

## Particions de la unitat

Xavier Gràcia

Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya

25 setembre 2022

Una eina tècnica de capital importància en geometria diferencial és el concepte de partició de la unitat. En una varietat diferenciable, l'existència de particions de la unitat és imprescindible per a garantir l'existència de mètriques riemannianes.

En aquestes notes pressuposem demostrada l'existència de funcions altiplà, així com algunes nocions de topologia. Se suposa sempre que les varietats considerades són Hausdorff.

Sigui  $X$  un espai topològic. Una família  $(A_i)_{i \in I}$  de parts de  $X$  es diu **localment finita** quan tot punt de  $X$  té un veïnat que talla un nombre finit dels  $A_i$ .

Una **partició (contínua) de la unitat** sobre  $X$  és una família  $(\psi_i)_{i \in I}$  de funcions contínues  $\psi_i: M \rightarrow \mathbf{R}$  tal que:

- $0 \leq \psi_i \leq 1$ ,
- els suports  $\text{Supp}(\psi_i)$  ( $i \in I$ ) formen una família localment finita,
- $\sum_{i \in I} \psi_i = 1$ .

(Notem que la suma està ben definida per la condició sobre els suports.)

La partició es diu **subordinada** a un recobriment  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  de  $M$  si cada  $\text{Supp}(\psi_i)$  està contingut en algun  $U_\alpha$ .

**Remarca** A vegades es defineix aquesta noció amb els dos conjunts d'índexs,  $I, A$ , iguals, i imposant  $\text{Supp}(\psi_\alpha) \subset U_\alpha$ .

De fet, a partir d'una partició de la unitat  $(\psi_i)$  segons la primera noció se n'obté una altra,  $(\chi_\alpha)$ , de la manera següent: per a cada  $i$  prenem un  $\alpha(i)$  tal que  $\text{Supp}(\psi_i) \subset U_{\alpha(i)}$ . Llavors definim  $\chi_\alpha = \sum_{\substack{i \in I \\ \alpha(i) = \alpha}} \psi_i$ , que compleix les condicions requerides.

Es pot provar que un espai de Hausdorff és paracompacte sii per a tot recobriment obert existeix una partició contínua de la unitat subordinada al recobriment. Nosaltres ens centrarem en el cas de varietats diferenciables, on se satisfà un enunciat similar.

Si  $M$  és una varietat diferenciable, es defineix de manera anàloga el concepte de **partició (diferenciable) de la unitat**, demanant que les funcions  $\psi_i$  siguin diferenciables.

Hi ha diverses vies per a demostrar l'existència de particions de la unitat. En la que exposarem aquí usarem dos resultats previs.

### Lema d'existència de funcions altiplà

Sigui  $M$  una varietat diferenciable,  $p \in M$  un punt,  $V \ni p$  un conjunt obert. Existeix una funció diferenciable  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  tal que:

- $f$  val 1 en un veïnat compacte  $C \ni p$  tal que  $C \subset V$ ,
- $f$  té suport compacte contingut en  $V$ ,
- $0 \leq f \leq 1$ .

### Lema de la ceba

Sigui  $M$  un espai de Hausdorff localment compacte amb base numerable d'oberts. Hi ha una successió d'oberts  $(G_i)_{i \geq 1}$  tal que els  $\bar{G}_i$  són compactes,  $\bar{G}_i \subset G_{i+1}$ , i  $M = \cup_i G_i$ .

Considerem primer el cas més simple d'una varietat amb base numerable d'oberts.

### Teorema d'existència de particions de la unitat (I)

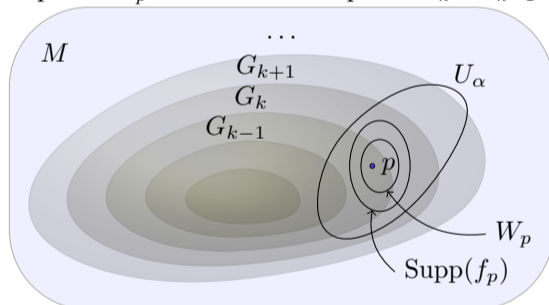
Sigui  $M$  una varietat diferenciable amb base numerable d'oberts. Sigui  $(U_\alpha)$  un recobriment obert de  $M$ . Existeix una partició de la unitat numerable  $(\psi_i)_{i \geq 1}$  subordinada al recobriment  $(U_\alpha)$ , i amb els  $\text{Supp}(\psi_i)$  compactes.

Sigui  $(G_k)_{k \geq 0}$  una «ceba» de  $M$ , amb  $G_0 = \emptyset$ .

Procedim per passos a construir funcions. Sigui  $k \geq 1$ . Per a cada  $p \in \bar{G}_k - G_{k-1}$  sigui  $f_p: M \rightarrow \mathbf{R}$  una funció altiplà de manera que

- $\text{Supp}(f_p) \subset G_{k+1} - \bar{G}_{k-1}$ ,
- hi ha algun  $\alpha$  tal que  $\text{Supp}(f_p) \subset U_\alpha$ , i
- $f_p$  val 1 sobre un obert  $W_p \ni p$ .

Un nombre finit d'aquests  $W_p$  recobreix el compacte  $\bar{G}_k - G_{k-1}$ .



Ordenem les corresponents funcions obtingudes en els successius passos  $k$ : obtenim així una successió  $(f_i)_{i \geq 1}$ . Aquestes funcions tenen suports compactes, els seus suports formen una família localment finita (ja que, per a cadascuna de les funcions corresponent al pas  $k$ , el seu suport només pot tallar els de les funcions dels passos igual, anterior i posterior al seu), i  $\sum f_j > 0$  en tot punt, ja que els corresponents  $W_p$  recobreixen tot  $M$ .

Definim  $\psi_i = f_i / \sum_j f_j$ . Aquestes funcions tenen els mateixos suports que les  $f_i$ , i òbviament satisfan la condició de ser una partició de la unitat. A més, és subordinada al recobriment  $(U_\alpha)$  perquè hem exigut que cada  $f_p$  tingués el suport contingut en algun  $U_\alpha$ . ■

### Teorema d'existència de particions de la unitat (II)

Sigui  $M$  una varietat diferenciable paracompacta. Sigui  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  un recobriment obert de  $M$ . Existeix una partició de la unitat  $(\chi_\alpha)_{\alpha \in A}$  subordinada al recobriment (o sigui,  $\text{Supp}(\chi_\alpha) \subset U_\alpha$ ).

Es defineixen les  $\chi_\alpha$  tal com hem comentat en la remarca sobre els conjunts d'índexs. Amb això hem provat el cas d'una varietat amb base numerable d'oberts.

El cas general en resulta de tenir en compte que tota varietat és la unió disjunta dels seus components connexos, i que en una varietat paracompacta cada component té base numerable d'oberts. Per tant podríem construir una partició de la unitat sobre cadascun dels components, subordinada al recobriment obert donat, i ajuntar-les apropiadament. ■

Com a corollari:

### Lema d'Urysohn llis

Sigui  $M$  una varietat diferenciable paracompacta. Siguin  $A, B \subset M$  conjunts tancats disjunts. Existeix una funció diferenciable  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $f|_A = 1$ ,  $f|_B = 0$ .

Es pren una partició de la unitat subordinada al recobriment obert  $M - A$ ,  $M - B$ . ■

El teorema següent, que ara no provarem, reuneix les diferents propietats equivalents a l'existència de particions de la unitat:

Per a una varietat diferenciable, les condicions següents són equivalents:

- és metrizable
- cada component connex té base numerable d'oberts
- és paracompacta
- té particions diferenciables de la unitat subordinades a qualsevol recobriment obert
- té una mètrica riemanniana