

# Varietats diferenciables

## Exemples bàsics

apunts per a l'assignatura de Varietats Diferenciables  
del grau de Matemàtiques de la FME

Xavier Gràcia

`xgracia@ma4.upc.edu`

`http://www-ma4.upc.edu/~xgracia/vardif`

*Departament de Matemàtica Aplicada IV*  
*Facultat de Matemàtiques i Estadística*  
*Universitat Politècnica de Catalunya*

versió 21 desembre 2014

# Sumari

<b>Prefaci</b>	<b>3</b>
<b>1 Varietats diferenciables</b>	<b>5</b>
1.1 L'atles estereogràfic de l'esfera . . . . .	5
1.2 Construcció d'un altre atlas de l'esfera . . . . .	7
1.3 El tor com a varietat quocient . . . . .	9
1.4 Expressió local i diferenciabilitat d'una funció . . . . .	11
1.5 Diferenciabilitat d'una aplicació . . . . .	13
1.6 Difeomorfismes . . . . .	15
1.7 Estructures diferenciables diferents, però equivalents . . . . .	16
1.8 Càlcul del pull-back d'una funció . . . . .	17
<b>2 Vectors tangents</b>	<b>18</b>
2.1 Canvi de base de vectors tangents . . . . .	18
2.2 Càlcul de l'aplicació tangent . . . . .	19
2.3 Càlcul de la velocitat d'un camí, la diferencial d'una funció, i la derivada d'una funció respecte a un vector . . . . .	21
<b>3 Subvarietats</b>	<b>24</b>
3.1 Coordenades adaptades a l'esfera . . . . .	24
3.2 Diferenciabilitat d'aplicacions entre subvarietats . . . . .	25
3.3 Una immersió injectiva que no és un <i>embedding</i> : la corba en forma de 8 . . . . .	26
3.4 El tor unidimensional i la circumferència són difeomorfs . . . . .	28
<b>4 Fibrats tangent i cotangent</b>	<b>30</b>
4.1 Canvis de coordenades amb camps vectorials i 1-formes diferencials	30
4.2 Parèntesi de Lie de camps vectorials . . . . .	34
4.3 Camps vectorials, 1-formes diferencials i subvarietats . . . . .	36
<b>5 Equacions diferencials i fluxos</b>	<b>39</b>
5.1 Flux d'un camp vectorial no complet . . . . .	39
5.2 Òrbites i redreçament d'un camp vectorial . . . . .	41
5.3 Grups uniparamètrics de transformacions i derivada de Lie . . . . .	43
<b>6 Camps tensorials</b>	<b>46</b>
6.1 Canvi de coordenades en camps tensorials . . . . .	46
6.2 Càlcul amb formes diferencials . . . . .	48
<b>8 Connexions en una varietat</b>	<b>51</b>
8.1 Símbols de Christoffel en diferents sistemes de coordenades . . . . .	51
8.2 Geodèsiques d'una connexió . . . . .	54
<b>9 Varietats pseudoriemannianes</b>	<b>55</b>
9.1 Canvi de coordenades en mètriques . . . . .	55
9.2 Càlcul dels símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita . . . . .	56

## Prefaci

No es pot dominar una matèria, per abstracta que sigui, si no se saben fer els càlculs més simples. En aquest document he intentat reunir exemples de càlculs amb varietats diferenciables, exemples que, segons el meu criteri, cobreixen els mínims imprescindibles, les manipulacions més elementals, sense les quals no es pot dominar la matèria. Cada exemple es presenta redactat en format de problema, amb la idea que qualsevol altre problema semblant es podria resoldre amb els mateixos procediments.

Aquesta primeva versió d'aquest recull està pensada per acompanyar l'assignatura de Varietats Diferenciables, optativa de 4t curs del grau de matemàtiques de la FME. Les notacions són les que usem en l'assignatura, i que es poden trobar en el resum d'apunts *Geometria Diferencial 2. Definicions i resultats* de l'assignatura que la precedí dins l'antiga llicenciatura. La intenció és ampliar i revisar aquest document en el futur, així que us agrairé que em feu arribar correccions i suggeriments.

### Algunes notacions

Les varietats són localment isomorfes a l'espai euclidià  $\mathbf{R}^n$ , així que, directament, a través de coordenades, contenint subvarietats, o esporàdicament per a fer-ne el quocient, aquest apareixerà molt sovint. Escriurem els seus punt com  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , i en algun cas el producte escalar  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ , o la norma al quadrat  $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ . En el cas de  $\mathbf{R}^n$  amb  $n$  petit també usarem les coordenades típiques com ara  $(x, y, z)$ .

A banda de les coordenades cartesianes de  $\mathbf{R}^n$ , també farem servir les coordenades polars  $(r, \phi)$  a  $\mathbf{R}^2$ , i les cilíndriques  $(\rho, \phi, z)$  i esfèriques  $(r, \theta, \phi)$  a  $\mathbf{R}^3$ . Encara que són prou conegudes, l'existència de diverses convencions al respecte fa convenient que les explicitem. En posarem la relació amb les coordenades cartesianes, un possible domini (no són coordenades globals), i la matriu jacobiana del canvi. Ometem especificar les cilíndriques, ja que són les polars de  $\mathbf{R}^2$ , juntament amb la coordenada  $z$ .

$$\text{Coordenades polars} \begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[ &\longrightarrow \mathbf{R}^2 - \{(x, 0) \mid x \leq 0\} \\ (r, \phi) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Coordenades esfèriques} & \begin{cases} x = r \cos \phi \sin \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases} \\
 ]0, +\infty[ \times ]0, \pi[ \times ]-\pi, \pi[ & \longrightarrow \mathbf{R}^3 - \{(x, y, z) \mid x \leq 0, y = 0, z \in \mathbf{R}\} \\
 (r, \theta, \phi) & \mapsto (x, y, z) \\
 \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} & = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

També usarem altres entitats, com ara  $\mathbf{S}_n$  (esfera  $n$ -dimensional),  $\mathbf{P}_n(\mathbf{R}) = \mathbf{P}_n$  (espai projectiu real  $n$ -dimensional),  $\mathbf{T}^n$  (tor  $n$ -dimensional),  $M_n(\mathbf{R})$  (espai de les matrius quadrades d'ordre  $n$  amb coeficients reals) i  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$  (grup lineal en  $n$  variables sobre  $\mathbf{R}$ ), així com diversos subgrups d'aquest.

# 1 Varietats diferenciables

## 1.1 L'atles estereogràfic de l'esfera

Sigui  $S \subset \mathbf{R}^{n+1}$  l'esfera de radi  $a > 0$  centrada a l'origen:  $\mathbf{x}^2 = a^2$ .

Donat un punt  $\mathbf{p} \in S$ , sigui  $\langle \mathbf{p} \rangle \subset \mathbf{R}^{n+1}$  el subespai que genera, i sigui  $\langle \mathbf{p} \rangle^\perp$  el corresponent hiperplà ortogonal.

La *projecció estereogràfica de pol*  $\mathbf{p}$  assigna a cada punt  $\mathbf{x} \in S - \{\mathbf{p}\}$  el punt  $\mathbf{y} = \pi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \in \langle \mathbf{p} \rangle^\perp$  obtingut tallant la recta que passa per  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{x}$  amb l'hiperplà  $\langle \mathbf{p} \rangle^\perp$ .

(a) *Proveu la relació entre  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$ :*

$$\mathbf{y} = \frac{a^2 \mathbf{x} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{p}}{a^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = \frac{(\mathbf{y}^2 - a^2) \mathbf{p} + 2a^2 \mathbf{y}}{\mathbf{y}^2 + a^2}.$$

El punt  $\mathbf{y}$  és de la forma  $\mathbf{y} = \mathbf{p} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{p})$ , i ha de complir que  $\mathbf{y} \cdot \mathbf{p} = 0$ .

Això determina un únic valor de  $\lambda$ :  $\lambda = \frac{a^2}{a^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})}$ .

De manera semblant, a partir de  $\mathbf{y}$  es dedueix un únic  $\mathbf{x} \in S - \{\mathbf{p}\}$ , intersecció de la recta que passa per  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{y}$  amb  $S$ .

(b) *Proveu que  $\pi_{\mathbf{p}}: S - \{\mathbf{p}\} \rightarrow \langle \mathbf{p} \rangle^\perp$  és un homeomorfisme.*

L'aplicació és bijectiva, i tant ella com la seva inversa són contínues, ja que són funcions polinòmiques restringides, respectivament, a un conjunt obert de  $S \subset \mathbf{R}^{n+1}$  i a un hiperplà de  $\mathbf{R}^{n+1}$ .

(c) *Proveu que  $(\pi_{-\mathbf{p}} \circ \pi_{\mathbf{p}}^{-1})(\mathbf{y}) = \frac{a^2}{\mathbf{y}^2} \mathbf{y}$ , independentment del pol triat.*

És un càlcul immediat a partir de les seves expressions.

A partir d'ara particularitzem prenent els pols nord  $\mathbf{p} = (0, \dots, 0, a)$  i sud  $\mathbf{q} = (0, \dots, 0, -a)$ . En ambdós casos tenim  $\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{e}_{n+1} \rangle$ , i el subespai ortogonal és  $\mathbf{R}^n \times \{0\} = \mathbf{R}^n$ .

(d) *Siguin  $\varphi: U = S - \{\mathbf{p}\} \rightarrow \mathbf{R}^n$  i  $\psi: V = S - \{\mathbf{q}\} \rightarrow \mathbf{R}^n$  les corresponents projeccions estereogràfiques.*

*Comproveu que són cartes de  $S$ . Escriviu-ne l'expressió explícita, així com la de les seves inverses.*



Una carta en un espai topològic  $S$  és un homeomorfisme entre un conjunt obert de  $S$  i un conjunt obert d'un espai euclidià.

Són cartes perquè, tal com ja hem vist, són homeomorfismes entre conjunts oberts de  $S$  i l'espai  $\mathbf{R}^n$ .

Quant a les expressions explícites, només cal particularitzar les obtingudes anteriorment:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{a}{a - x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n),$$

$$\varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \frac{a}{a^2 + \mathbf{y}^2} (2ay_1, \dots, 2ay_n, \mathbf{y}^2 - a^2),$$

$$\psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{a}{a + x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n),$$

$$\psi^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \frac{a}{a^2 + \mathbf{z}^2} (2az_1, \dots, 2az_n, a^2 - \mathbf{z}^2).$$

(e) *Proveu que  $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$  és un atlas de  $S$ .*

Aquest «atles estereogràfic» defineix una estructura diferenciable, amb la qual  $S$  és una varietat diferenciable de dimensió  $n$ .



Per comprovar que un conjunt de cartes és un atlas cal comprovar que els seus dominis recobreixen la varietat i que són cartes compatibles, és a dir, que els canvis de coordenades són de classe  $C^\infty$ .

Ja hem comprovat que  $(U, \varphi)$  i  $(V, \psi)$  són cartes  $n$ -dimensionals. A més, els seus dominis evidentment recobreixen l'esfera:  $U \cup V = S$ .

Només resta comprovar que són cartes compatibles. A tal fi hem de calcular els canvis de coordenades. Observem que  $U \cap V = S - \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ , de forma que  $\varphi(U \cap V) = \mathbf{R}^n - \{0\}$ , i anàlogament amb  $\psi$ . Així doncs, calculem

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \mathbf{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}^n - \{0\}, \quad \psi \circ \varphi^{-1}: \mathbf{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}^n - \{0\}$$

i comprovem que són de classe  $C^\infty$ . Però abans ja hem vist que  $\psi \circ \varphi^{-1}(\mathbf{y}) = a^2 \mathbf{y} / \mathbf{y}^2$ , que és clarament de classe  $C^\infty$  per ser una funció polinòmica; el mateix passa amb  $\varphi \circ \psi^{-1}$ .

## 1.2 Construcció d'un altre atlas de l'esfera

Sigui  $S \subset \mathbf{R}^3$  l'esfera definida per  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Sigui  $S^+$  el seu «hemisferi nord», definit per  $z > 0$ , i considerem la projecció  $\psi: S^+ \rightarrow \mathbf{R}^2$  definida per  $\psi(x, y, z) = (x, y)$ .

- (a) Sigui  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$  el disc obert de  $\mathbf{R}^2$  de centre l'origen i radi 1.

Proveu que  $\psi: S^+ \rightarrow D$  és una carta de l'espai topològic  $S$ .

$S^+$  és un subconjunt obert de  $S$  (ja que és la intersecció de  $S$  amb un subconjunt obert de  $\mathbf{R}^3$ , el semiespai  $z > 0$ ) i la seva imatge per  $\psi$  és  $\psi(S^+) = D$ , que és un subconjunt obert de  $\mathbf{R}^2$ .

L'aplicació  $\psi$  és bijectiva, amb inversa  $\psi^{-1}(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ .

Finalment,  $\psi$  és contínua, ja que és la restricció d'una aplicació contínua  $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  a  $S^+$ ; i  $\psi^{-1}$  també, perquè és la corestricció d'una aplicació contínua  $D \rightarrow \mathbf{R}^3$ .

- (b) Proveu que aquesta carta pertany a l'estructura diferenciable de  $S$ .



Això significa que és  $C^\infty$ -compatible amb les cartes de l'atles estereogràfic.

Prenem doncs aquest atlas:

$$\varphi_n: U = S - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \varphi_s: V = S - \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbf{R}^2.$$

Recordem que

$$\varphi_n(x, y, z) = \frac{1}{1 - z} (x, y),$$

$$\varphi_n^{-1}(u, v) = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} (2u, 2v, (u^2 + v^2 - 1)),$$

$$\varphi_s(x, y, z) = \frac{1}{1 + z} (x, y),$$

$$\varphi_s^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{1 + \bar{u}^2 + \bar{v}^2} (2\bar{u}, 2\bar{v}, -(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 - 1)).$$

Calculem els canvis de coordenades entre les  $\varphi_n$ ,  $\varphi_s$  i  $\psi$ :

$$\psi \circ \varphi_n^{-1}(u, v) = (2u, 2v), \quad \varphi_n \circ \psi^{-1}(x, y) = \frac{1}{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}} (x, y),$$

$$\psi \circ \varphi_s^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) = (2\bar{u}, 2\bar{v}), \quad \varphi_s \circ \psi^{-1}(x, y) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}} (x, y),$$

que són clarament de classe  $C^\infty$ .

- (c) *Construïu cartes similars via les projeccions dels dels diferents hemisferis coordenats i calculeu-ne els canvis de coordenades. Vegeu que formen un atlas de  $S$  equivalent a l'atles estereogràfic.*

Podem fer-ho en general per a l'esfera  $n$ -dimensional  $S = \mathbf{S}_n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ . Prenem l'hemisferi

$$S_i^+ = \{\mathbf{x} \in S \mid x_i > 0\}.$$

Considerem la projecció  $\psi_i^+ : S_i^+ \rightarrow D_n$  de l'hemisferi sobre la bola oberta unitat  $D_n \subset \mathbf{R}^n$  definida eliminant la  $i$ -èsima coordenada,

$$\psi_i^+(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}).$$

La seva inversa és

$$(\psi_i^+)^{-1}(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_{i-1}, \sqrt{1-\mathbf{u}^2}, u_i, \dots, u_n).$$

Semblantment es defineixen els hemisferis negatius  $S_i^-$  i les seves projeccions  $\psi_i^-$ . En aquests casos  $(\psi_i^-)^{-1}(\mathbf{u}) = (u_1, \dots, u_{i-1}, -\sqrt{1-\mathbf{u}^2}, u_i, \dots, u_n)$ .

Com en els apartats anteriors, totes aquestes són cartes de l'espai topològic  $S$ , i pertanyen a l'estructura diferenciable de  $S$ ; cal fer la comprovació dels canvis de coordenades amb les cartes de l'atles estereogràfic, distingint  $i = 1 \dots n$  de  $i = n+1$ .

Quant als canvis de coordenades, tenim per exemple

$$\psi_2^+ \circ (\psi_1^+)^{-1}(u_1, u_2, \dots) = \psi_2^+(\sqrt{1-\mathbf{u}^2}, u_1, u_2, \dots) = (\sqrt{1-\mathbf{u}^2}, u_2, u_3, \dots).$$

Les expressions amb  $\psi_2^\pm \circ (\psi_1^\pm)^{-1}$  tindrien alguns canvis de signes. Observem finalment que el canvi de coordenades  $\psi_i^- \circ (\psi_i^+)^{-1}$  té domini buit.

Les  $2(n+1)$  cartes  $(S_i^\pm, \psi_i^\pm)$  formen un atlas de l'esfera ja que els seus dominis la recobreixen tota (un  $\mathbf{x} \in S$  té alguna coordenada no nul·la i per tant pertany a algun dels hemisferis) i els canvis de coordenades són de classe  $C^\infty$ . Aquest atlas és equivalent a l'atles estereogràfic ja que els canvis de coordenades amb aquest són de classe  $C^\infty$ .

### 1.3 El tor com a varietat quotient

Considerem  $\mathbf{R}$ , i la relació d'equivalència  $x \sim x'$  quan  $x - x' \in \mathbf{Z}$ , amb espai quotient el tor unidimensional  $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ , i projecció canònica  $\pi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{T}$ . Aquest quotient és especial en el sentit següent: es pot provar que cada punt de  $\mathbf{R}$  té un veïnat obert  $U$  (per exemple, qualsevol interval obert de longitud  $\leq 1$ ) tal que, sobre ell,  $\pi$  induïx un homeomorfisme

$$\pi_U: U \xrightarrow{\cong} \pi(U).$$

Aquest homeomorfisme permet transportar qualsevol carta  $\varphi$  de domini  $U$  (per exemple, la coordenada canònica de  $\mathbf{R}$ ) en una carta  $\bar{\varphi} = \varphi \circ \pi_U^{-1}$  de domini  $\pi(U)$ . Amb totes aquestes cartes es defineix un atlas del quotient.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\pi_U} & \pi(U) \\ \varphi \downarrow & \swarrow \bar{\varphi} & \\ \hat{U} & & \end{array}$$

Farem una construcció explícita d'un atlas del tor. A tal fi, prenem dos conjunts oberts de  $\mathbf{R}$  apropiats:

$$\begin{aligned} U &= ]0, 1[ \xrightarrow{\pi} \pi(U), & \bar{\varphi}([x]) &= x \in ]0, 1[, \\ V &= ]1/2, 3/2[ \xrightarrow{\pi} \pi(V), & \bar{\psi}([y]) &= y \in ]1/2, 3/2[. \end{aligned}$$

(a) *Comproveu que  $\{(\pi(U), \bar{\varphi}), (\pi(V), \bar{\psi})\}$  és un atlas de  $\mathbf{T}$ .*

Ja hem dit que  $\pi_U$  i  $\pi_V$  són homeomorfismes, i de fet  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\psi}$  són els seus inversos, de forma que són cartes unidimensionals de l'espai topològic  $\mathbf{T}$ . A més,  $\pi(U)$  i  $\pi(V)$  recobreixen  $\mathbf{T}$ . Només cal comprovar que els canvis de coordenades són de classe  $C^\infty$ . Calculem:

$$\bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1}: ]0, 1[ - \{ \frac{1}{2} \} \longrightarrow ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[ - \{ 1 \}, \quad x \mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ x & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

que efectivament és de classe  $C^\infty$ ; anàlogament  $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi}^{-1}$ .

(b) *Proveu que  $\pi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{T}$  és un difeomorfisme local.*



Una aplicació  $f$  entre varietats és un difeomorfisme local quan es pot recobrir el domini amb conjunts oberts  $U$  tals que les imatges  $f(U)$  són oberts del codomini i aplicacions restringides  $f_U: U \rightarrow f(U)$  són difeomorfismes.

Tenim, amb les notacions de l'apartat anterior, que  $\pi_U = \bar{\varphi}^{-1}$ , i havíem definit  $\bar{\varphi}$  com una carta (de la varietat diferenciable  $\mathbf{T}$ ) i per tant com un difeomorfisme. Per tant  $\pi_U: U \rightarrow \pi(U)$  és un difeomorfisme. Igualment ho és  $\pi_V: V \rightarrow \pi(V)$ .

(c) Doneu un atlas per al tor  $n$ -dimensional  $\mathbf{T}^n$ .

**i**

Si  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  és una carta de  $M$  i  $(V_\beta, \psi_\beta)$  és una carta de  $N$ , aleshores la carta producte  $(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$  és una carta de  $M \times N$ .

Per a cadascuna de les  $n$  còpies de  $\mathbf{T}$  tenim les dues cartes  $\varphi_i$  que hem construït abans. Per tant hi ha  $2^n$  maneres de seleccionar-les per a construir cartes producte  $\varphi_{i_1} \times \dots \times \varphi_{i_n}$  per a  $\mathbf{T}^n$ .

## 1.4 Expressió local i diferenciabilitat d'una funció

Sigui  $S \subset \mathbf{R}^3$  l'esfera definida per  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

Sigui  $f: S \rightarrow \mathbf{R}$  la «funció alçada»,  $f(x, y, z) = z$ .

(a) Calculeu l'expressió local de  $f$  en les cartes de l'atles estereogràfic de  $S$ .

**i**

L'expressió local de  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  en una carta  $\varphi: U \rightarrow \widehat{U}$  és  $\widehat{f} = f \circ \varphi^{-1}: \widehat{U} \rightarrow \mathbf{R}$ .

Prenem l'atles de  $S$  definit per les projeccions estereogràfiques

$$\varphi: U = S - \{(0, 0, a)\} \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \psi: V = S - \{(0, 0, -a)\} \rightarrow \mathbf{R}^2.$$

Recordem que

$$\varphi(x, y, z) = \frac{a}{a-z}(x, y),$$

$$\varphi^{-1}(u, v) = \frac{a}{a^2 + u^2 + v^2} (2au, 2av, u^2 + v^2 - a^2),$$

$$\psi(x, y, z) = \frac{a}{a+z}(x, y),$$

$$\psi^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{a}{a^2 + \bar{u}^2 + \bar{v}^2} (2a\bar{u}, 2a\bar{v}, -(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 - a^2)).$$

L'expressió local de  $f$  en la carta  $(U, \varphi)$  és doncs  $\widehat{f}_\varphi = f \circ \varphi^{-1}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ :

$$\widehat{f}_\varphi(u, v) = a \frac{u^2 + v^2 - a^2}{u^2 + v^2 + a^2}.$$

Anàlogament amb la carta  $(V, \psi)$ :  $\widehat{f}_\psi = f \circ \psi^{-1}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ :

$$\widehat{f}_\psi(\bar{u}, \bar{v}) = -a \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 - a^2}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + a^2}.$$

(b) Proveu que  $f$  és diferenciable.

**i**

Per comprovar que una funció és diferenciable basta calcular-ne les expressions locals en les cartes d'un atlas i comprovar que són de classe  $C^\infty$ .

Com que ja tenim calculades les expressions locals, només hem d'observar que són de classe  $C^\infty$  perquè són funcions racionals.

(c) Justifiqueu de forma anàloga que, a l'esfera  $n$ -dimensional  $S \subset \mathbf{R}^{n+1}$ , les funcions coordenades  $x_1, \dots, x_{n+1}$  són diferenciables.

Les funcions coordenades són les projeccions  $\text{pr}_i(\mathbf{x})$  d'un punt, i les seves expressions locals no són més que les projeccions  $\text{pr}_i \circ \varphi^{-1}$  de les funcions  $\varphi^{-1}$  inverses de les dues cartes de l'atles estereogràfic estudiat en l'exemple 1.1. Es a dir, són les funcions components de

$$\varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \frac{a}{a^2 + \mathbf{y}^2} (2ay_1, \dots, 2ay_n, \mathbf{y}^2 - a^2),$$

$$\psi^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \frac{a}{a^2 + \mathbf{z}^2} (2az_1, \dots, 2az_n, a^2 - \mathbf{z}^2).$$

Aquestes funcions són racionals i per tant de classe  $C^\infty$ .

## 1.5 Diferenciabilitat d'una aplicació

Suposem conegut que l'espai projectiu real  $n$ -dimensional  $\mathbf{P}_n$  és una varietat de dimensió  $n$ . La seva topologia és el quocient de la projecció canònica  $p: \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}_n$ ,  $p(x_0, \dots, x_n) = [x_0, \dots, x_n]$  (coordenades homogènies). Admet un atlas format per  $n+1$  cartes  $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbf{R}^n$  definides així:

$$U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i \neq 0\},$$

$$\varphi_i([x_0, \dots, x_n]) = \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right);$$

les seves inverses són

$$\varphi_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_i, 1, y_{i+1}, \dots, y_n].$$

Perquè una aplicació contínua  $f: M \rightarrow N$  sigui diferenciable, basta comprovar que són de classe  $C^\infty$  totes les expressions locals

$$\widehat{f}_{\alpha\beta} = \psi_\beta \circ f|_{U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)} \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \rightarrow \psi_\beta(V_\beta),$$

amb  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ,  $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ , atlas donats de  $M$  i  $N$ , respectivament.

- (a) *Proveu, usant l'atles estereogràfic de l'esfera, que la inclusió  $i: \mathbf{S}_n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$  és diferenciable.*

L'estudi de la diferenciabilitat d'una funció amb valors reals, o amb valors en un subconjunt obert d'un espai vectorial  $\mathbf{R}^n$ , es fa exactament igual, ja que en la varietat d'arribada tenim una carta canònica global.

Per a veure que  $i$  és diferenciable prenem a  $\mathbf{S}_n$  l'atles estereogràfic  $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$  i a  $\mathbf{R}^{n+1}$  la carta canònica global. Amb  $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^n$  tenim l'expressió local  $\widehat{i} = i \circ \varphi^{-1}$ :

$$\widehat{i}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + \mathbf{y}^2} (2y_1, \dots, 2y_n, \mathbf{y}^2 - 1),$$

clarament  $C^\infty$ . Anàlogament amb la carta  $\psi: V \rightarrow \mathbf{R}^n$ .

- (b) *Proveu, usant l'atles tot just introduït de l'espai projectiu, que la projecció  $p: \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}_n$  és diferenciable.*

Per a veure que  $p$  és diferenciable, prenem a  $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$  la carta canònica global i a  $\mathbf{P}_n$  les cartes  $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbf{R}^n$  definides al principi. Llavors les expressions locals de  $p$  són  $\widehat{p}_i = \varphi_i \circ p$ :

$$\widehat{p}_i(x_0, \dots, x_n) = \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right),$$

que també són  $C^\infty$  en el seu domini.

(c) *Proveu que la projecció canònica  $\pi = p \circ i: \mathbf{S}_n \rightarrow \mathbf{P}_n$  és diferenciable.*



La composició d'aplicacions diferenciables és diferenciable.

Per tant, la diferenciabletat de  $\pi$  és conseqüència immediata dels dos apartats anteriors.

Si no haguéssim fet aquests càlculs previs hauria calgut calcular les  $2(n+1)$  expressions locals de  $\pi$  en els atles donats i comprovar que són de classe  $C^\infty$ . Per exemple,

$$\varphi_0 \circ \pi \circ \varphi^{-1}(\mathbf{u}) = \left( \frac{u_2}{u_1}, \dots, \frac{u_n}{u_1}, \frac{\mathbf{u}^2 - 1}{2u_1} \right).$$

## 1.6 Difeomorfismes

Proveu que l'aplicació antipodal

$$f: \mathbf{S}_n \longrightarrow \mathbf{S}_n, \quad f(p) = -p,$$

és un difeomorfisme.

**i**

Un difeomorfisme és una bijecció diferenciable amb inversa diferenciable.

$f$  és clarament bijectiva, ja que és la seva pròpia inversa ( $f \circ f = \text{Id}$ ; es diu que és una *involució*).

Vegem que  $f$  és diferenciable. Prenem l'atles estereogràfic  $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$  habitual i calculem les expressions locals de  $f$ . En principi caldria calcular quatre expressions locals (amb les dues cartes de l'atles de partida i les dues del d'arribada). Tanmateix,  $f$  intercanvia els pols nord i sud, i els oberts coordenats  $U$  i  $V$ , de manera que bastarà fer-ne dues:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbf{R}^n & \xrightarrow{\widehat{f}} & \mathbf{R}^n \end{array} \quad \widehat{f}(\mathbf{u}) = \psi(f(\varphi^{-1}(\mathbf{u}))) = \psi(-\varphi^{-1}(\mathbf{u})) = -\mathbf{u},$$

que és diferenciable. Anàlogament es fa amb  $V \xrightarrow{f} U$  i les cartes corresponents  $\psi$  i  $\varphi$ .

Finalment, caldria comprovar que la inversa,  $f^{-1}$ , també és diferenciable, però ja hem dit que coincideix amb  $f$ .

## 1.7 Estructures diferenciables diferents, però equivalents

Considerem la recta real  $\mathbf{R}$  dotada de la seva estructura diferenciable canònica, és a dir, la definida per la carta identitat  $\varphi(x) = x$ .

- (a) *Proveu que*

$$\psi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad \psi(x) = x^3$$

és una carta global de l'espai topològic  $\mathbf{R}$  no compatible amb l'estructura diferenciable usual de  $\mathbf{R}$ .

Evidentment  $\psi$  és un homeomorfisme, ja que és una bijecció contínua amb inversa  $\psi^{-1}(y) = y^{1/3}$  contínua.

Per veure la seva no compatibilitat amb l'estructura diferenciable usual basta calcular el canvi de coordenades  $(\varphi \circ \psi^{-1})(y) = y^{1/3}$ , que no és de classe  $C^\infty$  (de fet, en el punt  $y = 0$  no és ni diferenciable).

- (b) *Sigui  ${}^*\mathbf{R}$  l'espai topològic  $\mathbf{R}$  dotat de l'estructura diferenciable definida per l'atles  $\{(\mathbf{R}, \psi)\}$ , que hem vist que és diferent de la usual.*

*Proveu que l'aplicació*

$$f: \mathbf{R} \rightarrow {}^*\mathbf{R}, \quad f(x) = x^{1/3}$$

és un difeomorfisme.

En calculem l'expressió local:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{f} & {}^*\mathbf{R} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbf{R} & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbf{R} \end{array} \quad \hat{f}(u) = \left(u^{1/3}\right)^3 = u,$$

que és clarament un difeomorfisme.

- (c) *Vegeu que l'espai topològic  $\mathbf{R}$  admet infinites estructures diferenciables diferents però difeomorfes.*

Basta considerar de forma anàloga, per exemple, les cartes  $\psi_k(x) = x^k$ , amb  $k$  un nombre natural imparell.

*Observació* Es pot provar que totes les estructures diferenciables de  $\mathbf{R}$  són equivalents.

## 1.8 Càlcul del pull-back d'una funció

Sigui  $S \subset \mathbf{R}^3$  l'esfera de centre l'origen i radi  $a$ ,

$$F: S \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

la inclusió de l'esfera a l'espai. Sigui la funció

$$g: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, \quad g = x^2 + y^2,$$

on  $(x, y, z)$  són les coordenades cartesianes de  $\mathbf{R}^3$ . Calculeu el pull-back  $F^*(g)$  expressant-lo en termes de les coordenades esfèriques  $(\theta, \phi)$  (colatitud i azimuth) de l'esfera.

**i**

Si tenim  $g = \widehat{g} \circ \psi$  ( $g$  expressada com una funció  $\widehat{g}$  de les funcions coordenades) aleshores  $F^*(g) = \widehat{g} \circ F^*(\psi)$ , de forma que basta conèixer  $F^*(\psi)$ , que essencialment és l'expressió local de  $F$  ( $F^*(\psi) = \widehat{F} \circ \varphi$ ).

L'expressió local de  $F$  en les coordenades esfèriques i cartesianes és

$$\widehat{F}(\theta, \phi) = (a \cos \phi \sin \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \theta)$$

o, interpretant les coordenades com a funcions,

$$\begin{cases} F^*(x) = a \cos \phi \sin \theta \\ F^*(y) = a \sin \phi \sin \theta \\ F^*(z) = a \cos \theta \end{cases}$$

Llavors

$$F^*(g) = F^*(x^2 + y^2) = (a \cos \phi \sin \theta)^2 + (a \sin \phi \sin \theta)^2 = a^2 \sin^2 \theta.$$

## 2 Vectors tangents

### 2.1 Canvi de base de vectors tangents

Sigui  $S \subset \mathbf{R}^3$  l'esfera definida per  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

Les cartes estereogràfiques de  $S$

$$\varphi = (u, v): S - \{(0, 0, a)\} \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad \bar{\varphi} = (\bar{u}, \bar{v}): S - \{(0, 0, -a)\} \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

defineixen, en cada punt del seu domini, vectors tangents coordenats.

- (a) Donat un punt  $p$  del domini comú de les dues cartes, calculeu la relació entre les respectives bases de vectors tangents coordenats  $(\partial/\partial u|_p, \partial/\partial v|_p)$ ,  $(\partial/\partial \bar{u}|_p, \partial/\partial \bar{v}|_p)$ .

La relació entre dues bases de vectors tangents coordenats ve donada per la jacobiana del canvi de coordenades:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$$

Necessitem el canvi de coordenades  $\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ :

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{a}{u^2 + v^2}(u, v).$$

Calculem-ne la matriu jacobiana:

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \frac{a^2}{(u^2 + v^2)^2} \begin{pmatrix} v^2 - u^2 & -2uv \\ -2uv & u^2 - v^2 \end{pmatrix}$$

En cada punt  $p$ , les columnes d'aquesta matriu expressen els vectors  $\partial/\partial u|_p$ ,  $\partial/\partial v|_p$ , com a combinacions lineals dels  $\partial/\partial \bar{u}|_p$ ,  $\partial/\partial \bar{v}|_p$ . Per tant,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p &= (v^2 - u^2) \Big|_p \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \Big|_p - 2uv \Big|_p \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \Big|_p, \\ \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p &= -2uv \Big|_p \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \Big|_p + (v^2 - u^2) \Big|_p \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \Big|_p. \end{aligned}$$

## 2.2 Càlcul de l'aplicació tangent

Sigui  $S$  l'esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , i  $F: S \rightarrow S$  la seva aplicació antipodal,  $F(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ .

Considereu l'atles de  $S$  donat per les projeccions estereogràfiques  $\varphi = (u_1, u_2)$  des del pol nord, i  $\psi = (v_1, v_2)$  des del pol sud.

- (a) Calculeu l'expressió local de  $F$  en les cartes  $\varphi$ ,  $\varphi$ , i també en les cartes  $\varphi$ ,  $\psi$ . En els dos casos calculeu les matrius jacobianes corresponents.

En el primer cas tenim

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\mathbf{u}) &= \varphi \circ F \circ \varphi^{-1}(\mathbf{u}) = \varphi \left( F \left( \frac{1}{1 + \mathbf{u}^2} (2\mathbf{u}, \mathbf{u}^2 - 1) \right) \right) = \\ &= \varphi \left( -\frac{1}{1 + \mathbf{u}^2} (2\mathbf{u}, \mathbf{u}^2 - 1) \right) = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{u}^2 - 1}{\mathbf{u}^2 + 1}} \frac{2\mathbf{u}}{1 + \mathbf{u}^2} = -\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2}.\end{aligned}$$

La seva jacobiana és

$$\begin{aligned}J\widehat{F} &= -\frac{1}{\mathbf{u}^2}I + \frac{2}{\mathbf{u}^4}\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = \frac{1}{\mathbf{u}^4}(2\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u}^2I) = \\ &= \frac{1}{\mathbf{u}^4} \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 & 2u_1u_2 \\ 2u_1u_2 & -u_1^2 + u_2^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

En el segon cas,

$$\begin{aligned}\widehat{F}(u) &= \psi \circ F \circ \varphi^{-1}(u) = \psi \left( F \left( \frac{1}{1 + \mathbf{u}^2} (2\mathbf{u}, \mathbf{u}^2 - 1) \right) \right) = \\ &= \psi \left( -\frac{1}{1 + \mathbf{u}^2} (2\mathbf{u}, \mathbf{u}^2 - 1) \right) = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{u}^2 - 1}{\mathbf{u}^2 + 1}} \frac{2\mathbf{u}}{1 + \mathbf{u}^2} = -\mathbf{u},\end{aligned}$$

i la seva jacobiana és simplement

$$J\widehat{F} = -I.$$

- (b) Sigui  $p = (1, 0, 0)$ . Calculeu la matriu de  $T_pF$ , considerant en  $p$  la carta  $\varphi$  donada per la projecció estereogràfica des del pol nord, i en  $q = F(p) = (-1, 0, 0)$  la mateixa carta.

Calculeu també la mateixa matriu considerant respectivament les cartes  $\varphi$  en  $p$  i  $\psi$ , la projecció estereogràfica des del pol sud, en  $q$ .



La matriu de l'aplicació tangent en bases de vectors tangents coordenats és la matriu jacobiana de la corresponent expressió local.

Les coordenades de  $p$  són  $\varphi(p) = (1, 0)$ , i per tant la matriu demanada de  $T_p F$  és

$$\frac{1}{\mathbf{u}^4} \left( \begin{array}{cc} u_1^2 - u_2^2 & 2u_1 u_2 \\ 2u_1 u_2 & -u_1^2 + u_2^2 \end{array} \right) \Big|_{(1,0)} = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right).$$

Quant a la segona matriu, ja hem vist que la jacobiana és la mateixa en tot punt:

$$\left( \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right).$$

(c) Calculeu  $T_p F \cdot \mathbf{w}_p$ , essent  $\mathbf{w}_p = 2 \frac{\partial}{\partial u_1} \Big|_p + 3 \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_p$ .

Només cal recordar el significat de la matriu d'una aplicació lineal; o, si es prefereix, aplicar la fórmula



$$T_p F \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = D_i \widehat{F}^j(\widehat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)} = \frac{\partial (y^j \circ F)}{\partial x^i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}.$$

Podem expressar  $T_p F \cdot \mathbf{w}_p$  en la base que més ens interessi. De

$$\left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 2 \\ -3 \end{array} \right)$$

resulta

$$T_p F \cdot \mathbf{w}_p = 2 \frac{\partial}{\partial u_1} \Big|_q - 3 \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_q.$$

Si ho preferim, podem usar les coordenades  $\psi = (v_1, v_2)$  per al vector resultant, de forma que

$$T_p F \cdot \mathbf{w}_p = 2 \frac{\partial}{\partial v_1} \Big|_q + 3 \frac{\partial}{\partial v_2} \Big|_q.$$

## 2.3 Càlcul de la velocitat d'un camí, la diferencial d'una funció, i la derivada d'una funció respecte a un vector

Signi  $S \subset \mathbf{R}^3$  l'esfera definida per  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

Considereu el camins

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, 0), \quad \delta(t) = (a \cos t, 0, a \sin t)$$

que recorren, respectivament, l'equador i un meridià de  $S$ .

Considereu també la funció alçada

$$h: S \rightarrow \mathbf{R}, \quad h(x, y, z) = z, .$$

- (a) Calculeu les velocitats  $\gamma'(t)$ ,  $\delta'(t)$ , tot expressant-les en la base dels vectors tangents coordinats associada a la carta estereogràfica des del pol nord  $\varphi = (u, v): S - \{(0, 0, a)\} \rightarrow \mathbf{R}^2$ .

**i** Apliquem la fórmula  $\gamma'(t_0) = D\widehat{\gamma}^i(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t_0)}$ , on  $\widehat{\gamma} = x \circ \gamma$  és l'expressió local de  $\gamma$ .

Recordem l'expressió de la carta estereogràfica:  $\varphi(x, y, z) = \frac{a}{a-z}(x, y)$ . Així tenim que  $\widehat{\gamma}(t) = (\varphi \circ \gamma)(t) = (a \cos t, a \sin t)$ , amb derivada  $(-a \sin t, a \cos t)$ . Per tant,

$$\gamma'(t) = -a \sin t \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{\gamma(t)} + a \cos t \frac{\partial}{\partial v} \Big|_{\gamma(t)}.$$

Semblantment es calcula  $\widehat{\delta}(t) = \left( \frac{a \cos t}{1 - \sin t}, 0 \right)$ , amb derivada  $\left( \frac{a}{1 - \sin t}, 0 \right)$ :

$$\delta'(t) = \frac{a}{1 - \sin t} \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{\delta(t)}.$$

- (b) Calculeu la diferencial  $d_p h$  en les mateixes coordenades.

**i** Apliquem la fórmula  $d_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p d_p x^i$ .

L'expressió local  $\widehat{h} = h \circ \varphi^{-1}$  de  $h$  és  $\widehat{h}(u, v) = a \frac{u^2 + v^2 - a^2}{u^2 + v^2 + a^2}$ , que ens permet escriure  $h = a \left( 1 - \frac{2a^2}{u^2 + v^2 + a^2} \right)$  considerant  $u, v$  com a funcions.

Derivant,  $\partial h / \partial u = \frac{4a^3 u}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}$  i  $\partial h / \partial v = \frac{4a^3 v}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}$ , obtenim

$$d_p h = \frac{4a^3}{(u^2 + v^2 + a^2)^2} \Big|_p (u|_p d_p u + v|_p d_p v).$$

(c) Sigui  $p = (a, 0, 0)$  i  $\mathbf{w}_p = 2 \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p + 3 \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p$ . Calculeu  $\mathcal{L}_{\mathbf{w}_p} h$ .

**i** Podem usar  $\mathcal{L}_{u_p} f = \langle d_p f, u_p \rangle$  i la dualitat  $\left\langle d_p x^j, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\rangle = \delta^j_i$ .

Tenim que  $\varphi(p) = (a, 0)$ , i amb aquestes coordenades concretes, segons acabem de calcular,  $d_p h = d_p u$ . Per tant,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{w}_p} h = \langle d_p h, \mathbf{w}_p \rangle = \left\langle d_p u, 2 \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p + 3 \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p \right\rangle = 2.$$

(d) Calculeu  $\mathcal{L}_{\gamma'(t)} h$ ,  $\mathcal{L}_{\delta'(t)} h$ , de dues maneres diferents.

**i** Podem aplicar la fórmula  $\mathcal{L}_{\gamma'(t_0)} f = D(f \circ \gamma)(t_0)$ .

Així,

$$\mathcal{L}_{\gamma'(t)} h = D(h \circ \gamma)(t) = \frac{d}{dt} 0 = 0$$

i

$$\mathcal{L}_{\delta'(t)} h = D(h \circ \delta)(t) = \frac{d}{dt} (a \sin t) = a \cos t.$$

Alternativament, podem procedir com en l'apartat anterior, usant  $\mathcal{L}_{u_p} f = \langle d_p f, u_p \rangle$ , les expressions coordenades obtingudes en els apartats previs, i la dualitat entre vectors i covectors.

Per a la primera de les derivades necessitem  $d_{\gamma(t)} h = \cos t d_{\gamma(t)} u + \sin t d_{\gamma(t)} v$ . Amb ella tenim

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\gamma'(t)} h &= \langle d_{\gamma(t)} h, \gamma'(t) \rangle \\ &= \left\langle \cos t d_{\gamma(t)} u + \sin t d_{\gamma(t)} v, -a \sin t \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{\gamma(t)} + a \cos t \frac{\partial}{\partial v} \Big|_{\gamma(t)} \right\rangle \\ &= a \left( \cos t (-\sin t) + \sin t \cos t \right) = 0. \end{aligned}$$

I semblantment per a la segona,  $d_{\delta(t)}h = \cos t (1 - \sin t) d_{\delta(t)}u$ , d'on

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\delta'(t)}h &= \langle d_{\delta(t)}h, \delta'(t) \rangle = \\ &= \left\langle \cos t (1 - \sin t) d_{\delta(t)}u, \frac{a}{1 - \sin t} \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{\gamma(t)} \right\rangle = a \cos t.\end{aligned}$$

*Remarca* Val la pena observar que aquest càlcul en principi només és vàlid en les  $t$  tals que  $\delta(t)$  pertany al domini de la carta considerada; és a dir, tals que  $\delta(t) \neq (0, 0, a)$ , o sigui, tals que  $\sin t \neq 1$ . Tanmateix, es pot provar que  $\mathcal{L}_{\delta'(t)}h$  és una funció contínua de  $t$ , i per tant el seu valor està determinat si es coneix en un conjunt dens (el complementari de  $\pi/2 + 2\pi\mathbf{Z}$  dins  $\mathbf{R}$ ).

## 3 Subvarietats

### 3.1 Coordenades adaptades a l'esfera

Sigui  $S \subset \mathbf{R}^3$  l'esfera de radi  $a > 0$  centrada a l'origen:  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

- (a) *Proveu que les coordenades esfèriques  $(r, \theta, \phi)$  de  $\mathbf{R}^3$  són coordenades adaptades a l'esfera.*

*Descriuiu amb precisió quina carta de  $S$  defineixen.*

En efecte, atesa la seva definició,  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , de forma que un punt és de l'esfera sii

$$r = a.$$

Això implica que les coordenades  $(\theta, \phi)$  de  $\mathbf{R}^3$ , definides en el conjunt obert  $V \subset \mathbf{R}^3$  complementari d'un semiplà tancat, que per exemple pot ser  $y = 0$ ,  $x \leq 0$ , restringeixen a coordenades de  $S$  que denotarem amb els mateixos símbols  $(\theta, \phi)$ , definides en el conjunt obert corresponent  $U = V \cap S \subset S$ , és a dir, el complementari d'un meridià «tancat», que en aquest cas seria el d'azimut  $\phi = \pi$  (amb els pols).

La carta  $c: U \rightarrow ]0, \pi[ \times ]-\pi, \pi[$  és l'aplicació inversa de la parametrització

$$g(\theta, \phi) = (a \cos \phi \sin \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \theta).$$

- (b) *Proveu que les coordenades  $(x, y)$  de  $S$  definides per projecció des de l'hemisferi nord,  $\psi(x, y, z) = (x, y)$ , es poden estendre a unes coordenades de  $\mathbf{R}^3$  adaptades a  $S$ .*

Basta definir

$$z' = z - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

sobre el «cilindre sòlid obert»  $x^2 + y^2 < a^2$ . Aquesta funció és de classe  $C^\infty$  i  $(x, y, z) \mapsto (x, y, z')$  és un difeomorfisme del cilindre sòlid en ell mateix, amb invers donat per  $z = z' + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ . Per tant  $(x, y, z')$  és una carta de  $\mathbf{R}^3$ , i en ella l'hemisferi nord es descriu  $z' = 0$ , és a dir, és una carta adaptada.

### 3.2 Diferenciabilitat d'aplicacions entre subvarietats

Usant que  $\mathbf{S}_n \subset \mathbf{R}^{n+1}$  és una subvarietat regular, proveu que l'aplicació antipodal de l'esfera és diferenciable.



Si  $F: M \rightarrow N$  és diferenciable, i  $M_\circ \subset M$ ,  $N_\circ \subset N$  són subvarietats regulars tals que  $F(M_\circ) \subset N_\circ$ , llavors l'aplicació induïda  $F_\circ: M_\circ \rightarrow N_\circ$  és diferenciable.

L'aplicació

$$F: \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}, \quad F(x) = -x,$$

és clarament diferenciable. Si  $x$  és un vector unitari  $-x$  també, de forma que, restringint els conjunts de partida i d'arribada de  $F$  obtenim l'aplicació antipodal de l'esfera,  $F_\circ: \mathbf{S}_n \longrightarrow \mathbf{S}_n$ ,  $F_\circ(x) = -x$ . Com que  $F$  és diferenciable,  $F_\circ$  també.

### 3.3 Una immersió injectiva que no és un *embedding*: la corba en forma de 8

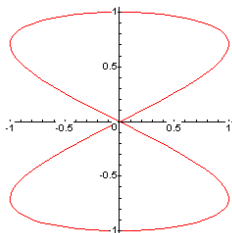
Proveu que l'aplicació

$$c: ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad c(t) = (\sin 2t, \sin t),$$

és una immersió injectiva però no un *embedding*.

Us pot ajudar provar que la seva imatge és el subconjunt

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2/4 - y^2 + y^4 = 0\}.$$



L'aplicació  $c$  és clarament de classe  $C^\infty$ .

És injectiva en  $]0, 2\pi[$ , ja que si  $t, t'$  tenen mateix sinus llavors són iguals, o  $t + t' = \pi/2$ , o  $t + t' = 3\pi/2$ , i en aquests dos darrers casos el sinus de l'angle doble és diferent.

$I$  és una immersió perquè  $Dc(t) = (2 \cos 2t, \cos t)$  no s'anul·la enlloc: el cosinus només s'anul·la a  $t = \pi/2$  o a  $t = 3\pi/2$ , i en aquests punts el cosinus de l'angle doble no ho fa.

Tot seguit comprovem que  $c(]0, 2\pi[) = E$ . En primer lloc, per a cada  $t$ ,  $c(t) \in E$ , ja que

$$\frac{\sin^2 2t}{4} - \sin^2 t + \sin^4 t = 0.$$

Ara sigui  $(x, y) \in E$ . Volem trobar  $t$  tal que  $c(t) = (x, y)$ . De la relació  $y = \sin t$  deduïm que  $t = \arcsin y$  en el primer quadrant,  $t = -\arcsin y + \pi$  en el segon i el quart quadrants, i  $t = \arcsin y + \pi$  en el tercer quadrant, tot considerant la funció inversa del sinus com  $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ . Finalment, a l'origen  $(0, 0)$  li correspon  $t = \pi$ .

Finalment comprovem que  $c$  no és un *embedding*. Tenim dues opcions.

La primera és a partir de la definició: veure que  $c$  no és un homeomorfisme amb la seva imatge. En el nostre cas particular és ben senzill, ja que  $]0, 2\pi[$  no és compacte mentre que  $c(]0, 2\pi[) = E$  sí que ho és.<sup>1</sup>

La segona opció és comprovar que la imatge de  $c$  no és una subvarietat regular. El dibuix de  $E$  també ens pot ajudar en aquest cas, i mostra clarament que, en un veïnat de  $(0, 0)$ ,  $E$  no és localment euclidià. Tanmateix, podem demostrar-ho formalment sense recórrer al dibuix. A tal fi, considerem la «mateixa» aplicació  $c$  però definida en tot  $\mathbf{R}$ ; encara recorre  $E$ , i de fet de forma  $2\pi$ -periòdica. Aleshores  $c(0) = c(\pi) = (0, 0)$ , però els vectors velocitat respectius són  $Dc(0) = (2, 1)$  i  $Dc(\pi) = (2, -1)$ : els dos són «tangents» a  $E$  en el punt  $(0, 0)$ , i linealment independents. Això només seria possible si  $E$  tingués dimensió 2 (en un veïnat de  $(0, 0)$ ), cosa òbviament impossible.<sup>2</sup>

*Observació* El conjunt  $E$  és un conjunt de nivell:  $E = F^{-1}(0)$ , amb  $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $F(x, y) = x^2/4 - y^2 + y^4$ . Aquesta aplicació és una submersió en tot punt excepte en  $(0, 0) \in E$  i  $(0, \pm 1/\sqrt{2}) \notin E$ . El teorema del valor regular assegura que  $E$  és una corba regular en tot punt excepte, *potser*, el  $(0, 0)$ . Tanmateix, la condició de submersió és suficient però *no necessària* per assegurar que les fibres siguin subvarietats regulars.

---

<sup>1</sup>L'argument donat no serviria en altres casos semblants. Anem a donar-ne una prova alternativa. Ajudant-nos del dibuix de  $E$  i de com el recorre  $c$ , ens plantejem què passa quan ens apropem a l'origen. Resulta que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} c(t) = (0, 0) = c(\pi)$  mentre que, òbviament,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t$  *no existeix* en  $]0, 2\pi[$ ; és a dir, que la topologia que la bijecció  $c: ]0, 2\pi[ \rightarrow c(]0, 2\pi[)$  transporta de l'interval a la seva imatge és estrictament més fina que la topologia relativa de  $c(]0, 2\pi[)$  com a subconjunt de  $\mathbf{R}^2$ .

<sup>2</sup>Tot i ser «òbviament impossible», potser caldria provar-ho. Una manera senzilla és observar que la imatge de  $c$  dins  $\mathbf{R}^2$  ha de tenir mesura nul·la, per tant no pot contenir un conjunt obert.

### 3.4 El tor unidimensional i la circumferència són difeomorfs

Recordem que el tor unidimensional  $\mathbf{T}$  es definia com l'espai quocient  $\pi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z} = \mathbf{T}$  de manera que  $\pi$  era un difeomorfisme local (problema 1.3).

(a) *Proveu que*

$$c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, \quad c(t) = e^{2\pi it}$$

*és una immersió.*

(La identificació  $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$  ens permet considerar el pla complex com a varietat diferenciable.)

Per a tota  $t$ ,  $Dc(t) = 2\pi i e^{2\pi it} \neq 0$ , de manera que  $c$  té rang 1 en tot punt.

(b) *Proveu que  $c$  factoritza a través del quocient,*

$$c: \mathbf{R} \xrightarrow{\pi} \mathbf{R}/\mathbf{Z} = \mathbf{T} \xrightarrow{\bar{c}} \mathbf{C}$$

*mitjançant una aplicació  $\bar{c}: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{C}$  que és una immersió injectiva.*

Per les propietats de l'exponencial complexa, dos punts  $t, t'$  tenen mateixa imatge per  $c$  si i difereixen en un enter, per tant des del punt de vista purament conjuntista l'aplicació  $\bar{c}$  està ben definida i és injectiva.

Com que  $\pi$  és un difeomorfisme local suprajectiu,  $\bar{c}$  és diferenciable i té el mateix rang que  $c$ , o sigui que és una immersió.

(c) *Proveu que  $\bar{c}$  és un embedding i que la seva imatge és  $\mathbf{S}_1 \subset \mathbf{C}$ . Deduïu-ne un difeomorfisme*

$$\mathbf{T} \cong \mathbf{S}_1, \quad [t] \leftrightarrow e^{2\pi it}.$$

Un *embedding* és una immersió injectiva que és un homeomorfisme amb la seva imatge. Acabem de veure que  $\bar{c}$  és una immersió injectiva, i com que el tor és una varietat *compacta* (ho donem per sabut, o podem provar-ho fàcilment)  $\bar{c}$  és un *embedding*.

La imatge de  $\bar{c}$  és la mateixa que la imatge de  $c$ , i és la circumferència unitat  $\mathbf{S}_1 \subset \mathbf{C}$ , ja que tot complex de mòdul 1 és de la forma  $e^{i\theta}$  per a certa  $\theta$ .

Finalment, un embedding defineix un difeomorfisme amb la imatge, per tant, en aquest cas, entre  $\mathbf{T}$  i  $\mathbf{S}_1$ .

Es pot donar una prova alternativa d'aquestes afirmacions sense usar la compacitat de  $\mathbf{T}$ . Partim del fet que el recorregut de  $\bar{c}$  està contingut dins la circumferència unitat  $\mathbf{S}_1 \subset \mathbf{C}$ , i que ja sabem que aquesta és una subvarietat regular de  $\mathbf{C}$ . Així doncs, la co-restricció de  $\bar{c}$  amb conjunt d'arribada la circumferència és una aplicació diferenciable  $\tilde{c}: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}_1$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{R} & \xrightarrow{c} & \mathbf{C} \\
 \pi \downarrow & \nearrow \bar{c} & \uparrow \\
 \mathbf{T} & \xrightarrow{\tilde{c}} & \mathbf{S}_1
 \end{array}$$

Aquesta és una immersió injectiva igual que  $\bar{c}$ , i com que les varietats de partida i d'arribada tenen la mateixa dimensió,  $\tilde{c}$  és un difeomorfisme amb la seva imatge. Hem vist que la imatge de  $\bar{c}$  és tot  $\mathbf{S}_1$ , cosa que prova que  $\tilde{c}$  és un difeomorfisme entre  $\mathbf{T}$  i  $\mathbf{S}_1$ . Això mostra que la immersió injectiva  $\bar{c}$  defineix un homeomorfisme entre  $\mathbf{T}$  i la seva imatge, de manera que és un *embedding*.

(d) *Deduïu-ne que*

$$\mathbf{T}^n \cong (\mathbf{S}_1)^n.$$

Conseqüència immediata de l'anterior.

## 4 Fibrats tangent i cotangent

### 4.1 Canvis de coordenades amb camps vectorials i 1-formes diferencials

Considerem la varietat diferenciable  $\mathbf{R}^3$  amb les seves coordenades cartesianes  $(x, y, z)$  habituals, i amb les coordenades esfèriques  $(r, \theta, \phi)$ . Recordem que

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

- (a) Calculeu la jacobiana del canvi de coordenades i expresseu-la també en funció de les coordenades cartesianes.

$$\begin{aligned} J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & xz/\sqrt{x^2 + y^2} & -y \\ y/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & yz/\sqrt{x^2 + y^2} & x \\ z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & -\sqrt{x^2 + y^2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per a escriure la darrera expressió no cal trobar l'expressió completa del canvi invers, només observar que  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\cos \theta = z/r$ ,  $\sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2}/r$ , etc.

- (b) Calculeu la relació entre les dues bases de camps vectorials coordenats corresponents.

Usarem la relació entre dues bases de camps vectorials coordenats:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

La fórmula anterior expressa cada camp vectorial coordenat de les coordenades esfèriques com a combinació lineal dels camps vectorials coordenats de les coordenades cartesianes, on els coeficients són les columnes de la

matriu jacobiana:  $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z}$ , etc. Així,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) - \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

Hem usat l'expressió de la jacobiana en coordenades cartesianes a fi de no barrejar dos sistemes de coordenades en una mateixa expressió.

- (c) *Calculeu també la relació entre les dues bases de 1-formes diferencials definides per les funcions coordenades.*



En aquest cas la relació a usar és  $dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i$

Ara doncs les diferencials de les coordenades cartesianes són combinacions lineals de les diferencials de les coordenades esfèriques, on els coeficients són les files de la jacobiana:

$$\begin{aligned}dx &= \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi, \\ dy &= \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi, \\ dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta.\end{aligned}$$

- (d) *Obteniu els canvis de base inversos dels anteriors.*

A tal fi podríem calcular l'aplicació inversa del canvi de coordenades (és a dir, l'expressió de  $(r, \theta, \phi)$  com a funcions de  $(x, y, z)$ ) i la seva jacobiana,  $\frac{\partial(r, \theta, \phi)}{\partial(x, y, z)}$ .

O bé podem calcular directament la matriu inversa de  $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)}$ .

Tenint en compte que la matriu  $J$  compleix

$$J^T J = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$$

(les coordenades esfèriques són «coordenades ortogonals»), s'obté fàcilment

$$J^{-1} = \text{diag}(1, 1/r^2, 1/r^2 \sin^2 \theta) J^\top:$$

$$J^{-1} = \frac{\partial(r, \theta, \phi)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi/r & \cos \theta \sin \phi/r & -\sin \theta/r \\ -\sin \phi/r \sin \theta & \cos \phi/r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Les columnes d'aquesta matriu expressen els vectors tangents coordenats cartesianes com a combinació lineal dels esfèrics; les files d'aquesta matriu expressen les diferencials de les coordenades esfèriques com a combinació lineal de les diferencials de les coordenades cartesianes.

Com a l'apartat (a), si es vol es poden expressar les entrades d'aquesta matriu en termes de les coordenades cartesianes:

$$\frac{\partial(r, \theta, \phi)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) *Expresseu en coordenades esfèriques els camps vectorials següents:*

$$\Delta = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$L_1 = -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}, \quad L_2 = -x \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_3 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Donat un camp vectorial  $Z$  que en dos sistemes de coordenades s'expressa  $Z = f^i \frac{\partial}{\partial x^i} = g^j \frac{\partial}{\partial y^j}$ , les components estan relacionades per la matriu inversa de la que relaciona els camps vectorials coordenats:  $g^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} f^i$

Només cal multiplicar  $J$  per la matriu columna formada per les components de cadascun d'aquests camps vectorials, expressades en coordenades esfèriques. Per exemple, les components de  $\Delta$  són

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi/r & \cos \theta \sin \phi/r & -\sin \theta/r \\ -\sin \phi/r \sin \theta & \cos \phi/r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de manera que

$$\Delta = r \frac{\partial}{\partial r},$$

cosa d'altra banda previsible observant el resultat de l'apartat (b).

Semblantment

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi / r & \cos \theta \sin \phi / r & -\sin \theta / r \\ -\sin \phi / r \sin \theta & \cos \phi / r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -r \cos \theta \\ r \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \phi \\ \cos \phi / \tan \theta \end{pmatrix}$$

dóna

$$L_1 = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Anàlogament s'obtenen

$$L_2 = \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

## 4.2 Parèntesi de Lie de camps vectorials

Dins la varietat  $\mathbf{R}^3$ , considereu els camps vectorials  $\Delta = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $L_1 = -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $L_2 = -x \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial x}$  i  $L_3 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$  estudiats en el problema anterior.

(a) Calculeu-ne els parèntesis de Lie.



Si  $X = f^i \partial/\partial x^i$  i  $Y = g^j \partial/\partial x^j$ , aleshores  $[X, Y] = (\mathcal{L}_X g^j - \mathcal{L}_Y f^j) \frac{\partial}{\partial x^j}$ .

La propietat d'antisimetria del parèntesi de Lie fa que només calgui calcular-ne sis, ja que  $[X, X] = 0$  i  $[Y, X] = -[X, Y]$ .

Calculem primerament

$$\begin{aligned} [\Delta, L_1] &= \mathcal{L}_\Delta(-z) \frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{L}_{\Delta y} \frac{\partial}{\partial z} - \mathcal{L}_{L_1} x \frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{L}_{L_1} y \frac{\partial}{\partial y} - \mathcal{L}_{L_1} z \frac{\partial}{\partial z} \\ &= -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Observem que  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$  s'obtenen successivament per permutació cíclica de les variables  $(x, y, z)$ , mentre que  $\Delta$  no canvia quan s'hi fa aquesta permutació, ja que de fet és simètric en les tres variables. Això significa que el mateix resultat s'obté amb els altres dos parèntesis de Lie:

$$[\Delta, L_i] = 0.$$

Ara calculem

$$\begin{aligned} [L_1, L_2] &= \mathcal{L}_{L_1}(-x) \frac{\partial}{\partial z} + \mathcal{L}_{L_1} z \frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{L}_{L_2}(-z) \frac{\partial}{\partial y} - \mathcal{L}_{L_2} y \frac{\partial}{\partial z} \\ &= 0 + y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} - 0 = -L_3. \end{aligned}$$

Pel mateix argument de simetria anterior,  $[L_2, L_3] = -L_1$  i  $[L_3, L_1] = -L_2$ . Es pot expressar aquest resultat escrivint

$$[L_i, L_j] = - \sum_k \epsilon_{ijk} L_k,$$

on  $\epsilon_{ijk}$  és zero si algun índex està repetit, i en cas contrari és la signatura de la permutació que envia  $(1, 2, 3)$  a  $(i, j, k)$ .

- (b) *Repetiu el càlcul anterior usant les expressions dels camps vectorials en coordenades esfèriques obtingudes en el problema anterior,  $\Delta = r \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $L_1 = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$ ,  $L_2 = \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$  i  $L_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}$ .*

Com que  $\Delta = r \partial/\partial r$  i la variable  $r$  és absent tant de les components dels  $L_i$  com dels camps coordenats que els formen, directament s'obté  $[\Delta, L_i] = 0$ . Quant als altres, el càlcul més senzill és

$$[L_3, L_1] = -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} = -L_2.$$

Els altres es fan anàlogament.

Observem que aquests parèntesis de Lie estan calculats en el domini de definició  $U$  de les coordenades esfèriques. Per tant, estrictament parlant, hem provat que  $[L_3, L_1]|_U = -L_2|_U$ . Tanmateix, com que aquest domini és un conjunt dens en  $\mathbf{R}^3$ , i sabem que aquests camps vectorials estan definits globalment, per continuïtat tenim  $[L_3, L_1] = -L_2$ .

### 4.3 Camps vectorials, 1-formes diferencials i subvarietats

Dins la varietat diferenciable  $\mathbf{R}^3$ , amb les seves coordenades cartesianes  $(x, y, z)$  habituals, considerem la funció, el camp vectorial i la 1-forma diferencial següents:

$$g = z, \quad Y = -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}, \quad \beta = xdx + ydy + zdz.$$

Sigui la subvarietat  $S \subset \mathbf{R}^3$ , esfera d'equació  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ). Hi considerem les coordenades  $(\theta, \phi)$  deduïdes de les coordenades esfèriques de  $\mathbf{R}^3$ ; estan definides en un obert  $U \subset S$  complementari d'un meridià. Sigui  $i: S \hookrightarrow \mathbf{R}^3$  la inclusió.

(a) *Proveu que  $Y$  és tangent a  $S$ .*



Un camp vectorial  $Y$  és tangent a una subvarietat  $S$  definida com una fibra d'una submersió  $G: N \rightarrow \mathbf{R}^k$  si les funcions  $\mathcal{L}_Y G^\ell$  s'anul·len sobre  $S$ .

En el nostre cas,  $S$  està definida dins  $\mathbf{R}^3$  com la superfície de nivell  $G = a^2$ , de la funció

$$G: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, \quad G = x^2 + y^2 + z^2,$$

que és una submersió en tot punt fora del 0. Per tant,  $Y$  és tangent a  $S$  si  $\mathcal{L}_Y G$  s'anul·la en tot  $S$ .

Calculem doncs:

$$\mathcal{L}_Y G = -2zy + 2yz = 0,$$

que de fet és nul arreu.<sup>3</sup> Per tant,  $Y$  és tangent a  $S$ .

(b) *Sigui  $X$  la restricció de  $Y$  a  $S$ . Expressau-lo en les coordenades esfèriques de  $S$ .*

Volem calcular el camp vectorial  $X$  en  $S$  que està  $i$ -relacionat amb  $Y$ . Imposarem aquesta relació en coordenades.



La propietat  $X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \underset{F}{\sim} Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}$  significa que  $\frac{\partial (y^j \circ F)}{\partial x^i} X^i = Y^j \circ F$ .

<sup>3</sup>Això significa que  $Y$  no només és tangent a  $S$ , sinó que és tangent a *totes* les esferes  $G^{-1}(R^2)$ .

En el nostre cas, la inclusió s'expressa a través de la relació entre les respectives coordenades:

$$\begin{cases} x \circ i = a \sin \theta \cos \phi \\ y \circ i = a \sin \theta \sin \phi \\ z \circ i = a \cos \theta \end{cases}$$

La matriu jacobiana d'aquesta aplicació és

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \phi)} = \begin{pmatrix} a \cos \theta \cos \phi & -a \sin \theta \sin \phi \\ a \cos \theta \sin \phi & a \sin \theta \cos \phi \\ -a \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Així doncs, si escrivim  $X = X^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + X^\phi \frac{\partial}{\partial \phi}$ , hem de resoldre el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} a \cos \theta \cos \phi & -a \sin \theta \sin \phi \\ a \cos \theta \sin \phi & a \sin \theta \cos \phi \\ -a \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\theta \\ X^\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \cos \theta \\ a \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix},$$

que és compatible en tot punt de  $U$  precisament perquè  $Y$  és tangent a  $S$ .

La tercera equació del sistema dóna  $X^\theta = -\sin \phi$ . Ficat aquest resultat dins la primera, s'obté  $X^\phi = -\cos \phi / \tan \theta$ . En conclusió,

$$X|_U = -\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

- (c) Sigui  $f = i^*(g)$  la restricció de  $g$  a  $S$ . Expressen-la en les coordenades esfèriques de  $S$ . Calculeu  $df$  i  $\mathcal{L}_X f$ .

Calculem  $f = i^*(g)$  amb  $g = z$ :

$$f|_U = a \cos \theta.$$

D'aquí resulta

$$df|_U = -a \sin \theta d\theta.$$

Ara calculem  $\mathcal{L}_X f = \left( -\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) (a \cos \theta)$ :

$$(\mathcal{L}_X f)|_U = a \sin \theta \sin \phi.$$

**i** També podem usar  $\mathcal{L}_X f = \langle df, X \rangle$  i  $\langle dx^i, \partial/\partial x^j \rangle = \delta^i_j$ :

$$\mathcal{L}_X f|_U = \left\langle -a \sin \theta \, d\theta, -\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right\rangle = a \sin \theta \sin \phi.$$

**i** Alternativament, podem usar que, si  $X \sim_F Y$ ,  $\mathcal{L}_X F^*(g) = F^*(\mathcal{L}_Y g)$ .

Així, de  $\mathcal{L}_Y g = \left( -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} \right) z = y$  resulta  $\mathcal{L}_X f = i^*(\mathcal{L}_Y g) = i^*(y)$ :

$$(\mathcal{L}_X f)|_U = a \sin \theta \sin \phi.$$

(d) Calculeu el pull-back  $\alpha = i^*(\beta)$  de  $\beta$  per  $i$ .

**i** Els operadors  $F^*$  i  $d$  commuten.

Es calcula immediatament

$$\begin{aligned} i^*(x dx) &= i^*(x) di^*(x) = (a \sin \theta \cos \phi) d(a \sin \theta \cos \phi) \\ &= a^2 \sin \theta \cos \phi (\cos \theta \cos \phi \, d\theta - \sin \theta \sin \phi \, d\phi). \end{aligned}$$

Anàlogament es calculen

$$i^*(y dy) = a^2 \sin \theta \sin \phi (\cos \theta \sin \phi \, d\theta + \sin \theta \cos \phi \, d\phi),$$

$$i^*(z dz) = -a^2 \cos \theta \sin \theta \, d\theta.$$

El resultat és

$$i^*(\beta) = i^*(x dx + y dy + z dz) = 0.$$

Alternativament, podem observar que  $\beta = \frac{1}{2} dr^2$ , on  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Com que  $i^*(r^2) = a^2$  és constant,

$$i^*(\beta) = i^*\left(\frac{1}{2} dr^2\right) = \frac{1}{2} di^*(r^2) = \frac{1}{2} da^2 = 0.$$

## 5 Equacions diferencials i fluxos

### 5.1 Flux d'un camp vectorial no complet

A la recta real  $M = \mathbf{R}$ , considereu el camp vectorial  $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ .

(a) Calculeu el flux  $F$  de  $X$ , especificant quin n'és el domini.

**i**

Si  $\gamma_p: I_p \rightarrow M$  és la corba integral maximal de  $X$  amb condició inicial  $\gamma_p(0) = p$ , el flux de  $X$  és l'aplicació  $F: D \rightarrow M$ ,  $F(t, p) = \gamma_p(t)$ , definida en el conjunt obert  $D = \{(t, p) \mid p \in M, t \in I_p\} \subset \mathbf{R} \times M$ .

S'ha de resoldre l'equació diferencial amb condició inicial

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0.$$

Fent les manipulacions habituals,

$$\frac{dx}{x^2} = dt, \quad -\frac{1}{x} = t + C, \quad C = -1/x_0 \quad (\text{si } x_0 \neq 0)$$

o sigui que  $x(t) = -\frac{1}{t - 1/x_0}$ , o, millor,

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0},$$

expressió vàlida per a tota condició inicial.

Quan  $x_0 = 0$  estem en un punt crític del camp vectorial, i la solució d'equilibri  $x(t) = 0$  està definida per a tota  $t$ .

Quan  $x_0 \neq 0$  l'expressió de la solució té un denominador que s'anul·la al temps  $t = 1/x_0$ . Si per exemple  $x_0 > 0$ , això significa que la solució maximal amb aquesta condició inicial està definida en l'interval obert  $I_{x_0} = ]-\infty, 1/x_0[$ . Semblantment, si  $x_0 < 0$ , llavors  $I_{x_0} = ]1/x_0, +\infty[$ .

En vista d'això, el flux de  $X$  és l'aplicació

$$F: D \rightarrow \mathbf{R}, \quad \text{amb } D = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid tx < 1\}$$

definida per

$$F(t, x) = \frac{x}{1 - tx}.$$

- (b) Calculeu-ne el flux a temps 1,  $F^1$ , especificant-ne el domini i la imatge.

**i**

Si  $F: D \rightarrow M$  és el flux de  $X$ , el seu flux a temps  $t$  és l'aplicació parcial  $F^t = F(t, \cdot)$ . Està definida en el conjunt obert  $M_t = \{p \in M \mid (t, p) \in D\}$ , i és un difeomorfisme  $F^t: M_t \rightarrow M_{-t}$ .

Es demana el difeomorfisme  $F^1: M_1 \rightarrow M_{-1}$  definit per  $F^1(x) = F(1, x)$ . Per tant, és

$$F^1(x) = \frac{x}{1-x}.$$

El seu domini està format pels  $x$  tals que  $F^1$  està definit, és a dir,

$$M_1 = \{x \mid x < 1\},$$

i la seva imatge és

$$M_{-1} = \{x \mid x > -1\}.$$

- (c) Comproveu a partir de la definició que el flux  $F(t, x) = \frac{x}{1-tx}$  obtingut en el primer apartat és, en efecte, un grup uniparamètric local de transformacions.

**i**

Aquesta propietat es compleix quan d'una banda el domini de  $F$  és obert i el domini de cada  $F^t$  és un interval que conté 0, i a més es compleixen les «lleis de grup»:  $F(0, p) = p$  i  $F(t+s, p) = F(t, F(s, p))$ .

Comprovem les lleis de grup:

$$F(0, x) = x,$$

$$F(s, F(t, x)) = F\left(s, \frac{x}{1-tx}\right) = \frac{\frac{x}{1-tx}}{1-s\frac{x}{1-tx}} = \frac{x}{1-(t+s)x} = F(s+t, x).$$

- (d) Calculeu el generador infinitesimal del flux obtingut en el primer apartat, i vegeu que coincideix amb  $X$ .

**i**

El generador infinitesimal es calcula amb  $X(p) = F'(0, p)$ .

Ja que estem en un espai euclidià, escrivint el generador infinitesimal com  $X(x) = (x, v(x))$ , serà

$$v(x) = \left. \frac{d}{dt} F(t, x) \right|_{t=0} = \left. \frac{x^2}{(1-tx)^2} \right|_{t=0} = x^2,$$

de manera que  $X = x^2 \partial/\partial x$ , com era d'esperar.

## 5.2 Òrbites i redreçament d'un camp vectorial

A la varietat  $M = \mathbf{R}^2$  considerem el camp vectorial

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

(a) *Classifiqueu les òrbites de  $X$ .*

L'únic punt crític de  $X$  és el  $(0, 0)$ , que correspon a una solució d'equilibri.

Les altres corbes integrals de  $X$  es calculen fàcilment:

$$\gamma_{(x_0, y_0)}(t) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, x_0 \sin t + y_0 \cos t),$$

i són  $2\pi$ -periòdiques, per tant corresponen a òrbites tancades, que de fet són les circumferències amb centre a l'origen.

(b) *Considereu el punt  $p = (1, 0)$ . Obteniu unes coordenades en aquest punt que redrecin  $X$ .*

**i** El redreçament es pot obtenir prenent el flux  $F: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$  de  $X$  (l'estem suposant complet per simplicitat), prenent una hipersuperfície  $M_o \subset M$  que contingui  $p$  i tal que  $X_p \notin T_p M_o$ , i restringint el flux a  $F_o: \mathbf{R} \times M_o \rightarrow M$ , aplicació que és un difeomorfisme local en  $(0, p)$  i compleix  $F_{o*}(\partial/\partial t) = X$ , cosa que permet construir les coordenades demanades.

En primer lloc escrivim el flux de  $X$ :

$$F(t, x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t).$$

Necessitem una hipersuperfície que contingui  $p$  però tal que  $X(p) = \partial/\partial y|_p$  no hi sigui tangent. Per exemple, la recta  $M_o = \mathbf{R} \times \{0\}$ . Restringirem el flux a  $F_o: \mathbf{R} \times M_o \rightarrow M$ .

Necessitem posar coordenades a  $M_o$ , cosa que en aquest cas és gairebé automàtica:

$$\varphi_o: M_o \rightarrow \mathbf{R}, \quad \varphi_o(u, 0) = u.$$

Anomenem  $\psi$  l'aplicació composta resultant:

$$\psi: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times M_o \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \psi(t, u) = F(t; u, 0) = (u \cos t, u \sin t).$$

D'acord amb la teoria, sabem que  $\psi(0, 1) = (1, 0) = p$ , que  $\psi$  és un difeomorfisme local en  $(0, 1)$ , i que  $\psi_*(\partial/\partial t) = X$ . D'aquesta forma, restringint

adequadament el domini i codomini, l'aplicació inversa  $\varphi = \psi^{-1}$  és una carta local de  $M$  en  $p$  que redreça  $X$ , convertint-lo en el primer camp vectorial coordenat. Comprovem aquestes afirmacions.

La jacobiana de  $\psi$  en  $(0, 1)$  és

$$J\psi(0, 1) = \left( \begin{array}{cc} -u \sin t & \cos t \\ u \cos t & \sin t \end{array} \right) \Big|_{\substack{t=0 \\ u=1}} = \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right),$$

invertible. Així,  $\varphi = \psi^{-1}$  és una carta amb coordenades  $(t, u)$ . En elles podem comprovar que

$$X = \frac{\partial}{\partial t},$$

ja que

$$\left( \begin{array}{cc} -u \sin t & \cos t \\ u \cos t & \sin t \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} -u \sin t \\ u \cos t \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} -y \\ x \end{array} \right),$$

que són les components de  $X$  en les coordenades cartesianes.

Observem, finalment, que les coordenades obtingudes no són més que les coordenades polars,  $(t, u) = (\phi, r)$ , de forma que  $X = \partial/\partial\phi$ , que evidencia que  $X$  és el generador infinitesimal de les rotacions. Tanmateix, una tria diferent de  $M_\circ$ , o amb la mateixa recta  $M_\circ$  però parametritzada per una coordenada diferent de l'abscissa  $u$  que hem usat, haurien donat unes coordenades diferents en  $M$ .

### 5.3 Grups uniparamètrics de transformacions i derivada de Lie

A la varietat  $\mathbf{R}^3$  considerem el camp vectorial

$$X = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y},$$

i l'aplicació

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (t, x, y, z) &\longmapsto (x \cos t + y \sin t, y \cos t - x \sin t, z). \end{aligned}$$

- (a) *Comproveu que  $F$  és un grup uniparamètric de transformacions de  $\mathbf{R}^3$ , i que el seu generador infinitesimal és  $X$ .*

Hem de comprovar que, per a qualssevol  $s, t \in \mathbf{R}$  i  $p = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ ,  $F(0, p) = p$ ,  $F(t + s, p) = F(t, F(s, p))$ :

$$F(0, x, y, z) = (x \cos 0 + y \sin 0, y \cos 0 - x \sin 0, z) = (x, y, z);$$

$$\begin{aligned} F(t + s, p) &= (x \cos(t + s) + y \sin(t + s), y \cos(t + s) - x \sin(t + s), z) \\ &= \left( x(\cos t \cos s - \sin t \sin s) + y(\sin t \cos s + \cos t \sin s), \right. \\ &\quad \left. y(\cos t \cos s - \sin t \sin s) - x(\sin t \cos s + \cos t \sin s), z \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(t, F(s, p)) &= F(t, x \cos s + y \sin s, y \cos s - x \sin s, z) \\ &= \left( (x \cos s + y \sin s) \cos t + (y \cos s - x \sin s) \sin t, \right. \\ &\quad \left. (y \cos s - x \sin s) \cos t - (x \cos s + y \sin s) \sin t, z \right) \\ &= \left( x \cos t \cos s + y \cos t \sin s + y \sin t \cos s - x \sin t \sin s, \right. \\ &\quad \left. y \cos t \cos s - x \cos t \sin s - x \sin t \cos s - y \sin t \sin s, z \right). \end{aligned}$$

Per calcular el generador infinitesimal de  $F$  en un punt  $p \in \mathbf{R}^3$  calculem la velocitat  $\gamma'_p(t)$  de  $\gamma_p(t) = F(t, p) = (x \cos t + y \sin t, y \cos t - x \sin t, z)$ :

$$\gamma'_p(t) = (-x \sin t + y \cos t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\gamma_p(t)} - (y \sin t + x \cos t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\gamma_p(t)}$$

d'on  $X(p) = \gamma'_p(0) = (y \partial / \partial x - x \partial / \partial y)|_p$ , o

$$X = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

(b) Sigui  $f(x, y, z) = xz$ . Calculeu  $\mathcal{L}_X f$  de dues maneres.

D'una banda, tenim l'acció de  $X$  com a derivació:

$$\mathcal{L}_X f = \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) (xz) = y \frac{\partial(xz)}{\partial x} - x \frac{\partial(xz)}{\partial y} = yz.$$

D'altra banda, hi ha una relació entre aquesta derivació i la definició de derivada de Lie a partir del flux de  $X$ :

$$\mathcal{L}_X f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F^{t*}(f)(p) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F^{t*}(f)(p).$$

Calculem, doncs, en  $p = (x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X f(p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F^{t*}(f)(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(F^t(p)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (x \cos t + y \sin t)z = (-x \sin t + y \cos t)z \Big|_{t=0} = yz. \end{aligned}$$

(c) Sigui  $Y = z \partial / \partial x - x \partial / \partial z$ . Calculeu  $\mathcal{L}_X Y$  de dues maneres.

La derivada de Lie i el parèntesi de Lie estan relacionats per  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ .

La manera més senzilla de fer el càlcul és doncs

$$[X, Y] = \left[ y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right] = -y \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial y}.$$

Alternativament, podem usar la definició de derivada de Lie:

$$\mathcal{L}_X Y(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F^{t*}(Y)(p).$$

Calculem  $F^{t*}(Y)(p) = T_{F^t(p)} F^{-t}(Y(F^t(p)))$ . Les aplicacions  $F^t$  són lineals, i per tant la seva jacobiana és la matriu que les representa; en particular, la jacobiana de  $F^{-t}$  en un punt qualsevol és

$$JF^{-t}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Llavors

$$\begin{aligned} Y(F^t(x, y, z)) &= Y(x \cos t + y \sin t, y \cos t - x \sin t, z) \\ &= \left( z \frac{\partial}{\partial x} - (x \cos t + y \sin t) \frac{\partial}{\partial z} \right) \Big|_{F^t(x, y, z)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F^{t*}(Y)(p) &= T_{F^t(p)} F^{-t} (Y(F^t(p))) \\
 &= \left( z \cos t \frac{\partial}{\partial x} + z \sin t \frac{\partial}{\partial y} - (x \cos t + y \sin t) \frac{\partial}{\partial z} \right) \Big|_p : \\
 F^{t*}(Y) &= z \cos t \frac{\partial}{\partial x} + z \sin t \frac{\partial}{\partial y} - (x \cos t + y \sin t) \frac{\partial}{\partial z} .
 \end{aligned}$$

Finalment,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_X Y &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F^{t*}(Y) \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( z \cos t \frac{\partial}{\partial x} + z \sin t \frac{\partial}{\partial y} - (x \cos t + y \sin t) \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
 &= \left( -z \sin t \frac{\partial}{\partial x} + z \cos t \frac{\partial}{\partial y} + (x \sin t - y \cos t) \frac{\partial}{\partial z} \right) \Big|_{t=0} \\
 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} .
 \end{aligned}$$

(Totes aquestes expressions estan implícitament avaluades en un punt concret, però arbitrari, de  $M$ .)

## 6 Camps tensorials

### 6.1 Canvi de coordenades en camps tensorials

Dins la varietat  $\mathbf{R}^3$  considerem la mètrica riemanniana canònica, que en les cordenades cartesianes s'expressa

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz,$$

i la forma de volum canònica

$$\Omega = dx \wedge dy \wedge dz.$$

(a) *Expresseu  $g$  en coordenades esfèriques.*

En el problema 4.1 hem obtingut que

$$dx = \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi,$$

$$dy = \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi,$$

$$dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta.$$

Només cal una mica de paciència i introduir-los dins l'expressió de  $g$ :

$$\begin{aligned} dx \otimes dx &= \sin^2 \theta \cos^2 \phi dr \otimes dr \\ &\quad + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi d\theta \otimes d\theta \\ &\quad + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi d\phi \otimes d\phi \\ &\quad + r \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi (dr \otimes d\theta + d\theta \otimes dr) \\ &\quad - r \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi (dr \otimes d\phi + d\phi \otimes dr) \\ &\quad - r^2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi (d\theta \otimes d\phi + d\phi \otimes d\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy \otimes dy &= \sin^2 \theta \sin^2 \phi dr \otimes dr \\ &\quad + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi d\theta \otimes d\theta \\ &\quad + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi d\phi \otimes d\phi \\ &\quad + r \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi (dr \otimes d\theta + d\theta \otimes dr) \\ &\quad + r \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi (dr \otimes d\phi + d\phi \otimes dr) \\ &\quad + r^2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi (d\theta \otimes d\phi + d\phi \otimes d\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dz \otimes dz &= \cos^2 \theta \, dr \otimes dr \\ &\quad + r^2 \sin^2 \theta \, d\theta \otimes d\theta \\ &\quad - r \cos \theta \sin \theta \, (dr \otimes d\theta + d\theta \otimes dr). \end{aligned}$$

Sumant-los s'obté

$$dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2 \theta \, d\phi \otimes d\phi,$$

expressió vàlida en el domini de definició de les coordenades.

(b) *Expresseu  $\Omega$  en coordenades esfèriques.*

Aquest es un cas especial, ja que es tracta d'una forma diferencial de grau màxim, i per tant podem aplicar

**i**

$$dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m = \det \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

Tenint en compte que  $\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta$ ,

$$dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin \theta \, dr \wedge d\theta \wedge d\phi.$$

(c) *A  $\mathbf{R}^3$  considereu el camp de 2-vectors tangents*

$$\Lambda = z \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}.$$

*Expresseu-lo en coordenades cilíndriques  $(\rho, \phi, z)$ .*

Tenim

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \phi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \phi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

d'on

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} &= \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \wedge \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= \left( \frac{\cos^2 \phi}{\rho} + \frac{\sin^2 \phi}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Per tant

$$\Lambda = \frac{z}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

## 6.2 Càlcul amb formes diferencials

Considerem la varietat diferenciable  $\mathbf{R}^4 - \{0\}$ , amb les seves coordenades cartesianes  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  habituals. Considerem-hi la funció, el camp vectorial i les formes diferencials següents:

$$\begin{aligned} r &= ((x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)^{1/2}, \\ \Delta &= x^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \\ \sigma &= x^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - x^1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad - x^2 dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 - x^3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2, \\ \Omega &= dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

(a) Calculeu  $d\sigma$ .



Tenim que  $ddf = 0$ , que  $d(f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$ , i que dues 1-formes diferencials anticommuten

$$\begin{aligned} d\sigma &= dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad - dx^1 \wedge dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - dx^2 \wedge dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 - dx^3 \wedge dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 : \\ d\sigma &= 4\Omega. \end{aligned}$$

(b) Calculeu  $\frac{dr}{r} \wedge \sigma$ .

Primer calculem  $dr^2 = 2(x^0 dx^0 + x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3) = 2r dr$ , d'on tenim

$$dr = \frac{x^0 dx^0 + x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3}{r}.$$

D'aquí, multiplicant terme a terme amb  $\sigma$ , tenim

$$\begin{aligned} \frac{dr}{r} \wedge \sigma &= \frac{1}{r^2} \left( (x^0)^2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - (x^1)^2 dx^1 \wedge dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right. \\ &\quad \left. - (x^2)^2 dx^2 \wedge dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 - (x^3)^2 dx^3 \wedge dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \right) : \\ \frac{dr}{r} \wedge \sigma &= \Omega. \end{aligned}$$

*Observació* Tant  $d\sigma$  com  $\frac{dr}{r} \wedge \sigma$  són múltiples de  $\Omega$ . Això és perquè  $\Omega$  és una forma de volum —en cada  $p$ ,  $\Omega_p$  és base de  $\Lambda^4 \Gamma_p^*(\mathbf{R}^4 - \{0\})$ .

(c) Calculeu  $i_{\Delta}\Omega$ .

**i**

Usarem que  $i_X$  és una antiderivació, que sobre 1-formes diferencials  $i_X$  és la contracció de vectors amb covectors, i que  $dx^i$  és la base dual de  $\partial/\partial x^j$

$$\begin{aligned} i_{\Delta}\Omega &= i_{\Delta}(dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \\ &= (i_{\Delta}dx^0)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - (i_{\Delta}dx^1)dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad + (i_{\Delta}dx^2)dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - (i_{\Delta}dx^3)dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= x^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - x^1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad + x^2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 - x^3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 : \end{aligned}$$

$$i_{\Delta}\Omega = \sigma.$$

(d) Calculeu  $i_{\Delta}\sigma$ .

Procedim de manera similar. Calculem les contraccions de cada  $x^0 \partial/\partial x^0$ , ... amb  $\sigma$ :

$$i\left(x^0 \frac{\partial}{\partial x^0}\right)\sigma = -x^0(x^1 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^3 \wedge dx^1 + x^3 dx^1 \wedge dx^2),$$

$$i\left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}\right)\sigma = x^0 x^1 dx^2 \wedge dx^3 - x^1 x^2 dx^0 \wedge dx^3 + x^1 x^3 dx^0 \wedge dx^2,$$

etc. Sumant les quatre contraccions tots els segons membres es cancel·len i s'obté

$$i_{\Delta}\sigma = 0.$$

(e) Torneu a calcular  $i_{\Delta}\Omega$  usant l'expressió de  $\Omega$  obtinguda a l'apartat (b).

Tornem a usar que  $i_{\Delta}$  és una antiderivació:

$$i_{\Delta}\Omega = i_{\Delta}\left(\frac{dr}{r} \wedge \sigma\right) = \left(i_{\Delta}\frac{dr}{r}\right)\sigma - \frac{dr}{r} \wedge i_{\Delta}\sigma = 1\sigma - \frac{dr}{r} \wedge 0.$$

En aquest càlcul hem usat dues coses: el fet que

$$i_{\Delta}dr = \langle dr, \Delta \rangle = r,$$

que s'obté fàcilment contraient les expressions de  $dr$  i  $\Delta$ , i el valor  $i_{\Delta}\sigma = 0$  obtingut a l'apartat (d).

(f) Calculeu  $\mathcal{L}_\Delta \sigma$ .

**i**

Usarem que  $\mathcal{L}_X$  és una derivació i que commuta amb  $d$ .

Vista l'expressió de  $\Delta$ , tenim  $\mathcal{L}_\Delta x^i = x^i$ , i per tant  $\mathcal{L}_\Delta dx^i = d\mathcal{L}_\Delta x^i = dx^i$ .

Ara calculem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Delta(x^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= (\mathcal{L}_\Delta x^0) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \dots + x^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge \mathcal{L}_\Delta dx^3 \\ &= x^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \dots + x^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= 4 x^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Fent-ho amb tots els termes de  $\sigma$  obtenim

$$\mathcal{L}_\Delta \sigma = 4 \sigma.$$

**i**

També podem usar la fórmula de Cartan:  $\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X$  :

Usant els resultats de (a), (d) i (c),  $\mathcal{L}_\Delta \sigma = i_\Delta(d\sigma) + d(i_\Delta \sigma) = 4i_\Delta \Omega + d0 = 4\sigma$ .

(g) Calculeu  $\mathcal{L}_\Delta \Omega$ .

Usant els resultats dels apartats (a) i (f) tenim  $\mathcal{L}_\Delta \Omega = \mathcal{L}_\Delta \left( \frac{1}{4} d\sigma \right) = \frac{1}{4} d \mathcal{L}_\Delta \sigma = \frac{1}{4} d(4\sigma) = d\sigma$ :

$$\mathcal{L}_\Delta \Omega = 4 \Omega.$$

(h) Existeix algun valor de  $k$  tal que la  $k$ -forma diferencial  $r^k \Omega$  és invariant pel camp vectorial  $\Delta$ ?

**i**

Un camp tensorial  $\omega$  és invariant per  $X$  sii  $\mathcal{L}_X \omega = 0$ .

Calculem primer  $\mathcal{L}_\Delta r^k = \langle dr^k, \Delta \rangle = \langle kr^{k-1} dr, \Delta \rangle = kr^{k-1} \langle dr, \Delta \rangle$ :

$$\mathcal{L}_\Delta r^k = k r^k.$$

Usant que  $\mathcal{L}_\Delta$  és derivació, i el resultat de l'apartat anterior, tenim

$$\mathcal{L}_\Delta(r^k \Omega) = (\mathcal{L}_\Delta r^k) \Omega + r^k \mathcal{L}_\Delta \Omega = kr^k \Omega + r^k (4\Omega) = (k+4) r^k \Omega.$$

Aquesta forma diferencial és nul·la sii  $k = -4$ .

## 8 Connexions en una varietat

### 8.1 Símbols de Christoffel en diferents sistemes de coordenades

Considerem la varietat  $\mathbf{R}^2$  amb la seva connexió estàndard, aquella on els camps vectorials coordenats cartesianes són paral·lels: per a tot  $u \in \mathbf{TR}^2$ ,  $\nabla_u \partial/\partial x = 0$ ,  $\nabla_u \partial/\partial y = 0$ .

(a) Calculeu-ne els símbols de Christoffel en coordenades polars.



Coneguda la derivada covariant, els símbols de Christoffel són les funcions  $\Gamma_{ij}^k$  tals que  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ .



D'altra banda,  $\nabla_u(fX) = (\mathcal{L}_u f)X + f\nabla_u X$ .

De la relació entre coordenades cartesianes i polars  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ , es dedueix la relació entre els respectius camps vectorials coordenats, imposant que els camps vectorials coordenats cartesianes siguin paral·lels:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial \phi} &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \phi \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Tot seguit calculem les derivades covariants:

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (\cos \phi) \frac{\partial}{\partial x} + \cos \phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} (\sin \phi) \frac{\partial}{\partial y} + \sin \phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'aquí es desprèn que

$$\Gamma_{rr}^r = \Gamma_{rr}^\phi = 0.$$

Semblantment,

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial \phi} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left( -r \sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (-r \sin \phi) \frac{\partial}{\partial x} - r \sin \phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \phi) \frac{\partial}{\partial y} + r \cos \phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= -\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + 0 + \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} + 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \phi} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \left( -r \sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi} (-r \sin \phi) \frac{\partial}{\partial x} - r \sin \phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \phi} (r \cos \phi) \frac{\partial}{\partial y} + r \cos \phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= -r \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + 0 - r \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} + 0 = -r \frac{\partial}{\partial r}.\end{aligned}$$

Un càlcul semblant, per bé que innecessari ja que la connexió és sense torsió,

dóna  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}$ .

El resultat és, doncs:

$$\begin{aligned}\Gamma_{rr}^r &= 0, & \Gamma_{rr}^\phi &= 0, \\ \Gamma_{r\phi}^r &= \Gamma_{\phi r}^r = 0, & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r, & \Gamma_{\phi\phi}^\phi &= 0.\end{aligned}$$

Un procediment alternatiu seria usar la fórmula del canvi de coordenades dels símbols de Christoffel:

$$\Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\gamma} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\delta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\delta}.$$

Així podem calcular, per exemple,

$$\begin{aligned}\Gamma_{rr}^r &= \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = 0, \\ \Gamma_{rr}^\phi &= \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial r} \frac{\partial}{\partial \phi} x + \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial r} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \\ \Gamma_{r\phi}^r &= \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial \phi} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial \phi} \frac{\partial r}{\partial y} = -\sin \phi \cos \phi + \cos \phi \sin \phi = 0, \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\sin \phi \frac{-\sin \phi}{r} + \cos \phi \frac{\cos \phi}{r} = \frac{1}{r},\end{aligned}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{\partial^2 x}{\partial\phi\partial\phi} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial\phi\partial\phi} \frac{\partial r}{\partial y} = -r \cos\phi \cos\phi - r \sin\phi \sin\phi = -r,$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\phi = \frac{\partial^2 x}{\partial\phi\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial\phi\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial y} = -r \cos\phi \frac{-\sin\phi}{r} - r \sin\phi \frac{\cos\phi}{r} = 0.$$

(b) *Siguin*  $E_r = \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $E_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\phi}$ .

*Calculeu totes les derivades covariants*  $\nabla_{E_i} E_j$ .

Apliquem el mateix procediment que abans:

$$\nabla_{E_r} E_r = \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} = 0,$$

$$\nabla_{E_r} E_\phi = \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{r} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial\phi} = 0,$$

$$\nabla_{E_\phi} E_r = \frac{1}{r} \nabla_{\frac{\partial}{\partial\phi}} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial\phi} = \frac{1}{r} E_\phi,$$

$$\nabla_{E_\phi} E_\phi = \frac{1}{r} \nabla_{\frac{\partial}{\partial\phi}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) = \frac{1}{r^2} \nabla_{\frac{\partial}{\partial\phi}} \frac{\partial}{\partial\phi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{1}{r} E_r.$$

Observi's que, encara que la connexió és sense torsió,  $\nabla_{E_r} E_\phi \neq \nabla_{E_\phi} E_r$ , la qual cosa no és soprenent ja que la base  $(E_i)$  no és de camps vectorials coordenats, i  $[E_r, E_\phi] \neq 0$ .

## 8.2 Geodèsiques d'una connexió

Sigui  $\mathbf{R}^2$  amb la seva connexió estàndard.

Calculeu l'equació de les geodèsiques de  $\mathbf{R}^2$  en coordenades cartesianes i en coordenades polars.

L'equació de les geodèsiques d'una connexió es pot escriure, en coordenades,

$$\ddot{q}^k + (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \dot{q}^i \dot{q}^j = 0.$$

En coordenades cartesianes els símbols de Christoffel són nuls, de forma que l'equació perquè  $(x(t), y(t))$  sigui una geodèsica és

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = 0, \end{cases}$$

que són les rectes del pla parametritzades amb velocitat constant.

En coordenades polars:  $(r(t), \phi(t))$  és geodèsica quan

$$\begin{cases} \ddot{r} + \Gamma_{rr}^r \dot{r} \dot{r} + \Gamma_{r\phi}^r \dot{r} \dot{\phi} + \Gamma_{\phi r}^r \dot{\phi} \dot{r} + \Gamma_{\phi\phi}^r \dot{\phi} \dot{\phi} = \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 = 0, \\ \ddot{\phi} + \Gamma_{rr}^{\phi} \dot{r} \dot{r} + \Gamma_{r\phi}^{\phi} \dot{r} \dot{\phi} + \Gamma_{\phi r}^{\phi} \dot{\phi} \dot{r} + \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} \dot{\phi} \dot{\phi} = \ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} = 0. \end{cases}$$

## 9 Varietats pseudoriemannianes

### 9.1 Canvi de coordenades en mètriques

Dins la varietat  $\mathbf{R}^2$  considerem la mètrica riemanniana canònica, que en les cordenades cartesianes s'expressa

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy.$$

(a) *Expresseu  $g$  en coordenades polars.*

De la relació entre coordenades cartesianes i polars  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ , es desprèn immediatament

$$dx = \cos \phi \, dr - r \sin \phi \, d\phi,$$

$$dy = \sin \phi \, dr + r \cos \phi \, d\phi.$$

Només cal introduir-los dins l'expressió de  $g$ :

$$\begin{aligned} dx \otimes dx &= \cos^2 \phi \, dr \otimes dr \\ &\quad + r^2 \sin^2 \phi \, d\phi \otimes d\phi \\ &\quad - r \cos \phi \sin \phi \, (dr \otimes d\phi + d\phi \otimes dr), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy \otimes dy &= \sin^2 \phi \, dr \otimes dr \\ &\quad + r^2 \cos^2 \phi \, d\phi \otimes d\phi \\ &\quad + r \cos \phi \sin \phi \, (dr \otimes d\phi + d\phi \otimes dr), \end{aligned}$$

Sumant-los s'obté

$$dx \otimes dx + dy \otimes dy = dr \otimes dr + r^2 \, d\phi \otimes d\phi,$$

expressió vàlida en el domini de definició de les coordenades.

## 9.2 Càlcul dels símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita

Calculeu els símbols de Christoffel de  $\mathbf{R}^2$  amb la seva mètrica riemanniana estàndard expressada en coordenades polars,  $g = dr \otimes dr + r^2 d\phi \otimes d\phi$ .

Es pot calcular els símbols de Christoffel a partir dels coeficients de la mètrica amb la fórmula  $\Gamma_{ij}^k = g^{k\ell} [ij, \ell]$ , essent

$$[ij, \ell] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right)$$

els símbols de Christoffel de primera espècie.

En el cas en què ens trobem, hi ha una sola derivada no nul·la,  $\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} = 2r$ . Per tant els únics símbols  $[ij, k]$  que poden no ser nuls són els que tinguin dos  $\phi$ 's i un  $r$ :

$$[r\phi, \phi] = [\phi r, \phi] = r, \quad [\phi\phi, r] = -r.$$

I com que les coordenades són ortogonals la matriu inversa de la mètrica es calcula simplement invertint els termes de la diagonal,  $(g^{ij}) = \text{diag}(1, r^{-2})$ , de manera que

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = g^{\phi\phi} [r\phi, \phi] = 1/r, \quad \Gamma_{\phi r}^\phi = \Gamma_{r\phi}^\phi, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = g^{rr} [\phi\phi, r] = -r,$$

mentre que tots els altres són nuls:

$$\Gamma_{rr}^r = \Gamma_{rr}^\phi = \Gamma_{r\phi}^r = \Gamma_{\phi r}^r = \Gamma_{\phi\phi}^\phi = 0.$$