Geometria Diferencial 2
Exercicis d'àlgebra tensorial

Xavier Gràcia

Departament de Matemàtica Aplicada IV
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

febrer 2007 – abril 2009 / revisió 15 desembre 2013

Aquesta llista inclou alguns exercicis de càlcul amb tensors, amb els quals podeu comprovar la vostra comprensió de la matèria. Al final s'hi adjunta bibliografia.

Considerarem espais vectorials de dimensió finita sobre un cos commutatiu K de característica zero.
Si no ho especifiquem d'altra manera, denotarem per (u_i) una base d'un cert K-espai vectorial E de dimensió finita, i per (α^i) la base de E^* dual de l'anterior.
Les notacions usades són bastant similars a les dels apunts *Geometria Diferencial 2. Suplement d'àlgebra.*

Enunciats

1. Sigui E amb base (u_1, u_2, u_3) i F amb base (v_1, v_2). Considerem en $E \otimes F$ la base corresponent
$$(u_1 \otimes v_1, u_1 \otimes v_2, u_2 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2, u_3 \otimes v_1, u_3 \otimes v_2)$$
(amb l'ordre lexicogràfic).
   (a) Expresseu-hi l'element $t = (-u_1 + 2u_2 + u_3) \otimes (v_1 - v_2)$.
   (b) Els canvis de base
   $\bar{u}_1 = u_1 - u_2$, $\bar{u}_2 = u_2 - u_3$, $\bar{u}_3 = u_1 + u_2 + u_3$ en E,
   $\bar{v}_1 = v_1 - v_2$, $\bar{v}_2 = v_1 + v_2$ en F,
   donen una nova base $(\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j)$ en $E \otimes F$. Calculeu la matriu del canvi de base de $(u_i \otimes v_j)$ a $(\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j)$.
   (c) Expresseu t en la nova base.
2. Proveu que el tensor $t = u_1 \otimes u_2 + u_2 \otimes u_1 \in \mathsf{T}^2(E)$ és indescomponible, és a dir, no es pot escriure com $x \otimes y$ amb $x, y \in E$.
3. Calculeu totes les contraccions interiors $c^i_j(T)$ per als tensors següents:
   (a) $T = \theta \otimes x \in \mathsf{T}^1_1(E)$, amb $x = u_1 + 5u_2$ i $\theta = 3\alpha^1 + 7\alpha^2$.
   (b) $T = 4\, u_1 \otimes u_1 \otimes \alpha^1 \otimes \alpha^1 + 5\, u_1 \otimes u_2 \otimes \alpha^1 \otimes \alpha^1 + 7\, u_1 \otimes u_2 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^2 \in \mathsf{T}^2_2(E)$.
4. Sigui $I = \delta^i_j\, u_i \otimes \alpha^j \in E \otimes E^*$ el tensor de Kronecker de E. Considereu el tensor $S = I \otimes I \in \mathsf{T}^2_2(E)$. Calculeu les dues contraccions dobles $c^{12}_{12}(S)$ i $c^{12}_{21}(S)$.
5. Sigui $T = \alpha^1 \otimes \alpha^2 - 3\, \alpha^2 \otimes \alpha^1 + \alpha^2 \otimes \alpha^2$. Considerem el canvi de base
$$v_1 = u_1 + u_2, \quad v_2 = 2u_1 + 3u_2\,.$$
Sigui (β^1, β^2) la base dual de (v_1, v_2). Expresseu T en aquesta base.
6. Siguin $x = 2u_1 - u_2$, $T = \alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^2 - 3\, \alpha^2 \otimes \alpha^1 \otimes \alpha^2 + 2\, \alpha^2 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^2$. Calculeu $i_x T$.
7. Calculeu el simetritzat i l'antisimetritzat dels tensors següents:
   (a) $T = x \otimes y$, amb $x = 2u_1 + 10u_2$, $y = 3u_1 + 7u_2$.
   (b) $R = 6\, \alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^3 + 5\, \alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^2$.

8. Siguin E i F espais vectorials de dimensió 3 i 2, amb bases (u_i) i (v_j); denotem per (α^i) i (β^j) les bases duals respectives.

   Sigui $f\colon E \to F$ una aplicació lineal amb matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ en aquestes bases.

   (a) Calculeu $\mathsf{T}^3 f(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3)$ i $\Lambda^3 f(u_1 \wedge u_2 \wedge u_3)$.

   (b) Donat $w = 5\,u_2 \wedge u_3 + 4\,u_3 \wedge u_1 + 3\,u_1 \wedge u_2 \in \Lambda^2 E$, calculeu $\Lambda^2 f(w) \in \Lambda^2 F$.

   (c) Donat $\omega = \beta^1 \otimes \beta^2 - 3\,\beta^2 \otimes \beta^1 + \beta^2 \otimes \beta^2 \in \mathsf{T}^2 F^*$, calculeu $\mathsf{T}^2\, {}^t\!f(\omega) \in \mathsf{T}^2 E^*$.

   (d) Calculeu $\Lambda^2\, {}^t\!f(\beta^1 \wedge \beta^2)$.

9. Siguin $\theta = 3\,\alpha^1 \wedge \alpha^2 + 2\,\alpha^2 \wedge \alpha^3$, $x = u_1 + u_2 + u_3$ i $y = u_1 - u_3$. Calculeu $i_x\theta$ i $\theta(x, y)$.

10. Calculeu els productes exteriors

    (a) $(\alpha^1 \wedge \alpha^2 - 2\alpha^3 \wedge \alpha^4) \wedge (\alpha^1 \wedge \alpha^2 - 2\alpha^3 \wedge \alpha^4 + \alpha^2 \wedge \alpha^4)$,

    (b) $(\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \alpha^4 + 3\,\alpha^3 \wedge \alpha^5 \wedge \alpha^6) \wedge (\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \alpha^4 + 2\,\alpha^3 \wedge \alpha^5 \wedge \alpha^6)$.

11. Doneu exemples de bivectors no nuls $s, t \in \Lambda^2 E$ tals que $s \wedge s = 0$ i $t \wedge t \neq 0$.

12. Siguin $x = u_1 + u_2 + u_4$, $\theta = 2\,\alpha^2 \wedge \alpha^4 + \alpha^1 \wedge \alpha^3$, $\eta = \alpha^1 \wedge \alpha^4 - \alpha^1 \wedge \alpha^3$. Calculeu $i_x(\theta \wedge \eta)$ de dues maneres.

13. Sigui $E = K^3$. Donada la base canònica (e_1, e_2, e_3) de E, considerem la base $(1, e_1, e_2, e_3, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)$ de $\Lambda^\bullet E$. Amb aquesta tenim un isomorfisme de $\Lambda^\bullet E$ amb $K \oplus K^3 \oplus K^3 \oplus K$, de manera que podem representar els elements de $\Lambda^\bullet E$ amb les seves coordenades:
    $$\alpha + a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3 + A^1 e_2 \wedge e_3 + A^2 e_3 \wedge e_1 + A^3 e_1 \wedge e_2 + \mathcal{A}\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \quad \longleftrightarrow \quad (\alpha, \mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathcal{A})\,.$$

    (a) Calculeu el producte exterior de $(\alpha, \mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathcal{A})$ amb $(\beta, \mathbf{b}, \mathbf{B}, \mathcal{B})$, tot expressant el resultat en termes del «producte escalar» i el «producte vectorial» de E.

    (b) En particular, calculeu $a \wedge b$ i $a \wedge b \wedge c$, essent $a, b, c \in E$.

    (c) Sigui $\bar{e}_j = e_i P^i_j$ un canvi de base. Calculeu la matriu del corresponent canvi de base a $\Lambda^\bullet E$.

    (d) Particularitzeu l'apartat anterior al cas $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

14. Sigui $x \in E$. Calculeu l'invers de $1 - x$ dins l'àlgebra $\Lambda^\bullet E$.

Respostes

1. (a) $t = -u_1 \otimes v_1 + u_1 \otimes v_2 + 2\, u_2 \otimes v_1 - 2\, u_2 \otimes v_2 + u_3 \otimes v_1 - u_3 \otimes v_2$.

   (b) Cal expressar els $\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j$ en termes de la base original, i posar-ne els components en columnes:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) Es poden calcular les matrius inverses dels canvis de base donats a fi d'expressar els u_i i v_j en termes dels $\bar{u}_i$ i $\bar{v}_j$, i així
$$t = (-u_1 + 2u_2 + u_3) \otimes (v_1 - v_2) = \frac{1}{3}(-5\bar{u}_1 - \bar{u}_2 + 2\bar{u}_3) \otimes \bar{v}_1\,.$$
   En resulta
$$t = \frac{1}{3}(-5\,\bar{u}_1 \otimes \bar{v}_1 - \bar{u}_2 \otimes \bar{v}_1 + 2\,\bar{u}_3 \otimes \bar{v}_1)\,.$$
   També podríem expressar tots els $u_i \otimes v_j$ en termes dels $\bar{u}_i \otimes \bar{v}_j$, o sigui, calcular la matriu del canvi de base invers de $E \otimes F$, la qual s'ha d'aplicar als components de t:
$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Escrivint $x = au_1 + bu_2$, $y = cu_1 + du_2$ i fent-ne el producte tensorial s'obté un sistema d'equacions per a a, b, c, d que és incompatible.

3. (a) $c_1^1(T) = 38$.

   (b) $c_1^1(T) = 4\,u_1 \otimes \alpha^1 + 5\,u_2 \otimes \alpha^1$, $c_2^1(T) = 4\,u_1 \otimes \alpha^1 + 5\,u_2 \otimes \alpha^1$,
   $c_1^2(T) = 4\,u_1 \otimes \alpha^1 + 7\,u_1 \otimes \alpha^2$, $c_2^2(T) = 4\,u_1 \otimes \alpha^1 + 7\,u_1 \otimes \alpha^2$.

4. Sigui n la dimensió de E. Llavors $c_{12}^{12}(S) = \delta^i_i \delta^k_k = n^2$ i $c_{21}^{12}(S) = \delta^i_j \delta^j_i = n$.

5. $T = -\beta^1 \otimes \beta^1 - 4\,\beta^2 \otimes \beta^1 - 3\,\beta^2 \otimes \beta^2$.

6. $i_x T = 3\,\alpha^1 \otimes \alpha^2$.

7. (a) $S(T) = 6\,u_1 \otimes u_1 + 22\,(u_1 \otimes u_2 + u_2 \otimes u_1) + 70\,u_2 \otimes u_2$,
   $A(T) = -8\,(u_1 \otimes u_2 - u_2 \otimes u_1)$.

   (b)
$$\begin{aligned} S(R) = {} & (\alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^3 + \alpha^1 \otimes \alpha^3 \otimes \alpha^2 + \alpha^2 \otimes \alpha^1 \otimes \alpha^3 \\ & + \alpha^2 \otimes \alpha^3 \otimes \alpha^1 + \alpha^3 \otimes \alpha^1 \otimes \alpha^2 + \alpha^3 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^1) \\ & + \frac{5}{3}(\alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^2 + \alpha^2 \otimes \alpha^1 \otimes \alpha^2 + \alpha^2 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^1), \\ A(R) = {} & \alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^3 - \alpha^1 \otimes \alpha^3 \otimes \alpha^2 - \alpha^2 \otimes \alpha^1 \otimes \alpha^3 \\ & + \alpha^2 \otimes \alpha^3 \otimes \alpha^1 + \alpha^3 \otimes \alpha^1 \otimes \alpha^2 - \alpha^3 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^1. \end{aligned}$$

8. (a) $\mathsf{T}^3 f(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3) =$
$$2\,v_1 \otimes v_1 \otimes v_1 + 3\,v_1 \otimes v_2 \otimes v_1 - 4\,v_2 \otimes v_1 \otimes v_1 - 6\,v_2 \otimes v_2 \otimes v_1,$$
   $\Lambda^3 f(u_1 \wedge u_2 \wedge u_3) = 0$.

   (b) $\Lambda^2 f(w) = -2\,v_1 \wedge v_2$.

   (c)
$$\begin{aligned} \mathsf{T}^2\, {}^t\!f(\omega) = {} & 8\,\alpha^1 \otimes \alpha^1 + 9\,\alpha^1 \otimes \alpha^2 + 6\,\alpha^1 \otimes \alpha^3 - 19\,\alpha^2 \otimes \alpha^1 \\ & - 3\,\alpha^2 \otimes \alpha^2 - 9\,\alpha^2 \otimes \alpha^3 - 2\,\alpha^3 \otimes \alpha^1 + 3\,\alpha^3 \otimes \alpha^2. \end{aligned}$$

   (d) $\Lambda^2\, {}^t\!f(\beta^1 \wedge \beta^2) = 7\,\alpha^1 \wedge \alpha^2 + 2\,\alpha^1 \wedge \alpha^3 - 3\,\alpha^2 \wedge \alpha^3$.

9. $i_x\theta = -3\alpha^1 + \alpha^2 + 2\alpha^3$; $\theta(x, y) = i_y i_x \theta = -5$.

10. $-4\,\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \alpha^3 \wedge \alpha^4$; $\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \alpha^3 \wedge \alpha^4 \wedge \alpha^5 \wedge \alpha^6$.

11. $s = e_1 \wedge e_2$, on e_1, e_2 són linealment independents;
    $t = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$, on $e_1, \ldots, e_4$ són linealment independents.

12. $i_x(\theta \wedge \eta) = 2\,(-\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \alpha^3 - \alpha^1 \wedge \alpha^3 \wedge \alpha^4 + \alpha^2 \wedge \alpha^3 \wedge \alpha^4)$.
    Es pot calcular primer el producte exterior i després la contracció, o bé usar que i_x és una antiderivació.

13. (a) $(\alpha, \mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathcal{A}) \wedge (\beta, \mathbf{b}, \mathbf{B}, \mathcal{B}) =$
$$(\alpha\beta,\ \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{a},\ \alpha\mathbf{B} + \beta\mathbf{A} + \mathbf{a} \times \mathbf{b},\ \alpha\mathcal{B} + \beta\mathcal{A} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{A}).$$

    (b) $(0, \mathbf{a}, 0, 0) \wedge (0, \mathbf{b}, 0, 0) = (0, 0, \mathbf{a} \times \mathbf{b}, 0)$;
    $(0, \mathbf{a}, 0, 0) \wedge (0, \mathbf{b}, 0, 0) \wedge (0, \mathbf{c}, 0, 0) = (0, 0, 0, (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}))$,
    on $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ és el «producte triple».

    (c) La matriu Q del canvi de base és diagonal per blocs: $Q = \mathrm{diag}(P_0, P_1, P_2, P_3)$, essent $P_0 = 1$, $P_1 = P$, $P_3 = \det P$, i P_2 és la matriu dels menors (amb signe) d'ordre 2 de P.

(d) $Q = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 & 1 & 2 &&&& \\ & 0 & 1 & 0 &&&& \\ & -1 & 1 & 2 &&&& \\ &&&& 2 & 0 & 1 & \\ &&&& 0 & 4 & -2 & \\ &&&& -2 & 0 & 1 & \\ &&&&&&& 4 \end{pmatrix}$.

14. Sigui t el presumpte invers de $1 - x$. Escrivint-lo com a suma de components homogenis $t = t_0 + t_1 + t_2 + \dots$ i escrivint l'equació $1 = (1 - x) \wedge t$ s'obté successivament $t_0 = 1$, $t_1 = x$, $t_2 = 0$, $\dots$: $t = 1 + x$.

Bibliografia

La majoria dels llibres sobre geometria diferencial inclouen algun capítol dedicat a l'àlgebra tensorial, per exemple:

1. Ralph Abraham; Jerrold E. Marsden; Tudor Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications* (2nd ed.). Springer, New York, 1988; pp. 338–348 i 392–401.
2. Lawrence Conlon. *Differentiable manifolds: a first course.* Birhäuser, Boston, 1993; pp. 189–209.
3. Jean Dieudonné. *Élements d'analyse* vol. 3. Gauthier-Villars, Paris, 1970; annexos 10–13 i 15.
4. John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds.* Springer, New York, 2003; pp. 261–268, 271–273 i 292–302.
5. Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Springer, New York, 1983; pp. 54–62.
6. Robert H. Wasserman. *Tensors and manifolds with applications to physics* (2nd ed.). Oxford University Press, Oxford, 2004; pp. 11–83.

A banda d'aquests, destacarem els textos següents:

7. Roger Godement. *Cours d'algèbre.* Hermann, Paris, 1967; capítols 21–23.
8. Werner H. Greub. *Multilinear algebra.* Springer, New York, 1978.
9. Joaquín Olivert Pellicer. *Estructuras de álgebra multilineal.* Universitat de València, 1996; capítols 10–15.
10. Ferran Puerta Sales. *Àlgebra lineal II. Àlgebra lineal i geometria.* Edicions UPC, Barcelona, 1995; capítol 15.
11. Steven Roman. *Advanced linear algebra* (3rd ed.). Springer, 2008; capítol 14.
12. Laurent Schwartz. *Les tenseurs.* Hermann, Paris, 1975.
13. Takeo Yokonuma. *Tensor spaces and exterior algebra.* American Mathematical Society, Providence, 1992; capítols 1–3.