Teorema de redreçament de camps vectorials

Xavier Gràcia
Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya
16 desembre 2020

Teorema de redreçament de camps vectorials

Sigui M una varietat, X un camp vectorial diferenciable en M, $p \in M$.
Si $X(p) \neq 0$, llavors existeix un sistema de coordenades (x^i) en p amb el qual localment es pot expressar $X = \partial/\partial x^1$.

El procediment per redreçar X en p es pot resumir així:
Es pren una hipersuperfície $M_\circ \subset M$ que contingui p i tal que $X_p \notin \mathrm{T}_p M_\circ$.
Aleshores la restricció $F_\circ \colon \mathcal{D} \cap (\mathbf{R} \times M_\circ) \to M$ del flux de X és un difeomorfisme local en $(0,p)$ tal que, en un obert prou petit, $F_{\circ *}(\frac{\partial}{\partial t}) = X$.

Prova

Lema 1

Sigui $F \colon N \to M$ una aplicació diferenciable. Sigui $j \colon N_\circ \hookrightarrow N$ una subvarietat, $F_\circ = F \circ j \colon N_\circ \to M$ la restricció de F a $N_\circ$. Siguin $Y \in \mathfrak{X}(N)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ camps vectorials F-relacionats.
Si Y és tangent a $N_\circ$, i $Y_\circ \in \mathfrak{X}(N_\circ)$ és la seva restricció a $N_\circ$, llavors $Y_\circ$ i X estan $F_\circ$-relacionats.

En efecte, a partir de la definició, de $Y_\circ \sim_j Y$ i $Y \sim_F X$ es dedueix que $Y_\circ \sim_{F_\circ} X$.

Lema 2

Siguin $N = \mathbf{R} \times M$, i $M_\circ \subset M$ una subvarietat.
El camp vectorial $\frac{\partial}{\partial t}$ de $\mathbf{R} \times M$ és tangent a la subvarietat $\mathbf{R} \times M_\circ$.

Amb la identificació $\mathrm{T}_{(t,p)}(\mathbf{R} \times M) = \mathrm{T}_t \mathbf{R} \times \mathrm{T}_p M$, el camp vectorial $\frac{\partial}{\partial t}$ és $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{(t,p)} = \big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_t, 0_p\big)$, i el vector 0_p és tangent a qualsevol subvarietat $M_\circ \subset M$, per la qual cosa $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{(t,p)}$ és tangent a $\mathbf{R} \times M_\circ$.

Lema 3

Sigui $F \colon \mathcal{D} \to M$ el flux d'un camp vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, on $\mathcal{D} \subset \mathbf{R} \times M$ és el seu domini.
Els camps vectorials $\dfrac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(\mathcal{D})$ i $X \in \mathfrak{X}(M)$ estan F-relacionats.

En efecte, per definició del flux, $\mathrm{T}F \circ \frac{\partial}{\partial t} = F' = X \circ F$.

Lema 4

Amb les notacions del lema anterior, sigui $M_\circ \subset M$ una subvarietat, i sigui $F_\circ \colon (\mathbf{R} \times M_\circ) \cap \mathcal{D} \to M$ la restricció del flux de X.
Aleshores els camps vectorials $\dfrac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}\big((\mathbf{R} \times M_\circ) \cap \mathcal{D}\big)$ i $X \in \mathfrak{X}(M)$ estan $F_\circ$-relacionats.

És conseqüència dels tres lemes anteriors.

Lema 5

Sigui $F \colon N \to M$ una submersió en q. Se suposa $\dim N = \dim M + 1$.
Sigui $N_\circ \hookrightarrow N$ una hipersuperfície tal que $q \in N_\circ$. Sigui $F_\circ \colon N_\circ \to M$ la restricció de F.
$F_\circ$ és un difeomorfisme local en q sii $\operatorname{Ker} \mathrm{T}_q F \cap \mathrm{T}_q N_\circ = \{0\}$.

Com que $\mathrm{T}_q F_\circ = \mathrm{T}_q F|_{\mathrm{T}_q N_\circ}$, tenim que $\operatorname{Ker} \mathrm{T}_q F_\circ = \operatorname{Ker} \mathrm{T}_q F \cap \mathrm{T}_q N_\circ$. Per raó de les dimensions, que $F_\circ$ sigui un difeomeorfisme local en q equival a que la seva aplicació tangent en q sigui injectiva, i això equival a que $\operatorname{Ker} \mathrm{T}_q F \cap \mathrm{T}_q N_\circ = \{0\}$.

Lema 6

Sigui $F \colon \mathcal{D} \to M$ el flux de $X \in \mathfrak{X}(M)$.
Per a tot $p \in M$, F és una submersió en $(0,p)$, i
$$\operatorname{Ker} \mathrm{T}_{(0,p)} F = \big\langle \big(\tfrac{\partial}{\partial t}\big|_0, -X_p\big) \big\rangle$$
(subespai de $\mathrm{T}_{(0,p)} \mathcal{D} \cong \mathrm{T}_0 \mathbf{R} \times \mathrm{T}_p M$).

F és una submersió en $(0,p)$, ja que $F(0,\cdot)$ és la identitat, i per tant $\mathrm{T}_{(0,p)} F$ és suprajectiva.
Per raó de les dimensions, el nucli de $\mathrm{T}_{(0,p)} F$ té dimensió 1; determinem-lo. El camí en M $t \mapsto F(t, F(-t,p)) = p$ és constant, per tant té velocitat nul·la. Aquesta es pot calcular, amb la regla de la cadena, com $\mathrm{T}_{(t,F(-t,p))} F \cdot \big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_t, -X(F(-t,p))\big) = 0$.
Fent $t = 0$ obtenim $\mathrm{T}_{(0,p)} F \cdot \big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_0, -X(p)\big) = 0$.

Lema 7

Amb les notacions anteriors, sigui $M_\circ \subset M$ una subvarietat amb $p \in M_\circ$.
El vector tangent $\big(\frac{\partial}{\partial t}\big|_0, -X_p\big) \in \mathrm{T}_{(0,p)} \mathcal{D}$ és tangent a la subvarietat $(\mathbf{R} \times M_\circ) \cap \mathcal{D}$ sii $X_p \in \mathrm{T}_p M_\circ$.

El raonament és el mateix del lema 2.

Proposició

Sigui M una varietat, X un camp vectorial diferenciable en M, $F \colon \mathcal{D} \to M$ el seu flux, $M_\circ \subset M$ una hipersuperfície. Sigui $p \in M_\circ$. Suposem que $X_p \notin \mathrm{T}_p M_\circ$. Aleshores:

- *La restricció $F_\circ \colon \mathcal{D} \cap (\mathbf{R} \times M_\circ) \to M$ del flux de X és un difeomorfisme local en $(0,p)$.*
- *Hi ha un interval obert $I_\circ \subset \mathbf{R}$ i un conjunt obert $U_\circ \subset M_\circ$ tals que $(0,p) \in I_\circ \times U_\circ \subset \mathcal{D}$ i la restricció $F_{\infty} \colon I_\circ \times U_\circ \to U = F(I_\circ \times U_\circ)$ de $F_\circ$ és un difeomorfisme amb la seva imatge. Llavors*
$$F_{\infty *}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = X|_U .$$
- *Suposem a més que $(U_\circ, \varphi_\circ)$ és una carta de $M_\circ$. Llavors (U, φ), amb $\varphi = (\mathrm{Id} \times \varphi_\circ) \circ F_{\infty}^{-1} \colon U \to I_\circ \times \varphi_\circ(U_\circ)$, és una carta de M en p tal que, escrivint-ne les coordenades $\varphi = (x^1 \ldots, x^m)$, s'expressa $X|_U = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$.*

Pel lema 7, com que $X_p \notin \mathrm{T}_p M_\circ$, el vector $\big(\frac{\partial}{\partial t}\big|_0, -X_p\big) \in \mathrm{T}_{(0,p)} \mathcal{D}$ no és tangent a $(\mathbf{R} \times M_\circ) \cap \mathcal{D}$ en $(0,p)$.
Pel lema 6 això implica que $\operatorname{Ker} \mathrm{T}_{(0,p)} F \cap \mathrm{T}_{(0,p)} \left(\mathcal{D} \cap (\mathbf{R} \times M_\circ)\right) = \{0\}$.
I pels lemes 6 i 5, resulta que la restricció $F_\circ \colon \mathcal{D} \cap (\mathbf{R} \times M_\circ) \to M$ és un difeomorfisme local en $(0,p)$.
Essent difeomorfisme local, la seva restricció a un obert prou petit defineix un difeomorfisme F_∞ amb la seva imatge. Aquest obert pot ser de la forma $I_\circ \times U_\circ$, ja que aquests conjunts són una base de veïnats de la topologia producte.
Pel lema 4, els camps vectorials $\dfrac{\partial}{\partial t}$ en $(\mathbf{R} \times M_\circ) \cap \mathcal{D}$ i X en M estan $F_\circ$-relacionats, i també F_∞-relacionats. Com que aquesta aplicació és un difeomorfisme, això significa que $F_{\infty *}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right) = X|_U$.
Finalment, podem prendre com a $U_\circ$ un obert coordenat de $M_\circ$, amb una carta $(U_\circ, \varphi_\circ)$. Aleshores $(I_\circ \times U_\circ, \mathrm{Id} \times \varphi_\circ)$ és una carta de $I_\circ \times U_\circ$, i component amb el difeomorfisme F_∞
$$\varphi = (\mathrm{Id} \times \varphi_\circ) \circ F_\infty^{-1} \colon U \to I_\circ \times \varphi_\circ(U_\circ) \subset \mathbf{R}^m$$
és una carta de M. Si escrivim x^i les seves funcions coordenades, $X|_U = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$. ∎