa també com a polinomi en t de grau 3 i comproveu que això contradiu el resultat de l'apartat c), cosa que conclou, per reducció a l'absurd, la demostració.

11. *Una òrbita densa en el tor.*

    Considereu el tor com a la varietat quocient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, és a dir, el quocient per la relació $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 - x_2 \in \mathbf{Z}$ i $y_1 - y_2 \in \mathbf{Z}$. Sigui el camp constant $\widetilde{X} = (1, m) \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^2)$, on $m \in \mathbf{R}$.

    (a) Proveu que $\widetilde{X}$ es projecta a un camp X del tor i que aquest camp és complet.

    (b) Si $m = a/b$, on $a, b \in \mathbf{Z}$ són primers entre sí i $a > b$, proveu que la corba integral de X és un llaç tancat que dóna a voltes al tor en el sentit dels meridians i b voltes en el dels paral·lels.

    (c) Si $m \notin \mathbf{Q}$, proveu que la corba integral de X no és tancada. Proveu també que és una subvarietat immersa del tor.

    (d) Proveu que la corba de l'apartat c) és densa al tor.
       (Primer comproveu que és suficient veure que les rectes antiimatge de la corba dins $\mathbf{R}^2$ tallen l'eix $\{y = 0\}$ en un subconjunt dens. Després proveu que això equival a veure que $(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, c, d \in \mathbf{Z})|c - md| < \varepsilon$. Justifiqueu que això es pot deduir del següent resultat d'aproximació d'irracionals per racionals: donat m irracional, existeixen successions $(c_j)_{j\in\mathbf{N}}$, $(d_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de nombres enters tals que $d_j \geq j - 2$ i $|m - (c_j)/(d_j)| \geq 1/(d_j)^2$, per a tota $j \geq 2$.)

12. *Interpretació geomètrica del parèntesi de Lie.*

    Siguin $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Anomenarem F, G els fluxos respectius. Fixat un punt $p \in M$, per a ε prou petita definim l'aplicació $c\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ per $c(t) = G^{-t}(F^{-t}(G^t(F^t(p))))$. Proveu que $c(0) = p$, $c'(0) = 0$ i $c''(0) = 2[X, Y]_p$.

    Observació: es pot reparametritzar el camí c posant $\gamma(t) = c(\sqrt{t})$*. Aleshores* $\gamma'(0) = [X, Y]_p$.

13. *Equacions diferencials de segon ordre en una varietat.*

    Sigui M una varietat diferenciable, i Y un camp vectorial de classe C^1 en la varietat $\mathrm{T}M$. Si (x^i) són coordenades de M sobre un obert, i denotem per (x^i, u^i) les coordenades naturals induïdes sobre la varietat $\mathrm{T}M$, llavors Y s'expressa localment com a $f^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + g^i \dfrac{\partial}{\partial u^i}$, on f^i, g^i són funcions definides en un obert de $\mathrm{T}(M)$. Proveu que les condicions següents són equivalents:

    (a) $f^i(x, u) = u^i$.

    (b) $\mathrm{T}(\tau_M) \circ Y = \mathrm{Id}_{\mathrm{T}(M)}$.

    (c) Si $\eta\colon I \to \mathrm{T}(M)$ és qualsevol corba integral de Y, llavors $\eta = \dot\gamma$, on $\gamma = \tau_M \circ \eta$ és la seva projecció a la base M.

    Es diu que Y satisfà la *condició de segon ordre* si satisfà qualsevol d'aquestes condicions equivalents. Justifiqueu aquesta denominació.

Indicacions i respostes

1. El flux és $\tau\Big(t,(x_0,y_0,x_0^2+y_0^2)\Big)=\big(ke^t\cos\big(k^2e^{2t}+h\big)\,,ke^t\sin\big(k^2e^{2t}+h\big)\,,k^2e^{2t}\big)$, $k=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$, $h=\arctan(y_0/x_0)-x_0^2-y_0^2$.

3. b) L'òrbita és $\sigma(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, amb vector tangent $\sigma'(0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

   c) $X(A)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}A$.

4. $[X,Y]=(-x^2/2)\,\partial/\partial x+(xy)\,\partial/\partial y$, i la corba integral per (x_0,y_0) només està definida dins $]-\infty,-2/x_0[$ si $x_0<0$ i dins $]-2/x_0,+\infty[$ si $x_0>0$. Per provar que $X+Y$ no és complet, només cal mostrar una solució que no estigui definida en tot $\mathbf{R}$. Per fer-ho, cerqueu una solució de l'equació de segon ordre $x''=x^2/2$ de la forma $x(t)=at^k$.

12. Per la resposta dels problemes 10, 11, 12, consulteu la bibliografia.

6 Camps tensorials

Problemes bàsics

1. Siguin M una varietat diferenciable.

   (a) Proveu que es pot establir una correspondència bijectiva entre $\mathfrak{T}^1_1(M)$ i el conjunt de les aplicacions $\mathrm{C}^\infty(M)$-lineals de $\mathfrak{X}(M)$ en $\mathfrak{X}(M)$.

   (b) Proveu que, anàlogament, per a tot r podem identificar $\mathfrak{T}^1_r(M)$ amb el conjunt de les aplicacions $\mathrm{C}^\infty(M)$-r-lineals $\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$.

   (c) És un camp tensorial (1,2) l'operador $L\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ que envia (X, Y) a $[X, Y]$?

2. Sigui M un tor a $\mathbf{R}^3$, amb la carta $\varphi^{-1}(u, v) = \big((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u\big)$, on $u, v \in \,]0, 2\pi[$, i $R > r > 0$ son constants. Calculeu el *pull-back* de la mètrica euclidiana de $\mathbf{R}^3$ a M en aquesta carta.

3. (a) Donades les 1-formes de $\mathbf{R}^3$ $\alpha = x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y$, $\beta = z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}z$ i $\gamma = z\,\mathrm{d}y$, calculeu $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$, $\mathrm{d}\alpha$, $\mathrm{d}\beta$ i $\mathrm{d}\gamma$.

   (b) Donades $\alpha_1, \dots, \alpha_5$, 1-formes d'una varietat, definim $\alpha_6 = 2\,\alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_3 - 3\,\alpha_3 \wedge \alpha_4$ i $\alpha_7 = -\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_5 + 2\,\alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4$. Calculeu $\alpha_6 \wedge \alpha_7$.

4. (a) Doneu un exemple d'una forma ω tal que $\omega \wedge \omega \neq 0$.

   (b) Si ω és una forma de grau parell, proveu que la forma $\omega \wedge \mathrm{d}\omega$ és exacta. Doneu un exemple en què $\omega \wedge \mathrm{d}\omega \neq 0$.

5. Si $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \in \Omega^2(\mathbf{R}^2)$ i $F\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ ve donada per $F(x, y) = (x\,\cos y, x\,\sin y)$, calculeu $F^*(\omega)$.

6. Dins $M = \mathbf{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ sigui $\omega = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}\;(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$.

   (a) Proveu que ω és tancada.

   (b) Donats $p \in M$, $u, v \in \mathrm{T}_p(M)$, proveu que $\omega(p;\, u, v) = \langle \vec{u} \times \vec{v} \mid \vec{p} \rangle / \|\vec{p}\|^3$. (El símbol $\vec{\ }$ indica que ho considerem com a vector de $\mathbf{R}^3$.)

   (c) Siguin S_r l'esfera de centre l'origen i radi r, $p \in S_r$, $u, v \in \mathrm{T}_p(S_r)$ tals que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}\}$ és una base ortogonal i positivament orientada de $\mathbf{R}^3$ i $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$. Proveu que $\omega(p;\, u, v) = 1/r^2$.

   (d) Siguin C un con de $\mathbf{R}^3$ amb vèrtex a l'origen, $p \in C$, $p \neq (0,0,0)$, $u, v \in \mathrm{T}_p(C)$. Proveu que $\omega(p;\, u, v) = 0$.

7. A $M = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$, proveu que la 1-forma $\omega = (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)/(x^2 + y^2)$ és tancada, però no exacta.

8. Siguin M una varietat diferenciable de dimensió n i $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ linealment independents en cada punt de M.

   (a) Proveu que existeixen unes úniques 1-formes θ^k tals que $\theta^k(X_j) = \delta^k_j$.

   (b) Posem $[X_i, X_j] = c^k_{ij} X_k$. Proveu que les 1-formes $\theta^1, \dots, \theta^n$ definides a l'apartat anterior verifiquen: $\mathrm{d}\theta^k = -(1/2)\,c^k_{ij}\,\theta^i \wedge \theta^j$.

9. Calculeu $i_X\,\mathrm{d}\omega$, on $X = y\,\partial/\partial x - x\,\partial/\partial y + \partial/\partial z$ i $\omega = y\,\mathrm{d}x - (1/2)\,(x^2 + y^2)\mathrm{d}z$ són un camp vectorial i una 1-forma de $\mathbf{R}^3$.

10. (a) Siguin M una varietat, $X \in \mathfrak{X}(M)$ i $\omega \in \Omega^k(M)$ una forma tancada. Proveu que ω és invariant per X si i només si $i_X\omega$ és tancada.

    (b) Si ara $M = \mathbf{R}^3$ i $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$, doneu una condició sobre la divergència de $Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^3)$ per tal que ω sigui invariant per Y.

11. *Les formes canòniques del fibrat cotangent*

    Sigui N una varietat diferenciable, $M = \mathrm{T}^*(N)$ el seu fibrat cotangent.

    Es defineix una 1-forma θ sobre la varietat M de la manera següent: donat $p \in M$ i $w_p \in \mathrm{T}_p(M)$,

    $$\langle \theta(p), w_p \rangle := \langle p, \mathrm{T}_p(\pi_N) \cdot w_p \rangle,$$

    on $\pi_N\colon \mathrm{T}^*(N) \to N$ és la projecció canònica.

(a) Comproveu que la definició té sentit, calculeu l'expressió de θ en coordenades naturals (x^i, p_i) i conclogueu que és de classe C^∞.

(b) Es defineix tot seguit en M una 2-forma exacta $\omega := -\mathrm{d}\theta$; calculeu-ne la seva expressió local.

12. *Varietats pseudo-riemannianes i camps de Killing.*

Una *mètrica* en una varietat M és un camp tensorial $g \in \mathfrak{T}_2(M)$ que indueix en cada $\mathrm{T}_p(M)$ una forma bilineal simètrica no-degenerada. Una varietat equipada d'una mètrica s'anomena *pseudo-riemanniana*; si la mètrica és definida positiva es diu *riemanniana*. Un difeomorfisme f entre varietats pseudo-riemannianes (M, g), (N, h) es diu *isometria* si $f^*(h) = g$.

Si (M, g) és una varietat pseudo-riemanniana, un camp $X \in \mathfrak{X}(M)$ es diu *isometria infinitesimal* o *camp de Killing* quan $\mathcal{L}_X g = 0$. Denotarem per $\mathfrak{i}(M)$ el conjunt dels camps de Killing de M.

(a) Proveu que $X, Y \in \mathfrak{i}(M) \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{i}(M)$ (o sigui, $\mathfrak{i}(M)$ és una àlgebra de Lie).

(b) Proveu que X és un camp de Killing sii el seu flux és format per isometries.

(c) En $\mathbf{R}^2$, amb la mètrica euclidiana, proveu que $\mathfrak{i}(\mathbf{R}^2)$ té dimensió 3 i admet com a generadors: $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ i $-y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$.

(d) Calculeu el flux d'un $X \in \mathfrak{i}(\mathbf{R}^2)$ arbitrari i interpreteu-lo en termes de moviments de $\mathbf{R}^2$.

(e) En $\mathbf{R}^2$ es considera la mètrica (pseudo-riemanniana) de Lorentz, $g_L = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x - c^2\, \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t$. Trobeu $\mathfrak{i}(\mathbf{R}^2, g_L)$ i comproveu que els seus fluxos es corresponen amb el grup de Lorentz.

Problemes addicionals

13. A $\mathbf{R}^n$ definim l'operador $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$-lineal $*\colon \Omega^k(\mathbf{R}^n) \to \Omega^{n-k}(\mathbf{R}^n)$ d'aquesta manera: si $i_1 < \ldots < i_k$, $*\big(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\big) = \varepsilon\,(i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n)\ \mathrm{d}x^{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}$, on $i_{k+1} < \ldots < i_n$, i $\varepsilon\,(i_1, \ldots, i_n)$ és el signe d'aquesta permutació de $\{1, \ldots, n\}$.

(a) Proveu que, per a tota k-forma ω, $*\big(*(\omega)\big) = (-1)^{k\,(n-k)}\,\omega$.

(b) Preneu $n = 3$: proveu que $*(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, $*(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$ i $*(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

(c) Si $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^3)$, proveu que els components de $\mathrm{d}f$ (en la base $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$) coincideixen amb els del camp $\operatorname{grad} f$ (en la base dual).

(d) Si $\omega = f_1\, \mathrm{d}x + f_2\, \mathrm{d}y + f_3\, \mathrm{d}z \in \Omega^1(\mathbf{R}^3)$, proveu que els components de $*(\mathrm{d}\omega)$ coincideixen amb els de $\operatorname{rot} F$, on F és el camp vectorial $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $F = (f_1, f_2, f_3)$.

(e) Si ω i F són com a l'apartat anterior, proveu que $\big((*)^{-1} \circ \mathrm{d} \circ *\big)\,(\omega) = \operatorname{div} F$.

14. Sigui $F\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ donada per $F(x, y) = (x\, e^y + y, x\, e^y - y)$.

(a) Proveu que F és un difeomorfisme.

(b) Calculeu F^* i F_* de $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, de $\partial/\partial x$ i de $\partial/\partial y$.

(c) Si $p = (0, 1), q = F(p)$, calculeu $(F_*\omega)\,(F_*\partial/\partial x, F_*\partial/\partial y)\,(q)$ i $(F^*\omega)\,(F^*\partial/\partial x, F^*\partial/\partial y)\,(p)$.

15. Sigui S_r l'esfera de $\mathbf{R}^4$ centrada a l'origen i de radi $r > 0$.

(a) Proveu que $X = -y\,\partial/\partial x + x\,\partial/\partial y - t\,\partial/\partial z + z\,\partial/\partial t \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^4)$ restringeix a un camp de S_r, sigui quina sigui r.

(b) Siguin $i\colon S_r \to \mathbf{R}^4$ la injecció canònica i $\omega = i^*(-y\, \mathrm{d}x + x\, \mathrm{d}y - t\, \mathrm{d}z + z\, \mathrm{d}t) \in \Omega^1(S_r)$. Proveu que $\omega_p \neq 0$ en tot $p \in S_r$.

(c) Sigui $F\colon \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'aplicació lineal que, en la base canònica, té matriu

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},$$

on α i β són dues constants. Si G és la restricció de F a S_r, proveu que la imatge de G està dins S_r i que G és un difeomorfisme.

(d) Siguin X, ω i G com als apartats anteriors. Proveu que X, ω i $\mathrm{d}\omega$ són invariants per G.

(e) Definim $G_r(x, y, z, t) = (rx, ry, rz, rt)$. La seva restricció a S_1 és un difeomorfisme de S_1 sobre S_r (no cal provar-ho). Qui és $(G_r)_*(X)$?

16. Sigui $F\colon M \to N$ un difeomorfisme entre varietats. Donat $Y \in \mathfrak{X}(N)$, definim l'operador D_Y de $\mathfrak{T}(N)$ en $\mathfrak{T}(N)$ a partir de la fórmula: $D_Y(T) = F_*\left(\mathcal{L}_{F^*(Y)}\, F^*(T)\right)$.

    (a) Proveu que D_Y és una derivació en N.

    (b) Proveu que coincideix amb la derivada de Lie $\mathcal{L}_Y$.

17. *Subvarietats de varietats riemannianes.*

    Sigui (N, h) una varietat riemanniana. Si $M \subset N$ és una subvarietat i denotem per j la inclusió, proveu que $g = j^*(h)$ és una mètrica riemanniana en M. Què succeeix si la mètrica h és pseudo-riemanniana?

18. *Camps de Killing de* $\mathbf{S}_2$.

    Es considera $\mathbf{S}_2$ amb la mètrica riemanniana induïda per $\mathbf{R}^3$. Trobeu $\mathfrak{i}(\mathbf{S}_2)$ de dues maneres diferents: parametritzant $\mathbf{S}_2$ amb coordenades esfèriques o bé cercant primer $\mathfrak{i}(\mathbf{R}^3)$ i emprant el fet següent: si M és una varietat pseudo-riemanniana de dimensió m, llavors $\mathfrak{i}(M)$ té dimensió $\leq m(m+1)/2$ (podeu veure'n la demostració dins **Kobayashi & Nomizu**, *Foundations of Differential Geometry, Vol 1*).

19. *Formes simplèctiques, I.*

    Sigui ω una 2-forma en una varietat M. Es diu que ω és *no-degenerada* si la forma bilineal alternada $\omega(p)$ de $\mathrm{T}_p(M)$ és no-degenerada en cada punt (per tant M és de dimensió m parella). Denotem per $\widehat{\omega}\colon \mathrm{T}(M) \to \mathrm{T}^*(M)$ l'aplicació $\widehat{\omega}(u_p) = i_{u_p}\omega$.

    (a) Proveu que ω és no-degenerada sii $\widehat{\omega}$ és un difeomorfisme.

    (b) Si ω és no-degenerada, proveu que localment es pot escriure $\omega|_U = \theta^1 \wedge \theta^2 + \ldots + \theta^{m-1} \wedge \theta^m$, on les θ^i són 1-formes linealment independents en cada punt d'un obert U.

    (c) Deduïu-ne que si existeix una 2-forma no-degenerada en M llavors existeix una m-forma Ω enlloc nul·la (és a dir, M és orientable).

20. *Formes simplèctiques, II.*

    Una 2-forma diferencial ω en una varietat es diu *simplèctica* si és tancada i no-degenerada. Sigui (M, ω) una varietat simplèctica de dimensió $2n$. Un sistema de coordenades (x^i, y_i) $(1 \leq i \leq n)$ es diu *canònic* si localment ω s'escriu $\omega|_U = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}y_i$. El *teorema de Darboux* afirma que tals coordenades existeixen sempre (vegeu, per exemple, **Libermann & Marle**, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, o **Abraham & Marsden**, *Foundations of Mechanics*).

    (a) Construïu una forma simplèctica ω en $\mathbf{R}^4$ tal que les coordenades naturals siguin canòniques, i calculeu l'expressió de $\widehat{\omega}$.

    (b) Proveu que, si N és una varietat, el seu fibrat cotangent $M = \mathrm{T}^*(N)$ està canònicament dotat d'una estructura simplèctica, per a la qual les coordenades naturals són canòniques.

21. *Camps hamiltonians.*

    En una varietat simplèctica (M, ω), un camp vectorial X es diu *hamiltonià* si $i_X\omega = \mathrm{d}h$ per a alguna funció $h \in \mathrm{C}^\infty(M)$, i es diu *localment hamiltonià* si tot punt té un veïnat obert sobre el qual X és hamiltonià. Òbviament, tot camp hamiltonià és localment hamiltonià.

    (a) Vegeu que X és localment hamiltonià sii $i_X\omega$ és una forma tancada.

    (b) Proveu que X és localment hamiltonià sii ω és invariant per X $(\mathcal{L}_X\omega = 0)$.

    (c) Proveu que si X, Y són localment hamiltonians, llavors $[X, Y]$ és hamiltonià.

    (d) En $\mathbf{R}^4$ amb la forma simplèctica $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t$, digueu si són hamiltonians, localment hamiltonians o no res els camps següents: $X = \partial/\partial x + \partial/\partial y + \partial/\partial z + \partial/\partial t$, $Y = e^{x-y}\,(\partial/\partial x + \partial/\partial y) + e^{z-t}\,(\partial/\partial z + \partial/\partial t)$, i $Z = x\partial/\partial x + y\partial/\partial y + z\partial/\partial z + t\partial/\partial t$.

22. *Parèntesi de Poisson.*

    Sigui (M, ω) una varietat simplèctica. Com que ω és no-degenerada, donada una funció f hi ha un únic camp X_f tal que $i_{X_f}\omega = \mathrm{d}f$. Aquest camp és $X_f = \widehat{\omega}^{-1} \circ \mathrm{d}f$. Donades $f, g \in \mathrm{C}^\infty(M)$, llur *parèntesi de Poisson* és la funció $\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$.

    (a) Comproveu que $\{f, g\} = X_g \cdot f = -X_f \cdot g$.

    (b) Proveu que $\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$ i $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$.

    (c) Proveu que $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$.

    (d) Proveu que $\big\{f, \{g, h\}\big\} + \big\{g, \{h, f\}\big\} + \big\{h, \{f, g\}\big\} = 0$ (*identitat de Jacobi*).

    (e) Dels dos apartats anteriors es conclou que $\mathrm{C}^\infty(M)$, amb el producte donat pel parèntesi de Poisson, és una àlgebra de Lie, i que l'aplicació $\mathrm{C}^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)$ donada per $f \mapsto X_f$ és un antihomomorfisme d'àlgebres de Lie. Trobeu el nucli i la imatge d'aquesta aplicació.

    (f) En $(\mathbf{R}^4, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t)$, si $f(x, y, z, t) = x \cos\theta - z \sin\theta$ i $g(x, y, z, t) = y \cos\theta - t \sin\theta$, calculeu $\{f, g\}$.

    (g) Calculeu l'expressió del parèntesi de Poisson en coordenades canòniques (x^i, y_i).

23. *Sistemes dinàmics hamiltonians.*

    Un *sistema dinàmic hamiltonià* és una terna (M, ω, H) donada per una varietat simplèctica i una funció $H \in \mathrm{C}^\infty(M)$, anomenada *hamiltoniana* del sistema. Sigui X_H el camp hamiltonià definit per H. L'equació diferencial en M associada al camp X_H s'anomena *equació de Hamilton*.

    (a) Si γ és una solució de l'equació de Hamilton i f és una funció qualsevol, proveu que $\mathrm{d}(f \circ \gamma)/\mathrm{d}t = \{f, H\} \circ \gamma$.

    (b) Expresseu l'equació de Hamilton en coordenades canòniques.

    (c) S'anomena *constant del moviment* una funció que és constant al llarg de les solucions de l'equació de Hamilton. Proveu que f és una constant del moviment sii $\{f, H\} = 0$, i que en particular H és una constant del moviment. Proveu també que les constants del moviment formen una subàlgebra de Lie de l'àlgebra de Lie $\mathrm{C}^\infty(M)$.

    (d) En la varietat $\mathrm{T}^*(\mathbf{R}^3)$ amb la forma simplèctica canònica, escriviu l'equació de Hamilton de la funció hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \|\mathbf{p}\|^2/2m + V(\mathbf{q})$.

Indicacions i respostes

2. $g = r^2\, \mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + (R + r\cos u)^2\, \mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v$.
3. a) $\alpha \wedge \beta = yz\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + x^2\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z - xy\, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$; $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma = -x^2 z\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ $\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\beta = 0$, $\mathrm{d}\gamma = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.
   b) $\alpha_6 \wedge \alpha_7 = 3\, \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5$.
4. Per a a), podeu trobar exemples simples dins $\Omega^2(\mathbf{R}^4)$; per a b), dins $\Omega^2(\mathbf{R}^5)$.
5. $F^*(\omega) = x\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.
8. b) Apliqueu $\mathrm{d}\omega_k$ a la base $\{X_1, \ldots, X_n\}$.
9. $i_X\, \mathrm{d}\omega = 0$.
10. b) La divergència ha de ser 0.
11. $\theta = p_i \mathrm{d}x^i$, $\omega = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p_i$.
12. b) S'obtenen els girs, les translacions i llurs composicions.
    c) $\mathrm{i}(\mathbf{R}^2, g_L) = \{(\lambda y + \mu)\partial/\partial x + \big((\lambda/c^2)\, x + \nu\big)\partial/\partial y \mid \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}\}$. El flux és $\sigma_{(x_0,y_0)}(s) = \Big((x_0 - \alpha)\cosh(\gamma s) + c\,(y_0 - \beta)\sinh(\gamma s) + \alpha, (1/\lambda)(x_0 - \alpha)\sinh(\gamma s) + (y_0 - \beta)\cosh(\gamma s) + \beta\Big)$, on $\alpha = -\nu c^2/\lambda$, $\beta = -\mu/\lambda$ i $\gamma = \lambda/c$.
14. b) Si (x, y) i $(\bar{x}, \bar{y})$ són coordenades p i q, respectivament:
    $F_*(\omega) = -(1/2)\, e^{-(\bar{x}-\bar{y})/2}\, \mathrm{d}\bar{x} \wedge \mathrm{d}\bar{y}$; $F^*(\omega) = -2e^y\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$;
    $F_*(\partial/\partial x) = e^{(\bar{x}-\bar{y})/2}\, (\partial/\partial\bar{x} + \partial/\partial\bar{y})$; $F_*(\partial/\partial y) = \Big(1 + (\bar{x} + \bar{y})/2\Big)\, \partial/\partial\bar{x} + \Big(-1 + (\bar{x} + \bar{y})/2\Big)\, \partial/\partial\bar{y}$;
    $F^*(\partial/\partial\bar{x}) = (1/2)\, \Big((e^{-y} - x)\, \partial/\partial x + \partial/\partial y\Big)$; $F^*(\partial/\partial\bar{y}) = (1/2)\, \Big((e^{-y} + x)\, \partial/\partial x - \partial/\partial y\Big)$.
    c) Totes dues donen 1.
15. e) El propi X, considerat com a camp de S_r.
18. Llurs fluxos són la restricció a $\mathbf{S}_2$ dels girs de $\mathbf{R}^3$ d'eix una recta que passa per l'origen. En esfèriques, $\mathrm{i}(\mathbf{S}_2)$ està generada per $\{x_v, \sin v\, x_u - \cos v\, \tan u\, x_v, \cos v\, x_u + \sin v\, \tan u\, x_v\}$.

19. b) Procediu per inducció: preneu coordenades i cerqueu una forma $\omega_1 = \omega - \alpha \wedge \beta$, on α, β s'obtenen de ω per substitució respecte de camps adequats, tal que a ω_1 hi intervenen només termes $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$ amb $i, j > 2$.
c) Preneu $\omega \wedge \overset{m/2}{\cdots} \wedge \omega$.

20. a) Preneu $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t$; aleshores, en les bases canòniques, $\widehat{\omega}$ té matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8 Connexions

1. Siguin ∇^i connexions en una varietat M, i λ_i funcions reals C^∞ en M. En quines condicions és $\sum_i \lambda_i \nabla^i$ una connexió?

2. Siguin (x^i), $(\bar{x}^\alpha)$ dos sistemes de coordenades en una varietat M amb connexió ∇. Siguin Γ^k_{ij}, $\bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$, els respectius símbols de Christoffel. Calculeu la transformació dels símbols de Christoffel a partir de la transformació de les coordenades.

3. Sigui T el camp tensorial $(1,1)$ en una varietat M definit per la identitat, $T(X) = X$ $(X \in \mathfrak{X}(M))$. Proveu que, per a tota connexió ∇ i tot camp vectorial X, es té $\nabla_X T = 0$.

4. *La diferencial covariant*

   Sigui M una varietat amb connexió ∇. Donat un camp tensorial $T \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, es defineix un camp tensorial $\nabla T \in \mathfrak{T}^r_{s+1}(M)$ per:

   $$(\nabla T)(X_0, X_1, \ldots, X_s, \omega^1, \ldots, \omega^r) = (\nabla_{X_0} T)(X_1, \ldots, X_s, \omega^1, \ldots, \omega^r).$$

   Proveu que efectivament ∇T és un camp tensorial. S'anomena *diferencial covariant* de T.

5. Sigui M una varietat amb connexió ∇ i torsió T. Si X, Y són camps vectorials i ω una 1-forma diferencial, proveu que $\omega(T(X,Y)) = \mathrm{d}\omega(X,Y) + (\nabla_Y \omega)(X) - (\nabla_X \omega)(Y)$.

6. Sigui M una varietat amb una connexió ∇. Sigui X un camp vectorial en M, i σ la seva corba integral tal que $\sigma(0) = p$. Denotem per $\tau_t \colon \mathrm{T}_p(M) \to \mathrm{T}_{\sigma(t)}(M)$ el transport paral·lel al llarg de σ. Proveu que, si Y és un altre camp vectorial,

   $$(\nabla_X Y)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{\tau_t^{-1}\left(Y(\sigma(t))\right) - Y(p)}{t}.$$

   (Això significa que el transport paral·lel determina la derivada covariant.)
   (Utilitzeu una base de camps paral·lels al llarg de σ.)

7. En $M = \mathbf{R}^2 - \{0\}$, siguin els camps vectorials X, Y definits per $X(p) = p/\|p\|$ i $Y(p) = R \cdot X(p)$, on R és el gir d'angle $\pi/2$ en sentit positiu. Trobeu la torsió de la connexió en què X i Y són paral·lels (respecte a qualsevol direcció). Justifiqueu que aquesta connexió existeix i és única.
   (Empreu coordenades polars.)

8. Sigui $M = \mathsf{GL}(2, \mathbf{R})$. Proveu que hi ha una única connexió en M per a la qual els camps invariants per l'esquerra són paral·lels. Trobeu-ne la torsió.

9. *Curvatura d'una connexió*

   Sigui ∇ una conexió en una varietat M. Donats tres camps vectorials, se'n defineix un altre per

   $$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

   (a) Proveu que $R(X,Y)Z$ és antisimètric en (X,Y), i que R és un camp tensorial 1 cop contravariant i 3 cops covariant. S'anomena *tensor de curvatura* de ∇.

   (b) Suposant que la torsió és nul·la, proveu que $R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$.
   (Partint de $T(X,[Y,Z])$, obteniu una expressió per a $T(X,[Y,Z]) + \nabla_X(T(Y,Z))$; sumeu les permutacions cícliques de les seves variables i useu la identitat de Jacobi.)

   (c) Obteniu l'expressió local de R a partir de la de ∇.

10. *Reparametrització de geodèsiques.*

    Sigui M una varietat, ∇ una connexió en M, i $\gamma \colon I \to M$ un camí. Sigui $\varphi \colon J \to I$, $s = \varphi(t)$, un difeomorfisme.

    (a) Si $w \colon I \to \mathrm{T}M$ és un camp vectorial al llarg de γ, proveu que $\nabla_t (w \circ \varphi) = ((\nabla_s w) \circ \varphi)\, \varphi'$.
    (Expresseu $w(s) = u^i(s) \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(s)}$.)

    (b) Escriviu la igualtat anterior per a $w = \dot{\gamma}$.

    (c) Sigui $\xi = \gamma \circ \varphi$ el camí γ reparametritzat. Proveu que $\nabla_t \dot{\xi} = (\nabla_s \dot{\gamma} \circ \varphi)\, (\varphi')^2 + (\dot{\gamma} \circ \varphi)\, \varphi''$.

(d) Conclogueu que si γ és una geodèsica llavors el camí reparametritzat ξ satisfà una equació del tipus $\nabla_t\dot{\xi} = \Phi\,\dot{\xi}$, on $\Phi\colon J \to \mathbf{R}$ és una funció.

(e) En quines condicions és ξ una geodèsica?

(f) Recíprocament, si $\xi\colon J \to M$ és un camí tal que $\nabla_t\dot{\xi} = \Phi\dot{\xi}$ per a certa funció Φ, proveu que existeix un difeomorfisme $\varphi\colon J \to I$ tal que $\gamma = \xi \circ \varphi^{-1}$ és una geodèsica.

11. En $\mathbf{R}^2$, amb la base canònica, considereu una connexió ∇ amb els símbols de Christoffel següents: $\Gamma^1_{1\,2} = \Gamma^1_{2\,1} = 1$, i els altres $\Gamma^k_{i\,j} = 0$.

(a) Trobeu la geodèsica que passa per $p = (2,\,1)$ i hi té vector tangent $\big(\partial/\partial x + \partial/\partial y\big)_p$.

(b) Donats dos punts arbitraris, hi ha alguna geodèsica C^1 a trossos que passi per tots dos?

(c) Pot ser ∇ la connexió de Levi-Civita d'alguna mètrica?

12. *Connexions invariants en un grup de Lie.*

Sigui G un grup de Lie amb àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Una connexió ∇ en G es diu *invariant* (per l'esquerra) si, donats camps invariants X, Y en G, $\nabla_X Y$ és també invariant (per l'esquerra).

(a) Proveu que donar ∇ invariant equival a donar una aplicació bilineal $\beta\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

(b) Què significa que β sigui alternada?

(c) Proveu que existeix en G una única connexió invariant, amb torsió nul·la, i tal que les corbes integrals dels camps invariants siguin geodèsiques.
(Calculeu l'expressió de $\nabla_X Y$ per a camps invariants.)

(d) Per a aquesta connexió, calculeu la curvatura $R(X,Y)Z$, on X, Y, Z són camps invariants.

13. *Tensor diferència de dues connexions.*

Donades una varietat M i dues connexions ∇, $\overline{\nabla}$, es defineix $D\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ per:

$$D(X,\,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

(a) Proveu que D és un camp tensorial. S'anomena *tensor diferència* de ∇ i $\overline{\nabla}$. Per al que segueix, serà útil tenir present la descomposició $D = S + A$ en part simètrica i part antisimètrica.

(b) Proveu que ∇ i $\overline{\nabla}$ tenen les mateixes geodèsiques sii D és alternat ($D(X,X) = 0$).

(c) Proveu que $\overline{\nabla} = \nabla$ sii ambdues connexions tenen les mateixes geodèsiques i la mateixa torsió.

(d) Donada una connexió ∇ i un camp tensorial 1-contravariant 2-covariant D, comproveu que $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D(X,Y)$ defineix una connexió.

(e) Donada una connexió ∇ qualsevol, proveu que hi ha una única connexió que té les mateixes geodèsiques que ∇, però torsió nul·la. (Preneu $\overline{\nabla} = \nabla - (1/2)\,T$, on T és la torsió de ∇.)

Indicacions i respostes

7. $T(X,Y) = Y/\|\vec{p}\|$.

8. Si s'identifica $\mathsf{GL}(2,\mathbf{R})$ amb un obert de $\mathbf{R}^4$ i es considera la base de camps $\{X_1,\,...,\,X_4\}$ on $(X_j)_g = (T_{Id}\,L_g)(\partial/\partial x^j)_{Id}$, s'obté: $T(X_1,\,X_2) = -X_2$, $T(X_1,\,X_3) = X_3$, $T(X_1,\,X_4) = 0$, $T(X_2,\,X_3) = X_4 - X_1$, $T(X_2,\,X_4) = -X_2$, $T(X_3,\,X_4) = X_3$.

11. (a) $\gamma(t) = \Big((5 - e^{-2t})/2,\; t+1\Big)$.

(b) Sí, tot punt es pot unir amb $(0,\,0)$ per una geodèsica.

(c) No, el sistema que definiria els símbols de Christoffel a partir de la mètrica no té solució.

9 Varietats riemannianes

1. Expresseu la mètrica riemanniana de $\mathbf{R}^2$, i els corresponents símbols de Christoffel, en termes de les coordenades:

   (a) Polars: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$.

   (b) Parabòliques: $x = (u^2 - v^2)/2$, $y = uv$.

2. Expresseu la mètrica riemanniana de $\mathbf{R}^3$, i els corresponents símbols de Christoffel, en termes de les coordenades:

   (a) Cilíndriques: $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, $z = z$.

   (b) Esfèriques: $x = r\cos\phi\sin\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$.

3. Considereu el *semiplà de Poincaré* $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$, amb la mètrica $g = \dfrac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$.

   Proveu que g és invariant per les transformacions $x + iy = z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, amb $ad - bc > 0$. Calculeu els símbols de Christoffel de g.

4. Sigui $S \subset \mathbf{R}^3$ l'esfera centrada a l'origen de radi R.

   (a) A partir dels símbols de Christoffel de $\mathbf{R}^3$ en coordenades esfèriques ($x = r\cos\phi\sin\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$), calculeu els símbols de Christoffel de l'esfera S descrita amb les coordenades (θ, ϕ).

   (b) Feu el mateix càlcul a partir de la mètrica riemanniana de S induïda per la de $\mathbf{R}^3$.

   (c) Considereu el camí $\gamma(t) = (\theta_0, t)$ en S que recorre un paral·lel. Calculeu l'expressió $w(t) = f(t)\dfrac{\partial}{\partial\phi} + h(t)\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ d'un camp paral·lel al llarg de γ.

5. Considereu la mètrica pseudoriemanniana definida per

   $$g = A(r)\,\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - B(r)\,\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2(\mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi \otimes \mathrm{d}\phi),$$

   i el cas particular de $A(r) = \kappa(r) = 1 - \dfrac{r_0}{r}$, $B(r) = \dfrac{1}{\kappa(r)}$ (*mètrica de Schwarzschild*).

   (a) Calculeu-ne els símbols de Christoffel.

   (b) Escriviu-ne l'equació de les geodèsiques.

6. Siguin (M, g) i $(\bar{M}, \bar{g})$ dues varietats riemannianes. Un difeomorfisme $F\colon M \to \bar{M}$ es diu *conforme* quan $F^*(\bar{g}) = f\,g$, per a certa funció $f\colon M \to \mathbf{R}^+$. D'altra banda, si ∇, $\bar{\nabla}$ són les respectives connexions de Levi-Civita, es diu que F *respecta les connexions* si $F_*(\nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{F_*X} F_*Y$, per a $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ qualssevol.

   Proveu que, si F és conforme, aleshores respecta les connexions sii f és localment constant.
   (Empreu la fórmula que defineix $g(\nabla_X Y, Z)$ a partir de la mètrica g.)

7. Sigui M una varietat amb una mètrica riemanniana g. Donada una funció $\sigma\colon M \to \mathbf{R}$ de classe C^∞, es defineix la nova mètrica $\bar{g} = e^{2\sigma} g$. Denotem per ∇ i $\overline{\nabla}$ les respectives connexions de Levi-Civita. Proveu que, si X i Y són camps vectorials en M,

   $$\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = (X \cdot \sigma)\,Y + (Y \cdot \sigma)\,X - g(X, Y)\,\mathrm{grad}\,\sigma.$$

   (Empreu la fórmula que defineix $g(\nabla_X Y, Z)$ a partir de la mètrica g.)

8. Estudieu si es pot aplicar el mètode de Gram-Schmidt en una varietat riemanniana. I en una varietat pseudoriemanniana?

9. Siguin (M, g) una varietat riemanniana connexa i ∇ la seva connexió de Levi-Civita. Donat $X \in \mathfrak{X}(M)$, definim $A_X = \mathcal{L}_X - \nabla_X$.

   (a) Proveu que A_X és una derivació de l'àlgebra dels camps tensorials.

(b) Proveu que X és paral·lel sii $A_X = 0$.

(c) Denotem per $\mathfrak{i}(M)$ el conjunt d'isometries infinitesimals (camps de Killing) de M (són els camps vectorials X tals que $\mathcal{L}_X g = 0$). Proveu que $X \in \mathfrak{i}(M)$ sii $g(A_X Y, Z) + g(Y, A_X Z) = 0$, per a qualssevol $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

(d) Si $X \in \mathfrak{i}(M)$, proveu que $A_X X = 0$ sii $\|X\|$ és constant.

(e) Si $X \in \mathfrak{i}(M)$, proveu que X és un camp geodèsic sii $\|X\|$ és constant.

Indicacions i respostes

8. El mètode pot fallar en una varietat pseudoriemanniana, ja que amb una mètrica indefinida no és cert que un subespai i el seu ortogonal estiguin en suma directa.