Geometria Diferencial 2
Suplement d'àlgebra

Xavier Gràcia

Departament de Matemàtica Aplicada IV
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

març 2004 – març 2007 / revisió 15 desembre 2013

Aquest és un recull de definicions, amb alguns exemples interessants, sobre diverses qüestions d'àlgebra que apareixen dins l'assignatura.

Mòduls

Quan en els axiomes d'espai vectorial es reemplaça el cos per un anell A, s'obté una estructura algebraica anomenada *A-mòdul*.

El concepte d'homomorfisme (o aplicació lineal) entre mòduls és el mateix que amb espais vectorials, i anàlogament el de submòdul i mòdul quocient. També es defineix la suma directa i el producte directe de mòduls.

Els conceptes de sistema de generadors, vectors linealment independents i base són els mateixos que per a espais vectorials. Un A-mòdul M es diu *lliure* quan té una base $(e_i)_{i\in I}$. En aquest cas tot element de M s'escriu com a combinació lineal única $x = \sum_{i\in I} \xi^i e_i$ amb $\xi^i \in A$. Normalment escriurem aquesta expressió com $x = \xi^i e_i$, sobreentenent el sumatori sobre l'índex repetit; aquest és l'anomenat *conveni d'Einstein*.

Exemple Sigui $V \subset \mathbf{R}^n$ un obert no buit. Sigui $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Les funcions reals de classe C^k en V, $\mathrm{C}^k(V, \mathbf{R})$, constitueixen un anell commutatiu.
Considerem el conjunt dels camps vectorials de classe C^k en V, que podem identificar amb el conjunt de les funcions vectorials $\mathrm{C}^k(V, \mathbf{R}^n)$. Si $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathrm{C}^k(V, \mathbf{R}^n)$, està definida la suma $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, així com el producte $h\,\mathbf{f}$ per una funció $h \in \mathrm{C}^k(V, \mathbf{R})$. Amb aquestes operacions, $\mathrm{C}^k(V, \mathbf{R}^n)$ és un mòdul sobre l'anell $\mathrm{C}^k(V, \mathbf{R})$.
Els camps vectorials constants $\mathbf{e}_i$ definits a partir de la base canònica $(e_i)_{1\le i\le n}$ de $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{e}_i(x) = e_i$, són una base d'aquest mòdul, atès que qualsevol camp vectorial de classe C^k en V s'escriu de manera única $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$, amb $v^i \in \mathrm{C}^k(V, \mathbf{R})$.

Dualitat

Sigui K un anell commutatiu. Donats dos K-mòduls E i F, el conjunt de les aplicacions K-lineals de E en F, $\mathcal{L}_K(E, F) \equiv \mathrm{Hom}_K(E, F)$, té una estructura de K-mòdul. En particular, s'anomena *dual* de E el mòdul de les seves formes K-lineals, $E^* = \mathcal{L}(E, K)$. Els seus elements també s'anomenen covectors. Donats $x \in E$, $\alpha \in E^*$, escriurem $\langle \alpha, x\rangle \equiv \alpha \cdot x \equiv \alpha(x)$.

L'aplicació $E^* \times E \to K$, $(\alpha, x) \mapsto \langle \alpha, x\rangle$ és bilineal. Donat $x \in E$, tenim doncs una aplicació lineal $\tilde{x} \colon E^* \to K$ definida per $\tilde{x}(\alpha) = \alpha(x)$. D'aquesta manera s'obté una aplicació lineal canònica $c \colon E \to E^{**}$ de E en el seu bidual, $x \mapsto \tilde{x} = \langle \cdot, x\rangle$; en general no és ni injectiva ni suprajectiva.

Suposem que E té una base finita (e_i). Llavors E^* té l'anomenada *base dual* (e^j), definida per

$$\langle e^j, e_i\rangle = \delta^j_{\ i}\,,$$

on $\delta^j_{\ i}$ és el *símbol de Kronecker*; val 1 quan $i = j$, 0 altrament. Si $x = \xi^i e_i \in E$, llavors $\xi^i = \langle e^i, x\rangle$. Repetint la construcció de la base dual, es dedueix que l'aplicació canònica $c \colon E \to E^{**}$ és un isomorfisme i que E s'identifica al dual de E^* (la qual cosa justifica la denominació de «dual»).

Encara en dimensió finita, considerem dues bases de E, (e_i) i $(\bar{e}_k)$. Estan relacionades per $\bar{e}_k = e_i P^i_{\ k}$, on $(P^i_{\ k})$ és la matriu del canvi de base. Aleshores les bases duals respectives estan relacionades per $e^j = P^j_{\ \ell} \bar{e}^\ell$.

Si $u \colon E \to F$ és una aplicació K-lineal, la seva aplicació *transposada* o dual és l'aplicació lineal, que denotarem per u^* o ${}^t u \colon F^* \to E^*$, definida per

$$\langle {}^t u(\beta), x\rangle = \langle \beta, u(x)\rangle\,.$$

L'operació de transposició compleix ${}^t(u_1 + u_2) = {}^t u_1 + {}^t u_2$, ${}^t(\lambda u) = \lambda\, {}^t u$ i ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$. En el cas de mòduls lliures de dimensió finita, la identificació amb els biduals també permet identificar u amb ${}^{tt}u$.

En el cas que $u \colon E \to F$ sigui un isomorfisme, la seva aplicació transposada també ho és, i té una inversa ${}^t u^{-1} \colon E^* \to F^*$, a vegades anomenada aplicació contragradient. Per definició, $\langle {}^t u^{-1}(\alpha), u(x)\rangle = \langle \alpha, x\rangle$.

Suposem que E té una base finita (e_i) i F té una base finita (f_k). L'aplicació lineal $u\colon E \to F$ té una matriu $A = (A^k_i)$ en aquestes bases, definida per $u(e_i) = f_k A^k_i$. Aquesta matriu permet escriure l'aplicació en coordenades: $\eta^k = A^k_i \xi^i$. L'aplicació ${}^t u$ satisfà ${}^t u(f^k) = A^k_i e^i$, de manera que en les coordenades donades per les bases duals l'aplicació transposada s'expressa amb l'equació $a_i = b_k A^k_i$.

Sigui $F \subset E$ un submòdul. S'anomena *anul·lador* o ortogonal de F dins E^* el submòdul

$$F^\vdash = \{\alpha \in E^* \mid (\forall x \in F)\, \langle \alpha, x \rangle = 0\}\,.$$

Si $u\colon E \to F$ és lineal, es compleix que $(\operatorname{Im} u)^\vdash = \operatorname{Ker} {}^t u$. En el cas d'espais vectorials de dimensió finita, F s'identifica amb $(F^\vdash)^\vdash$.

Àlgebres

Sigui K un cos commutatiu (o, més generalment, un anell commutatiu).

Una *K-àlgebra* és un K-espai vectorial (o K-mòdul, si és el cas) A dotat d'una aplicació bilineal $m\colon A \times A \to A$, anomenada multiplicació, i que sovint denotarem multiplicativament, $m(x, y) = xy$.

L'àlgebra es diu *associativa* o *commutativa* si ho és el producte, és a dir, si es compleix $x(yz) = (xy)z$ o $xy = yx$, respectivament. L'àlgebra es diu *unitària* si el producte té un element neutre, usualment denotat per 1. En particular, una àlgebra associativa i unitària és un anell.

Un morfisme de K-àlgebres és una aplicació K-lineal $f\colon A \to B$ tal que $f(xy) = f(x)f(y)$. En el cas d'àlgebres unitàries sovint se suposa també que $f(1) = 1$.

Una subàlgebra és un subconjunt $B \subset A$ estable per les operacions (suma, producte per escalars i producte).

Un ideal bilateral és un subespai $I \subset A$ tal que $x \in I, y \in A$ impliquen $xy \in I$, $yx \in I$. Llavors es pot definir l'àlgebra quocient A/I.

Exemple El conjunt dels polinomis en una variable amb coeficients en K, $K[X]$, és una K-àlgebra associativa, commutativa i unitària.

Exemple El conjunt dels endomorfismes d'un K-espai vectorial E, $\operatorname{End}_K(E)$, és una K-àlgebra associativa i unitària.

Exemple Anàlogament, el conjunt de les matrius quadrades d'ordre n amb coeficients en K, $\mathsf{M}_n(K)$, és una K-àlgebra associativa i unitària.

Exemple Sigui X un espai topològic. El conjunt de les funcions reals contínues en X, $\mathrm{C}(X, \mathbf{R})$, és una $\mathbf{R}$-àlgebra associativa, commutativa i unitària.
Dins aquesta àlgebra, les funcions que s'anul·len en un punt fixat $p \in X$ formen un ideal $\mathfrak{m}_p$.

Exemple Sigui $V \subset \mathbf{R}^n$ un obert no buit. De manera similar a l'exemple anterior, les funcions de classe C^∞ en V, $\mathrm{C}^\infty(V, \mathbf{R})$, formen una $\mathbf{R}$-àlgebra (de dimensió infinita).
Dins aquesta àlgebra, les funcions amb suport compacte formen una subàlgebra $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{c}}(V, \mathbf{R})$ sense element unitat.

Àlgebres de Lie

Una *K-àlgebra de Lie* és una àlgebra on el producte, usualment denotat per $[x, y]$ i anomenat claudàtor, satisfà les dues propietats següents:

- És alternat:
  $$[x, x] = 0.$$
- Satisfà la *identitat de Jacobi*:
  $$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

La primera implica que el producte és antisimètric: $[x, y] = -[y, x]$.

Un exemple important és el següent. Si A és una K-àlgebra associativa, llavors el mateix espai vectorial (o mòdul) A és una K-àlgebra de Lie amb el producte definit pel commutador

$$[x, y] = xy - yx.$$

Exemple En particular, si E és un K-espai vectorial, el conjunt dels seus endomorfismes $A = \operatorname{End}_K(E)$ és una àlgebra associativa, per tant una àlgebra de Lie.

Exemple L'espai vectorial de les matrius quadrades $\mathsf{M}_n(K)$ és una K-àlgebra de Lie amb el producte $[A, B] = AB - BA$. També es representa per $\mathfrak{gl}(n, K)$, o $\mathfrak{gl}_n(K)$.
Dins aquesta àlgebra, les matrius de traça nul·la formen una subàlgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n, K)$.
Una altra subàlgebra és la formada per les matrius antisimètriques, $\mathfrak{o}(n, K)$.

Exemple $\mathbf{R}^3$ amb el producte vectorial ordinari és una $\mathbf{R}$-àlgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{o}(3, \mathbf{R})$.

Derivacions d'una àlgebra

Sigui A una K-àlgebra. Una *derivació* és una aplicació K-lineal $d: A \to A$ tal que

$$d(xy) = (dx)y + x(dy).$$

Si A és unitària amb unitat 1, llavors necessàriament $d(1) = 0$.
Si A és associativa, $d(x_1 \dots x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_1 \dots x_{i-1}(dx_i)x_{i+1} \dots x_k$.

Exemple La derivació ordinària $\mathrm{D}: \mathrm{C}^\infty(I, \mathbf{R}) \to \mathrm{C}^\infty(I, \mathbf{R})$ de funcions definides en un interval obert $I \subset \mathbf{R}$.

Exemple Més generalment, considerem un subconjunt obert $V \subset \mathbf{R}^n$. L'operador D_i de derivació parcial respecte a la coordenada i-èsima és una derivació $\mathrm{D}_i: \mathrm{C}^\infty(V, \mathbf{R}) \to \mathrm{C}^\infty(V, \mathbf{R})$.

Exemple Si A és una àlgebra associativa i $a \in A$, l'aplicació $\mathrm{ad}_a: A \to A$, $\mathrm{ad}_a(x) = [a, x]$, és una derivació de A, anomenada derivació interior.

Sigui $\mathrm{Der}(A)$ el conjunt de les derivacions de A. Dins l'àlgebra d'aplicacions lineals $\mathrm{End}(A)$, les derivacions formen un subespai vectorial, però no una subàlgebra, ja que en general la composició de dues derivacions no és una derivació. Tanmateix, $\mathrm{Der}(A)$ és una subàlgebra de Lie, ja que si d_1, d_2 són derivacions de A, també ho és $[d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1$.

Generalitzant el concepte de derivació, sigui $\alpha: A \to B$ un homomorfisme de K-àlgebres. Una α-derivació és una aplicació lineal $d: A \to B$ tal que $d(xy) = dx \cdot \alpha(y) + \alpha(x) \cdot dy$.

Exemple Sigui $I \subset \mathbf{R}$ un interval obert, $x_\circ \in I$. L'aplicació $\mathrm{D}_{x_\circ}: \mathrm{C}^1(I, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, definida per $\mathrm{D}_{x_\circ} f = \mathrm{D}f(x_\circ)$, és una α-derivació, essent α l'avaluació $f \mapsto f(x_\circ)$.

Exemple Sigui $V \subset \mathbf{R}^n$ un conjunt obert, $p \in V$ un punt, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ un vector. L'aplicació $\mathrm{D}_{p,\mathbf{u}}: \mathrm{C}^1(V, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, que a cada funció f li assigna la seva derivada direccional $\mathrm{D}_{p,\mathbf{u}} f = f'(p; \mathbf{u})$ és una α-derivació, essent α l'avaluació $f \mapsto f(p)$.

Exemple La derivació ordinària de funcions d'una variable, considerada com a aplicació $\mathrm{D}: \mathrm{C}^1(I, \mathbf{R}) \to \mathrm{C}^0(I, \mathbf{R})$, és una derivació. En aquest cas el morfisme α no és més que la inclusió de les funcions de classe C^1 com a subàlgebra de les de classe C^0.

Mòduls graduats i àlgebres graduades

Sigui A un K-mòdul. Una *graduació* (de tipus $\mathbf{N}$) en A és una descomposició en suma directa de submòduls $A = \oplus_{k \geq 0} A_k$. Es diu que A és un *mòdul graduat*.
Els elements de A_k es diuen *homogenis* de *grau* k, i tot element de A s'escriu de manera única com a suma d'elements homogenis, $x = \sum_{k \geq 0} x_k$.

Suposem a més que A és una K-àlgebra. Es diu *graduada* si $A_k A_\ell \subset A_{k+\ell}$. En cas de tenir unitat 1, necessàriament $1 \in A_0$.

Exemple El conjunt dels polinomis en una variable amb coeficients en K, $K[X]$, és una K-àlgebra graduada.
Més generalment, el conjunt dels polinomis en n variables, $K[X_1, \dots, X_n]$. Els seus elements de grau k són els polinomis homogenis de grau total k.

Exemple Sigui E un K-mòdul, $\mathsf{T}^k(E) = E \otimes \overset{k}{\cdots} \otimes E$ el mòdul dels tensors k-contravariants. El mòdul graduat $\mathsf{T}^\bullet(E) = \oplus_{k \geq 0} \mathsf{T}^k(E)$, amb el producte de tensors, és una àlgebra graduada associativa i unitària, anomenada *àlgebra tensorial* (contravariant) de E.

Exemple També és una àlgebra graduada l'*àlgebra exterior* de E, $\Lambda^\bullet(E) = \oplus_{k \geq 0} \Lambda^k(E)$. És associativa, unitària i *anticommutativa*: si $z_k \in \Lambda^k(E)$ i $z_\ell \in \Lambda^\ell(E)$, llavors $z_k \wedge z_\ell = (-1)^{k\ell} z_\ell \wedge z_k$.

Derivacions i antiderivacions d'una àlgebra graduada

Sigui A una K-àlgebra graduada. Una derivació $d: A \to A$ es diu *de grau* r (on $r \in \mathbf{Z}$) si $dA_k \subset A_{k+r}$ (convenim que $A_k = \{0\}$ si $k < 0$).

Exemple La derivació ordinària de polinomis $\mathrm{D}: K[X] \to K[X]$ té grau -1.

Una *antiderivació* de grau r de A és una aplicació K-lineal $d: A \to A$ tal que $dA_k \subset A_{k+r}$ i, per a un producte d'elements homogenis $x_k \in A_k$, $x_\ell \in A_\ell$, se satisfà

$$d(x_k x_\ell) = (dx_k)x_\ell + (-1)^{kr} x_k (dx_\ell).$$

(Evidentment si r és parell tenim una derivació.)

Exemple Sigui E un K-mòdul, $x \in E$. Dins l'àlgebra exterior de E^*, el producte interior amb x, $i_x: \Lambda^\bullet(E^*) \to \Lambda^\bullet(E^*)$, és una antiderivació de grau -1.

Sigui d una antiderivació de grau r d'una àlgebra graduada A. Si A té unitat 1, necessàriament $d(1) = 0$. Si A és associativa i $x_i \in A_{k_i}$, llavors $d(x_1 \dots x_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{r(k_1+\dots+k_{i-1})} x_1 \dots x_{i-1}(dx_i)x_{i+1} \dots x_k$.
Si d_1, d_2 són antiderivacions de graus r, s, llavors $d_1 \circ d_2 - (-1)^{rs} d_2 \circ d_1$ és una antiderivació de grau $r + s$. En particular, si r i s són imparells llavors $d_1 \circ d_2 + d_2 \circ d_1$ és una derivació.

Producte tensorial

Sigui K un anell commutatiu. Si E, F són K-mòduls, existeixen un K-mòdul $E \otimes F$ i una aplicació bilineal $c\colon E \times F \to E \otimes F$ amb la propietat següent: tota aplicació bilineal $f_2\colon E \times F \to G$ s'escriu de manera única com $f_2 = f_1 \circ c$, on $f_1\colon E \otimes F \to G$ és una aplicació lineal. Es diu que $E \otimes F$ és el *producte tensorial* de E i F. La imatge de (x, y) per c s'anomena *producte tensorial* de x i y i es denota $x \otimes y$. Així $f_2(x, y) = f_1(x \otimes y)$.
D'aquesta manera el conjunt d'aplicacions bilineals $\mathcal{L}^2(E \times F; G)$ és isomorf al d'aplicacions lineals $\mathcal{L}(E \otimes F, G)$, i en particular $\mathcal{L}^2(E \times F; K) \cong (E \otimes F)^*$.
Si E té una base (e_i) i F té una base (f_j), llavors $(e_i \otimes f_j)$ és una base de $E \otimes F$.
Igualment es defineix el producte tensorial $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$ d'un nombre finit de mòduls. Les aplicacions lineals $E_1 \otimes \dots \otimes E_k \to G$ es corresponen amb les aplicacions multilineals $E_1 \times \dots \times E_k \to G$.
El producte tensorial és associatiu en el sentit que hi ha isomorfismes canònics com ara $(E \otimes F) \otimes G \cong E \otimes (F \otimes G) \cong E \otimes F \otimes G$. També tenim $E \otimes K \cong K \otimes E \cong E$, i $E \otimes F \cong F \otimes E$.

Donades aplicacions lineals $u_1\colon E_1 \to F_1$, $u_2\colon E_2 \to F_2$, es defineix una aplicació lineal $u_1 \otimes u_2\colon E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$ a partir de $(u_1 \otimes u_2)(x_1 \otimes x_2) = u_1(x_1) \otimes u_2(x_2)$. S'obté així una aplicació lineal $\mathcal{L}(E_1, F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2, F_2) \to \mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2)$
En el cas de mòduls lliures de dimensió finita aquesta aplicació és un isomorfisme: $\mathcal{L}(E_1, F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2, F_2) \cong \mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2)$. Com a casos particulars es té $E_1^* \otimes E_2^* \cong (E_1 \otimes E_2)^*$, amb $(\alpha \otimes \beta)(x \otimes y) = \alpha(x)\beta(y)$, i $E^* \otimes F \cong \mathcal{L}(E, F)$, amb $(\alpha \otimes y)(x) = \alpha(x)y$.

Exemple Si E té una base finita (e_i) i (e^i) és la seva base dual, l'isomorfisme $E \otimes E^* \cong \mathrm{End}(E)$ identifica l'aplicació identitat de E amb el tensor de Kronecker $\delta^i{}_j \, e_i \otimes e^j$.

Àlgebra tensorial

Sigui E un K-mòdul. Es defineix $\mathsf{Tens}^k(E) \equiv \mathsf{T}^k(E) \equiv E^{\otimes k} = E \otimes \overset{k}{\dots} \otimes E$ (convenim $\mathsf{T}^1(E) = E$, $\mathsf{T}^0(E) = K$). S'anomena *potència tensorial* k-èsima de E. Els seus elements es diuen *tensors* k vegades contravariants, o més breument k-*contravariants*. Si E té una base (e_i) formada per n elements, llavors $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})$ és una base de $\mathsf{T}^k(E)$ formada per n^k elements. Qualsevol tensor $T \in \mathsf{T}^k(E)$ s'escriurà doncs $T = t^{i_1 \cdots i_k} \, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$.
Si $f\colon E \to F$ és lineal, es pot definir una aplicació lineal $\mathsf{T}^k(f)\colon \mathsf{T}^k(E) \to \mathsf{T}^k(F)$ per $\mathsf{T}^k(f)(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = f(x_1) \otimes \dots \otimes f(x_k)$.
Considerem ara el mòdul graduat $\mathsf{T}^\bullet(E) = \oplus_{k \geq 0} E^{\otimes k} = K \oplus E \oplus E^{\otimes 2} \oplus \dots$ Donats tensors homogenis $t_k \in E^{\otimes k}$, $t_\ell \in E^{\otimes \ell}$, podem fer-ne el producte tensorial $t_k \otimes t_\ell \in E^{\otimes (k+\ell)}$. D'aquesta manera $\mathsf{T}^\bullet(E)$ és una àlgebra graduada associativa i unitària, anomenada *àlgebra tensorial contravariant* de E.

De forma semblant es poden definir els tensors ℓ-*covariants* amb $\mathsf{Tens}_\ell(E) \equiv \mathsf{T}_\ell(E) \equiv (E^*)^{\otimes \ell} = E^* \otimes \overset{\ell}{\dots} \otimes E^*$, i l'*àlgebra tensorial covariant* $\mathsf{T}_\bullet(E) = \oplus_{\ell \geq 0} \mathsf{T}_\ell(E)$. Si E té una base finita (e_i) i (e^j) és la seva base dual, llavors $\mathsf{T}_\ell(E)$ té una base $(e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_\ell})$.
Si $f\colon E \to F$ és lineal, es pot definir una aplicació transposada ${}^t f\colon F^* \to E^*$ i doncs $\mathsf{T}^\ell({}^t f)\colon \mathsf{T}_\ell(F) \to \mathsf{T}_\ell(E)$.

Finalment, tenim els *tensors mixtos* k-contravariants ℓ-covariants, que són els elements de $\mathsf{Tens}^k_\ell(E) \equiv \mathsf{T}^k_\ell(E) = (\otimes^\ell E^*) \otimes (\otimes^k E)$ (l'ordre en què posem els dos factors és poc rellevant).
A partir de la base de E obtenim la base $(e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_\ell} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})$ de $\mathsf{T}^k_\ell(E)$. Un element $T \in \mathsf{T}^k_\ell(E)$ es pot escriure

$$T^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_\ell} \, e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_\ell} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} .$$

Considerem una nova base $(\bar{e}_r)$ de E, relacionada amb la primera per $\bar{e}_r = e_i P^i_r$. Llavors tenim el canvi de base

$$\bar{e}^{s_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{s_\ell} \otimes \bar{e}_{r_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{r_k} = \\ = (P^{-1})^{s_1}_{j_1} \cdots (P^{-1})^{s_\ell}_{j_\ell} P^{i_1}_{r_1} \cdots P^{i_k}_{r_k} \, e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_\ell} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} .$$

Si l'expressió de T en la nova base és $\bar{T}^{r_1 \cdots r_k}_{s_1 \cdots s_\ell} \, \bar{e}^{s_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{s_\ell} \otimes \bar{e}_{r_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{r_k}$, la relació entre els components de T en ambdues bases és

$$\bar{T}^{r_1 \cdots r_k}_{s_1 \cdots s_\ell} = P^{j_1}_{s_1} \cdots P^{j_\ell}_{s_\ell} (P^{-1})^{r_1}_{i_1} \cdots (P^{-1})^{r_k}_{i_k} \, T^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_\ell} .$$

La suma directa de tots els mòduls $\mathsf{T}^k_\ell(E)$ constitueix l'*àlgebra tensorial mixta* $\mathsf{T}^\bullet_\bullet(E) = \oplus_{k,\ell}\mathsf{T}^k_\ell(E)$. Concretament, el producte de dos elements homogenis del tipus $\alpha_1\otimes\ldots\otimes\alpha_\ell\otimes x_1\otimes\ldots x_k$ i $\beta_1\otimes\ldots\otimes\beta_{\ell'}\otimes y_1\otimes\ldots y_{k'}$ és

$$\alpha_1\otimes\ldots\otimes\alpha_\ell\otimes\beta_1\otimes\ldots\otimes\beta_{\ell'}\otimes x_1\otimes\ldots x_k\otimes y_1\otimes\ldots y_{k'}\,.$$

Semblantment a la definició de $\mathsf{T}^k(f)$, si $f\colon E\to F$ és un *isomorfisme* lineal es pot definir $\mathsf{T}^k_\ell(f)\colon \mathsf{T}^k_\ell(E)\to\mathsf{T}^k_\ell(F)$ lineal per

$$\mathsf{T}^k_\ell(f)(\alpha_1\otimes\ldots\otimes\alpha_\ell\otimes x_1\otimes\ldots\otimes x_k) = \\ = {}^tf^{-1}(\alpha_1)\otimes\ldots\otimes{}^tf^{-1}(\alpha_\ell)\otimes f(x_1)\otimes\ldots\otimes f(x_k)\,.$$

Exemple Considerem un canvi de base $\bar e_k = e_iP^i_k$ en E.
Donat $T = a_{ij}\,e^i\otimes e^j$, en la nova base s'expressa $T = \bar a_{ij}\,\bar e^i\otimes\bar e^j$. La relació entre les matrius $A=(a_{ij})$ i $\bar A = (\bar a_{ij})$ és $\bar A = P^\mathsf{T}AP$.
Semblantment, donat $T = a^i{}_j e_i\otimes e^j = \bar a^i{}_j\bar e_i\otimes\bar e^j$, les matrius corresponents estan relacionades per $\bar A = P^{-1}AP$.

Un tensor $S\in\mathsf{T}^k_\ell(E)$ es pot interpretar de diferents maneres. Suposem primer, per simplicitat, que S és un tensor descomponible, $S = \alpha_1\otimes\ldots\otimes\alpha_\ell\otimes x_1\otimes\ldots x_k$. Llavors S defineix una forma multilineal $\hat S\colon E^\ell\times(E^*)^k\to K$ de la manera següent: $\hat S(y_1,\ldots,y_\ell,\beta_1,\ldots\beta_k) = \langle\alpha_1,y_1\rangle\ldots\langle\alpha_\ell,y_\ell\rangle\langle\beta_1,x_1\rangle\ldots\langle\beta_k,x_k\rangle$. Això també es pot considerar com una forma lineal, denotem-la també $\hat S\colon\mathsf{T}^\ell_k(E)\to K$, actuant sobre tensors ℓ-contravariants k-covariants: $\hat S(y_1\otimes\ldots\otimes y_\ell\otimes\beta_1\otimes\ldots\otimes\beta_k)$. De manera similar es pot considerar com una aplicació multilineal $\hat S\colon E^\ell\to\mathsf{T}^k(E)$, o equivalentment com una aplicació lineal $\hat S\colon\mathsf{T}^\ell(E)\to\mathsf{T}^k(E)$ d'acord amb $\hat S(y_1\otimes\ldots\otimes y_\ell) = \langle\alpha_1,y_1\rangle\ldots\langle\alpha_\ell,y_\ell\rangle\,x_1\otimes\ldots x_k$. En general S és combinació lineal d'elements descomponibles, i les expressions anteriors esdevenen una mica més complicades. Normalment no posarem cap senyal sobre S entès en aquestes diferents interpretacions, i escriurem per exemple $S(y_1\otimes\ldots y_\ell\otimes\beta_1\otimes\ldots\otimes\beta_k)$.

Donat un *isomorfisme* $f\colon E\to F$ i un tensor $S\in\mathsf{T}^k_\ell(E)$, el tensor transformat $\mathsf{T}^k_\ell(f)(S)$, interpretat com a funció multilineal de vectors i covectors de F, actua per

$$(\mathsf{T}^k_\ell f)(S)(v_1,\ldots,v_\ell,\omega_1,\ldots,\omega_k) = \\ = S(f^{-1}(v_1),\ldots,f^{-1}(v_\ell),{}^tf(\omega_1),\ldots,{}^tf(\omega_k))\,.$$

En el cas de ser E lliure de dimensió finita tenim les identificacions anteriors en forma d'isomorfismes $\mathsf{T}^k_\ell(E)\cong(\mathsf{T}^\ell_k(E))^*\cong\mathcal{L}(\mathsf{T}^k(E),\mathsf{T}^\ell(E))$.

La *contracció interior* de l'i-èsim índex contravariant amb el j-èsim índex covariant d'un tensor mixt és l'aplicació $c^i_j\colon\mathsf{T}^k_\ell(E)\to\mathsf{T}^{k-1}_{\ell-1}(E)$ definida per

$$c^i_j(\alpha_1\otimes\ldots\otimes\alpha_\ell\otimes x_1\otimes\ldots\otimes x_k) = \\ = \langle\alpha_j,x_i\rangle\,\alpha_1\otimes\ldots\otimes\widehat{\alpha_j}\otimes\ldots\otimes\widehat{x_i}\otimes\ldots\otimes x_k\,,$$

on els barrets denoten l'absència dels termes corresponents.

Exemple Considerem en particular $c^1_1\colon\mathsf{T}^1_1(E)\to K$. Si $T\in\mathsf{T}^1_1(E)$, aleshores $c^1_1(T)$ no és més que la traça de T considerat com a endomorfisme de E: si $T = a^j{}_i\,e^i\otimes e_j$, $c^1_1(T) = a^i{}_i$.

Es poden combinar les operacions de producte tensorial i contracció interior per obtenir noves operacions amb tensors. Per exemple, si $x\in E$ i $T\in\mathsf{T}_2(E)$, es pot definir una contracció de x amb T, i_xT, per $i_x(\alpha\otimes\beta) = \langle\alpha,x\rangle\beta$. Interpretant T com a funció bilineal en $E\times E$, és $i_xT = T(x,\cdot)$. Si $x = x^ie_i$ i $T = a_{ij}\,e^i\otimes e^j$, $i_xT = x^ia_{ij}e^j$.

Tensors simètrics i antisimètrics

Considerem el mòdul dels tensors k-contravariants $\mathsf{T}^k(E)$. Sigui $\sigma\in\mathfrak{S}_k$ una permutació de $\{1,\ldots,k\}$. L'expressió $\sigma(x_1\otimes\ldots\otimes x_k) = x_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes x_{\sigma^{-1}(k)}$ defineix un endomorfisme de $\mathsf{T}^k(E)$. Un tensor $T\in\mathsf{T}^k(E)$ es diu *simètric* si, per a tota σ, $\sigma(T) = T$; es diu *antisimètric* si, per a tota σ, $\sigma(T) = \varepsilon_\sigma T$, on ε_σ és la signatura de σ.

Suposem ara que K és un cos de característica 0 (o si més no que $k!$ és invertible dins K). Donat un tensor T de grau k qualsevol, es pot definir un *simetritzat* de T per $\frac{1}{k!}\sum_\sigma\sigma(T)$ i un *antisimetritzat* per $\frac{1}{k!}\sum_\sigma\varepsilon_\sigma\,\sigma(T)$, on els sumatoris recorren totes les permutacions de $\{1,\ldots,k\}$. Si T ja era respectivament simètric o antisimètric aquestes dues operacions el deixen invariant.

Podem expressar l'antisimetritzat d'un tensor descomponible $x_1\otimes\ldots\otimes x_k$ per $\frac{1}{k!}\,\epsilon^{i_1\cdots i_k}\,x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_k}$. Aquí $\epsilon^{i_1\cdots i_k}$ denota el *símbol de Levi-Civita*, que val 1 quan $i_1\cdots i_k$ és una permutació parella dels índexs, -1 quan és imparella, i 0 altrament.

Suposem que tenim $T\in\mathsf{T}_k(E)$, de manera que el podem considerar com una forma multilineal $\hat T\colon E^k\to K$. Afirmar que T és simètric equival a afirmar que $\hat{T}$ és simètrica: $T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = T(x_1, \dots, x_k)$ per a tota permutació σ. Anàlogament, afirmar que T és antisimètric equival a afirmar que $\hat{T}$ és antisimètrica. Es poden enunciar resultats similars amb $T \in \mathsf{T}^k(E)$.

Exemple Un tensor $T \in E \otimes E$ es descompon de manera única en suma d'un tensor simètric i un d'antisimètric, ja que $t^{ij} = \frac{t^{ij}+t^{ji}}{2} + \frac{t^{ij}-t^{ji}}{2}$.

Àlgebra exterior

La manera elegant de definir l'*àlgebra exterior* de E és com un quocient de l'àlgebra tensorial per un ideal, $\Lambda^\bullet(E) = \mathsf{T}^\bullet(E)/\mathfrak{I}$, on $\mathfrak{I}$ és l'ideal bilateral generat pels elements $x \otimes x$, amb $x \in E$.

La graduació de l'àlgebra tensorial dóna una graduació $\Lambda^\bullet(E) = \oplus_{k \geq 0} \Lambda^k(E)$; cadascun d'aquests mòduls s'anomena *potència exterior* k-èsima de E, i els seus elements a vegades s'anomenen k-vectors. Com amb els tensors tenim $\Lambda^1(E) = E$ i $\Lambda^0(E) = K$.

La propietat fonamental de les potències exteriors és similar a la del producte tensorial: hi ha una aplicació k-lineal alternada $c \colon E^k \to \Lambda^k(E)$ amb la propietat següent: tota aplicació k-lineal alternada $f_k \colon E^k \to G$ s'escriu de manera única com $f_k = f_1 \circ c$, on $f_1 \colon \Lambda^k(E) \to G$ és una aplicació lineal. S'escriu $c(x_1, \dots, x_k) = x_1 \wedge \dots \wedge x_k$, i s'anomena producte exterior dels vectors $x_1, \dots, x_k$.

Si $f \colon E \to F$ és lineal, de manera semblant a $\mathsf{T}^k(f)$ es pot definir $\Lambda^k(f) \colon \Lambda^k(E) \to \Lambda^k(F)$ per $\Lambda^k(f)(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) = f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_k)$.

L'àlgebra exterior és unitària i associativa.

El producte d'elements de l'àlgebra exterior ve regit per les propietats bàsiques següents: $x_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(k)} = \varepsilon_\sigma \, x_1 \wedge \dots \wedge x_k$, i, si per a dos índexs i, j diferents es té $x_i = x_j$, llavors $x_1 \wedge \dots \wedge x_k = 0$.

D'aquí es dedueix que l'àlgebra exterior és anticommutativa: donats elements homogenis $z_k \in \Lambda^k(E)$ i $z_\ell \in \Lambda^\ell(E)$, llavors $z_k \wedge z_\ell = (-1)^{k\ell} z_\ell \wedge z_k$.

Un punt interessant del producte exterior és que permet controlar la independència lineal d'un conjunt finit de vectors. Suposant que K és un cos, els vectors $x_1, \dots, x_k \in E$ són linealment independents sii $x_1 \wedge \dots \wedge x_k \neq 0$.

Si E té una base (e_i), llavors els k-vectors $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, amb $i_1 < \dots < i_k$, constitueixen una base de $\Lambda^k(E)$; així, si E té dimensió n, $\Lambda^k(E)$ té dimensió $\binom{n}{k}$, i l'àlgebra $\Lambda^\bullet(E)$ té dimensió 2^n. Un element $w \in \Lambda^k(E)$ s'expressa doncs $w = \sum' w^{i_1 \cdots i_k} \, e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, on el sumatori s'estén als multiíndexs tals que $i_1 < \dots < i_k$. A partir d'un canvi de base en E es poden obtenir expressions per als canvis de base en les respectives potències exteriors de E.

Exemple Suposem que E té dimensió finita n, de manera que $\Lambda^n(E)$ té dimensió 1.
Si $f \colon E \to E$ és un endomorfisme, $\Lambda^n(f) \colon \Lambda^n(E) \to \Lambda^n(E)$ és una homotècia; la seva raó és el determinant de f.
Donada una base (e_i) de E i n vectors (x_i), $x_1 \wedge \dots \wedge x_n = \det(M) \, e_1 \wedge \dots \wedge e_n$, essent M la matriu les columnes de la qual són els components dels vectors en la base donada. En particular, donat un canvi de base $\bar{e}_j = e_i P^i_j$, tenim que $\bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_n = \det(P) \, e_1 \wedge \dots \wedge e_n$. A l'espai $\Lambda^n(E^*)$ el canvi corresponent és $\bar{e}^1 \wedge \dots \wedge \bar{e}^n = \det(P)^{-1} \, e^1 \wedge \dots \wedge e^n$.

Si K és un cos de característica 0, la manera més simple d'estudiar l'àlgebra exterior és identificar-la amb els tensors antisimètrics, tal com anem a descriure. En aquest cas, tensors antisimètrics i tensors antisimetritzats coincideixen, i es corresponen per un isomorfisme lineal amb els elements del quocient esmentat abans, $\mathsf{T}^\bullet(E)/\mathfrak{I}$.

D'una banda, els tensors antisimètrics constitueixen un subespai vectorial. Ara bé, donats tensors antisimètrics $z_k \in \mathsf{T}^k(E)$ i $z_\ell \in \mathsf{T}^\ell(E)$, el seu producte tensorial no és en general antisimètric, però es pot antisimetritzar posant

$$z_k \wedge z_\ell = \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \, \sigma(z_k \otimes z_\ell)\,.$$

D'aquesta manera s'obté una descripció alternativa de l'àlgebra exterior.

En particular, donats k vectors $x_1, \dots, x_k \in E$, tenim $x_1 \wedge \dots \wedge x_k = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \, x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(k)}$.

Suposem E de dimensió finita. De la mateixa manera que els tensors k-covariants $T \in \mathsf{T}_k(E) = \mathsf{T}^k(E^*)$ corresponen a les formes multilineals $\hat{T} \colon E^k \to K$, els k-covectors $\omega \in \Lambda^k(E^*)$ corresponen a formes k-lineals alternades $\hat{\omega} \colon E^k \to K$. De retruc, $\Lambda^k(E^*)$ s'identifica al dual $(\Lambda^k E)^*$.

Donat $\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_k \in \mathsf{\Lambda}^k(E^*)$, la seva acció sobre k vectors és

$$(\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_k)(x_1, \ldots, x_k) = \det(\langle \theta_i, x_j \rangle).$$

Més generalment, si $\alpha \in \mathsf{\Lambda}^k(E^*)$ i $\beta \in \mathsf{\Lambda}^\ell(E^*)$, llavors

$$(\alpha \wedge \beta)(x_1, \ldots, x_{k+\ell}) = \\ = \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon_\sigma \, \alpha(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) \, \beta(x_{\sigma(k+1)}, \ldots, x_{\sigma(k+\ell)}) \,.$$

Considerem la *contracció interior* o producte interior en la forma següent. Fixat $x \in E$, es té una aplicació lineal $i_x \colon \mathsf{\Lambda}^k(E^*) \to \mathsf{\Lambda}^{k-1}(E^*)$ definida de la manera següent: si $\alpha_i \in E^*$,

$$i_x(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \langle \alpha_j, x \rangle \, \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha_j} \wedge \ldots \wedge \alpha_k \,,$$

on el barret denota l'omissió del terme corresponent. Considerant un element $\omega \in \mathsf{\Lambda}^k(E^*)$ com a forma k-lineal, $i_x\omega$ també es pot expressar

$$i_x\omega(y_1, \ldots, y_{k-1}) = \omega(x, y_1, \ldots, y_{k-1}) \,.$$

En particular, si $\theta \in E^*$ tenim $i_x\theta = \langle \theta, x \rangle$, i si $\lambda \in K$ llavors $i_x\lambda = 0$.

L'aplicació $i_x \colon \mathsf{\Lambda}^\bullet(E^*) \to \mathsf{\Lambda}^\bullet(E^*)$ satisfà les propietats següents: $i_x \circ i_x = 0$, i sobre un producte exterior de formes homogènies

$$i_x(\alpha \wedge \beta) = (i_x\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\mathrm{grau}(\alpha)} \alpha \wedge (i_x\beta) \,,$$

de manera que i_x és una antiderivació de grau -1 de l'àlgebra exterior de E^*.

Operacions de grups sobre conjunts

Sigui G un grup, amb element neutre e. Una *operació* (o acció) per l'esquerra de G sobre un conjunt E és una aplicació $\alpha \colon G \times E \to E$, que denotarem per $\alpha(s, x) \equiv s \cdot x$, tal que satisfà les dues propietats següents:

- $e \cdot x = x$.
- $t \cdot (s \cdot x) = (ts) \cdot x$.

Per a cada $s \in G$ l'aplicació $\alpha_s = \alpha(s, \cdot) \colon E \to E$ és bijectiva amb inversa $\alpha_{s^{-1}}$. Denotant per $\mathfrak{S}_E$ el conjunt de les permutacions de E, obtenim així una aplicació $\tilde{\alpha} \colon G \to \mathfrak{S}_E$, $s \mapsto \alpha_s$, que és un morfisme de grups.

Fixat $x \in E$, tenim també una aplicació $\alpha(\cdot, x) \colon G \to E$, tal que $s \mapsto s \cdot x$. La imatge d'aquesta aplicació s'anomena *òrbita* de x, i es representa per $\mathcal{O}_x \equiv G \cdot x$.

La relació de pertànyer a la mateixa òrbita és una relació d'equivalència en E; el conjunt quocient és l'espai de les òrbites i es representa per E/G.

Fixat un punt $x \in E$, el conjunt $S_x = \{ s \in G \mid s \cdot x = x \}$ és un subgrup de G anomenat estabilitzador de x. Hi ha una bijecció $G/S_x \to G \cdot x$.

Exemple El grup multiplicatiu $\mathbf{R}^*$ opera sobre $\mathbf{R}^n$ per $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$. Les òrbites són $\{0\}$ i els subespais de dimensió 1 privats del 0. Si en lloc de $\mathbf{R}^n$ prenem $E = \mathbf{R}^n - \{0\}$, l'espai de les òrbites és l'espai projectiu $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{R})$.

Exemple El grup multiplicatiu $\mathbf{Z}^* = \{1, -1\}$ també opera sobre $\mathbf{S}_n$, i igualment el quocient $\mathbf{S}_n/\mathbf{Z}^*$ s'identifica amb $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$.

Exemple Considerant $\mathbf{S}_1 \subset \mathbf{C}$, el grup additiu $\mathbf{R}$ opera sobre $\mathbf{S}_1$ per $(t, u) \mapsto e^{2\pi i t} u$.

Exemple Fixada $A \in \mathsf{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathbf{R}$ opera sobre $\mathbf{R}^n$ per $(t, x) \mapsto e^{At} x$.

Exemple El grup $\mathsf{GL}_n(\mathbf{R})$ opera sobre $\mathbf{R}^n$ per $(U, x) \mapsto Ux$.

Exemple El grup $\mathsf{GL}_n(\mathbf{R})$ opera sobre $\mathsf{M}_n(\mathbf{R})$ per $(U, A) \mapsto UAU^{-1}$.