Geometria Diferencial 2 – Suplement de topologia

1 març 2007
revisat: 28 octubre 2010

En aquest suplement revisem algunes qüestions de topologia rellevants per a l'estudi de les varietats diferenciables: les propietats locals de les varietats topològiques, el concepte de paracompacitat i el lema de la ceba, i la caracterització de la paracompacitat d'una varietat topològica.

Varietats topològiques

Una *varietat topològica* n-dimensional és un espai topològic separat (Hausdorff) tal que tot punt té un veïnat obert homeomorf a un obert de $\mathbf{R}^n$ (és a dir, és «localment euclidià» de dimensió n).
Sovint s'hi exigeixen requisits addicionals, com ara tenir base numerable d'oberts o, més generalment, ser paracompacte.
Observació En la definició de varietat topològica es pot substituir «un obert de $\mathbf{R}^n$» per «$\mathbf{R}^n$».

La dimensió d'una varietat topològica ve determinada per la seva topologia, ja que, per a $m \neq n$, dos oberts no-buits de $\mathbf{R}^m$ i $\mathbf{R}^n$ no poden ser mai homeomorfs. (Això és una conseqüència del teorema de la invariància del domini de Brouwer: tota aplicació contínua injectiva $f\colon U \to \mathbf{R}^n$, amb $U \subset \mathbf{R}^n$ obert, és oberta, i doncs un homeomorfisme amb la seva imatge.)

Com és obvi, les propietats locals de les varietats topològiques són les mateixes que les dels espais euclidians.
Un varietat topològica és un espai localment compacte (o sigui, separat i tal que tot punt té un veïnat compacte). Per tant la topologia té una base formada per oberts relativament compactes (és a dir, oberts amb adherència compacta). Igualment, tot punt té una base de veïnats compactes; es pot suposar que aquesta base és numerable, ja que una varietat topològica satisfà el primer axioma de numerabilitat.
Un varietat topològica M és un espai localment arc-connex. Per tant és localment connex, de manera que els components connexos són oberts: així, tota varietat topològica és suma (unió disjunta) de varietats topològiques connexes (els seus components). D'altra banda, els components connexos i arc-connexos coincideixen; en particular, M és connexa sii és arc-connexa.

En el cas que M tingui base numerable d'oberts, aleshores tot recobriment obert de M té un subrecobriment numerable, i M té una quantitat numerable de components connexos.

Espais paracompactes

Un espai topològic és *paracompacte* si és separat i tot recobriment obert (U_α) de M té un refinament obert localment finit; és a dir, hi ha un recobriment obert (V_β) tal que

- refina: per a tot V_β hi ha un U_α tal que $V_\beta \subset U_\alpha$
- és localment finit: per a tot $p \in M$ hi ha un veïnat $W \ni p$ que talla només un nombre finit dels V_β.

La importància dels espais paracompactes en topologia i geometria diferencial rau en l'existència de particions de la unitat subordinades a recobriments oberts qualssevol; aquesta qüestió no es tractarà en aquestes notes.

Un espai compacte, o un espai metritzable, són paracompactes. Un espai paracompacte és normal.
Un espai localment compacte és paracompacte sii és suma d'espais σ-compactes. Provarem una versió lleugerament simplificada d'aquest teorema.

Primerament recordem que un espai localment compacte M es diu σ-*compacte* si és unió numerable de conjunts compactes.

Proposició *Sigui M un espai localment compacte. Si M és σ-compacte llavors té una «ceba», és a dir, una successió d'oberts $(U_i)_{i\geq 1}$ tal que:*

- $\bar{U}_i$ *és compacte*
- $\bar{U}_i \subset U_{i+1}$
- $M = \cup_{i\geq 1} U_i$.

Prova Suposem M reunió d'una successió de conjunts compactes K_n, $n \geq 1$. Es pren com a U_1 un veïnat obert relativament compacte de K_1. Per recurrència es defineix U_n com un veïnat obert relativament compacte de $\bar{U}_{n-1} \cup K_n$. ∎

Lema *Un recobriment obert localment finit d'un espai compacte M és un recobriment finit.*

Prova Sigui (U_α) un recobriment obert localment finit de M. Per a cada $x \in M$ hi ha un veïnat obert V_x que talla un nombre finit dels U_α. Un nombre finit dels V_x recobreix M, i doncs només hi pot haver un nombre finit d'oberts U_α. ■

Teorema *Sigui M un espai localment compacte. Si és σ-compacte, llavors és paracompacte. Recíprocament, si és paracompacte i connex, llavors és σ-compacte.*

Prova Suposem que M és σ-compacte. Sigui $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recobriment obert qualsevol de M. Prenem una «ceba» $(G_i)_{i\geq 1}$ de M, i posem $G_i = \emptyset$ per a $i \leq 0$.
Per a $i \geq 1$ tenim la inclusió

$$\bar{G}_i - G_{i-1} \subset G_{i+1} - \bar{G}_{i-2},$$

on el primer conjunt és compacte i el segon obert.
Fixat $i \geq 1$, els oberts $U_\alpha \cap (G_{i+1} - \bar{G}_{i-2})$ cobreixen el compacte $\bar{G}_i - G_{i-1}$, per tant un subrecobriment finit també.
La unió numerable (quan $i \geq 1$) d'aquests conjunts finits d'oberts és un recobriment obert numerable de M, i és un refinament localment finit de (U_α). (És localment fint perquè, donat $p \in M$, hi ha un obert $G_{i-2} \ni p$, que només pot ser tallat per un nombre finit dels oberts considerats.)

Per al recíproc, comencem suposant que M és paracompacte. Per a cada $x \in M$, sigui V_x un veïnat obert relativament compacte de x. Existeix un recobriment obert localment finit (U_α) més fi que (V_x). Els U_α són, lògicament, relativament compactes.
Considerem un punt qualsevol $x \in M$. Prenem ara com a G_1 la unió dels U_α que contenen x. Definim G_n per recurrència com la unió dels U_α que tallen $\bar{G}_{n-1}$.
Cadascun dels G_n és relativement compacte i unió d'un nombre finit dels U_α (mercès al lema anterior).
La unió $G = \cup_n G_n$ és òbviament un obert, i també és un tancat: si $y \in \bar{G}$, sigui U_β un veïnat de y: U_β talla G, i per tant talla un cert G_n, d'on tenim que $y \in U_\beta \subset G_{n+1} \subset G$; o sigui, y és un punt interior de G.
Atès que M és connex, resulta que $G = M$, és a dir, que (G_n) és una «ceba» de M, i doncs M és σ-compacte. ■

Un espai localment compacte té base numerable d'oberts sii és metritzable i σ-compacte. Provem només el següent:

Proposició (lema de la ceba) *Sigui M un espai localment compacte amb base numerable d'oberts. Existeix una successió d'oberts $(G_i)_{i\geq 1}$ tal que:*

- *$\bar{G}_i$ és compacte*
- *$\bar{G}_i \subset G_{i+1}$*
- *$M = \cup_{i\geq 1} G_i$.*

Prova Sigui $(U_i)_{i\geq 1}$ una base numerable de la topologia de M, amb els U_i relativament compactes.
Definim $G_1 = U_1$ i procedim per inducció.
Suposem definit $G_k = U_1 \cup \ldots \cup U_{m_k}$. El conjunt $\bar{G}_k$ és compacte. Sigui m_{k+1} el menor natural $> m_k$ tal que $\bar{G}_k \subset U_1 \cup \ldots \cup U_{m_{k+1}}$. Llavors definim $G_{k+1} = U_1 \cup \ldots \cup U_{m_{k+1}}$. ■

Se'n desprèn que M és σ-compacte. Combinat amb el teorema anterior obtenim:

Corol·lari *Un espai localment compacte amb base numerable d'oberts és paracompacte.* ■

Paracompacitat de les varietats topològiques

Lema *Una varietat topològica M té base numerable d'oberts sii és un espai σ-compacte.*

Prova La implicació directa ja ha estat vista.
Recíprocament, essent M σ-compacte, tot recobriment obert de M té un subrecobriment numerable. Per tant, podem suposar l'espai recobert per una successió d'oberts U_n homeomorfs a $\mathbf{R}^N$. Cadascun d'aquests té una base numerable d'oberts $V_{n,k}$, i tots aquests junts formen una base de la topologia de M. ■

Teorema *Sigui M una varietat topològica. Les propietats següents són equivalents:*

1. *M és paracompacta.*
2. *Cada component de M és σ-compacte.*
3. *Cada component de M té base numerable d'oberts.*
4. *M és metritzable*

Prova L'equivalència de les tres primeres ja ha estat vista en els enunciats anteriors.
Per provar que impliquen metritzabilitat, es pot usar que un espai localment compacte és regular, i que un espai regular amb base numerable d'oberts és metritzable (teorema de metrització d'Urysohn). Per a la implicació recíproca, es pot usar que un espai metritzable és paracompacte (teorema de Stone). ∎

Corol·lari *Sigui M una varietat topològica paracompacta. M té base numerable d'oberts sii té una quantitat numerable de components connexos.* ∎

Es poden donar exemples senzills de varietats paracompactes sense base numerable d'oberts: basta considerar la unió disjunta d'una infinitat no numerable de còpies de $\mathbf{R}$. Encara que tals varietats no tenen un especial interès ni dificultat, apareixen de manera natural en algunes aplicacions, com ara la teoria de les foliacions.

Tenint en compte que un espai metritzable té base numerable d'oberts sii és separable, resulta que tota varietat paracompacta és separable (és a dir, té un subconjunt dens numerable). Tanmateix, hi ha exemples de varietats separables no paracompactes, com ara la superfície de Calabi–Rosenlicht, una variant de la superfície de Prüfer descrita al llibre de Spivak (referència 6).
D'altra banda, tot espai paracompacte és normal (teorema de Dieudonné). Tanmateix hi ha exemples de varietats normals no paracompactes: la recta llarga i la semirecta llarga. La seva construcció es descriu també al llibre de Spivak.

Les varietats no paracompactes no poden albergar estructures tan importants en geometria diferencial com ara les mètriques riemannianes, la qual cosa les fa encara menys apreciades.

Bibliografia

Aquests enunciats, o d'altres molt similars, es poden trobar demostrats en diversos textos, com ara:

1. Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden and Tudor Ratiu, *Manifolds, tensor analysis, and applications* (2nd ed.), Springer, New York, 1988.
2. Nicolas Bourbaki, *Topologie générale*, chãp. 1, Hermann, Paris, 1971.
3. Lawrence Conlon, *Differentiable manifolds* (2nd ed.), Birhäuser, Boston, 2001.
4. Jean Dieudonné, *Élements d'analyse* vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
5. John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer, New York, 2003.
6. Michael Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry* vol. 1 (3rd ed.), Publish or Perish, Houston, 1999.
7. Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer, New York, 1983.