Varietats Diferenciables
Definicions i resultats

apunts per a l'assignatura de Varietats Diferenciables
del grau de Matemàtiques de la FME

Xavier Gràcia

xavier.gracia@upc.edu

http://mat-web.upc.edu/people/xavier.gracia/vardif

Departament de Matemàtiques
Facultat de Matemàtiques i Estadística (FME)
Universitat Politècnica de Catalunya

gener 2015 / 12 setembre 2016

Sumari

Prefaci

Aquests apunts provenen d'uns apunts similars de l'assignatura de Geometria Diferencial 2, amb l'addició d'alguns capítols d'Ampliació de Models Matemàtics de la Física, amdues dins la llicenciatura de Matemàtiques de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC. D'aquesta manera el document abraça de forma baldera els continguts de Varietats Diferenciables del grau actual. No hi ha demostracions, ni gairebé exemples; només les definicions i els resultats, d'importància diversa. Aquestes notes no substitueixen els apunts, ni els llibres, ni, encara menys, el treball personal.
Us agrairé que em feu arribar correccions i suggeriments.

Les definicions hi apareixen subratllades. La resta d'enunciats són proposicions, teoremes, corol·laris, … Alguns comentaris i resultats auxiliars també hi apareixen, amb una lletra més petita.

1 Varietats diferenciables

El concepte de varietat diferenciable es pot definir partint d'un conjunt, d'un espai topològic, o d'una varietat topològica. Partirem del segon.

1.1 Cartes, atles, varietats

(1.1.1) Sigui M un espai topològic. Una carta (o carta local) m-dimensional de M és un parell (U,φ) on $U \subset M$ és un subconjunt obert i $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \mathbf{R}^m$ és un homeomorfisme amb un obert de $\mathbf{R}^m$.

La dimensió d'una carta està determinada per la topologia de M, ja que dos oberts no-buits de $\mathbf{R}^m$ i $\mathbf{R}^n$ amb $m \neq n$ no poden ser homeomorfs, pel *teorema de la invariància de la dimensió.*

(1.1.2) Una carta (U,φ) també s'anomena sistema de coordenades. El domini U s'anomena obert coordenat i les funcions components φ^i de φ s'anomenen funcions coordenades de la carta.

Si $p \in U$, els nombres $\varphi(p) = (\varphi^1(p), \ldots, \varphi^m(p))$ s'anomenen coordenades (locals) de p en la carta (U,φ).

(1.1.3) Siguin (U,φ), (V,ψ) dues cartes m-dimensionals de M. Anomenem canvi de coordenades (o canvi de carta) l'aplicació, entre oberts de $\mathbf{R}^m$, que denotem (abusant de la notació) per

$$\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V).$$

Sigui $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Les cartes (U,φ), (V,ψ) es diuen C^r-compatibles si el canvi de coordenades, i el seu invers, són aplicacions de classe C^r.

Si $U \cap V = \emptyset$ aquesta condició es compleix trivialment. Dues cartes qualssevol són sempre C^0-compatibles.

(1.1.4) Un atles m-dimensional de classe C^r en M és un conjunt de cartes $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ m-dimensionals tals que els seus dominis recobreixen M, i dues cartes qualssevol són C^r-compatibles:

- $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$
- $(\forall \alpha, \beta \in A) \quad \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ és de classe C^r

(1.1.5) Dos atles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ de M són C^r-compatibles si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ és un atles de classe C^r; equival a afirmar que cada carta de $\mathcal{A}$ és C^r-compatible amb cada carta de $\mathcal{B}$.

(1.1.6) En el conjunt dels atles de classe C^r de M, la relació «$\mathcal{A}$ és C^r-compatible amb $\mathcal{B}$» és d'equivalència. La unió de tots els atles d'una classe d'equivalència és un atles maximal (és a dir, un atles al qual no es poden afegir més cartes compatibles).

(1.1.7) Una estructura diferenciable m-dimensional de classe C^r en M és una classe d'equivalència d'atles m-dimensionals de classe C^r de M, o, equivalentment, un atles maximal.

(1.1.8) Una varietat diferenciable[1] de classe C^r i dimensió m és un espai topològic M dotat d'una estructura diferenciable de classe C^r i dimensió m. Suposarem implícitament que M no és buit.

(1.1.9) La dimensió de M es representa per $\dim M$. És habitual anomenar corbes les varietats de dimensió 1, i superfícies les de dimensió 2.

(1.1.10) Quan parlem d'una carta d'una varietat diferenciable, ens referim a una carta del seu atles maximal.

(1.1.11) En la definició de varietat diferenciable, sovint s'imposen condicions topològiques a l'espai M:

- que sigui separat (Hausdorff)
- que la seva topologia tingui base numerable d'oberts; o, més generalment, que sigui un espai paracompacte

Sempre assumirem que es compleix la primera; per a alguns resultats, caldrà assumir que també es compleix la segona.

(1.1.12) Una varietat de classe C^0 es diu varietat topològica. Una varietat de classe C^ω es diu varietat analítica. Una varietat de classe C^∞ es diu varietat diferenciable, o varietat llisa.

D'ara endavant, llevat d'indicació contrària, no considerarem més que varietats diferenciables (de classe C^∞), i les anomenarem simplement *varietats.*

(1.1.13) A vegades es defineix el concepte de varietat sense imposar que els diferents components tinguin la mateixa dimensió. Sota aquest punt de vista més general, les varietats que hem definit, on tots els components tenen la mateixa dimensió, s'anomenen *pures.*

Es poden considerar varietats de dimensió infinita reemplaçant els espais $\mathbf{R}^m$ per espais de Hilbert, espais de Banach, espais de Fréchet, o altres espais vectorials

[1] També s'usen els termes *estructura diferencial* i *varietat diferencial.*

topològics més generals: s'obtenen les *varietats de Hilbert*, *varietats de Banach*, etc.

Si es reemplaça com a model local $\mathbf{R}^m$ per un semiespai tancat com ara $\mathbf{R}^m_- = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \mid x^1 \leq 0\}$ s'obtenen les *varietats amb vora*.

Si es reemplaça $\mathbf{R}^m$ per $\mathbf{C}^m$, amb canvis de coordenades holomorfs, s'obtenen les *varietats complexes* o *holomorfes*.

1.2 Exemples

(1.2.1) $\mathbf{R}^n$ té una estructura diferenciable canònica, la definida per la carta global $\mathrm{Id}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ i l'atles corresponent $\{(\mathbf{R}^n, \mathrm{Id})\}$. Les funcions coordenades corresponents $\mathrm{pr}_i\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ són les *coordenades cartesianes*.

Les cartes de la varietat diferenciable $\mathbf{R}^n$ són, doncs, tots els difeomorfismes $\varphi\colon U \to \widehat{U}$ entre oberts de $\mathbf{R}^n$.

(1.2.2) Sigui E un $\mathbf{R}$-espai vectorial de dimensió finita m, amb la seva topologia canònica. Qualsevol bijecció lineal $\varphi\colon E \to \mathbf{R}^m$ és una carta global, i $\{(E, \varphi)\}$ un atles, que defineix una estructura diferenciable en E. Aquesta no depèn de l'isomorfisme φ triat.

(1.2.3) Les varietats de dimensió 0 són els espais topològics discrets.

(1.2.4) Siguin M una varietat diferenciable, i $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ una carta de M. Si $U' \subset U$ és un obert, la restricció $\varphi'\colon U' \to \varphi(U')$ també és una carta de M.

Així, si $W \subset M$ és un subespai obert i $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ una carta de M, llavors $\varphi|_{U \cap W}\colon U \cap W \to \varphi(U \cap W)$ també és una carta de M.

(1.2.5) Sigui M una varietat diferenciable, i $W \subset M$ un subespai obert. Les cartes (U, φ) de M amb domini $U \subset W$ són cartes de l'espai topològic W, i el conjunt de totes elles és un atles de W. Amb aquesta estructura diferenciable, W s'anomena <u>subvarietat oberta</u> de M.

(1.2.6) En particular, tot obert $W \subset \mathbf{R}^n$ té una estructura diferenciable canònica, la donada per la carta global $\mathrm{Id}_W\colon W \to W$.

(1.2.7) *Subvarietats de* $\mathbf{R}^n$

Sigui $M \subset \mathbf{R}^n$ una subvarietat regular de classe C^∞: per a cada punt $x \in M$, existeixen un conjunt obert U de $\mathbf{R}^n$ contenint x, i un difeomorfisme de classe C^∞ $\varphi\colon U \to V$, tals que $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^m \times \{0\})$. Posem $U_\circ = U \cap M$, obert de M, i $V_\circ = V \cap (\mathbf{R}^m \times \{0\})$, obert de $\mathbf{R}^m$. Llavors la restricció de φ, considerada com a aplicació $\varphi_\circ \colon U_\circ \to V_\circ$, és una carta m-dimensional de M, i el conjunt d'aquestes cartes defineix sobre M una estructura de varietat diferenciable.

(1.2.8) Siguin M, N varietats diferenciables. Siguin $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ un atles de M, $\{(V_\beta, \psi_\beta) \mid \beta \in B\}$ un atles de N. Per a cada $(\alpha, \beta) \in A \times B$, el parell $(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$ és una carta de $M \times N$, anomenada carta producte. El conjunt de totes elles n'és un atles, amb el qual $M \times N$ és una varietat diferenciable, anomenada varietat producte de M i N.

Si $\dim M = m$ i $\dim N = n$, aleshores $\dim(M \times N) = m + n$.

Igualment es defineix el producte d'un nombre finit de varietats diferenciables.

1.3 Aplicacions diferenciables

(1.3.1) Siguin M, N varietats diferenciables, $f \colon M \to N$ una aplicació. Siguin (U, φ) una carta de M i (V, ψ) una carta de N tals que $f(U) \subset V$. Llavors està definida l'aplicació

$$\widehat{f} = \psi \circ f|_U \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \psi(V)$$

entre conjunts oberts d'espais euclidians. S'anomena expressió local de f en les cartes (U, φ) i (V, ψ).

(1.3.2) Si f és contínua en $p \in M$, llavors existeix una expressió local de f al voltant de p.

(1.3.3) Sigui $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. L'aplicació f es diu aplicació de classe C^k (o morfisme de classe C^k) si, per a tot $p \in M$, existeix una expressió local $\widehat{f}$ de f, definida a partir d'un obert coordenat $U \ni p$, tal que $\widehat{f}$ és de classe C^k.

Més generalment, en una varietat de clase C^r es poden considerar aplicacions de classe C^k, amb $k \leq r$.

(1.3.4) Denotarem per $\mathrm{C}^k(M, N)$ el conjunt d'aplicacions de classe C^k entre M i N.

Las aplicacions de classe C^∞ s'anomenen diferenciables (o *llises*).

Notem la discrepància d'aquesta denominació respecte a la nomenclatura habitual del càlcul diferencial.

(1.3.5) Si f és de classe C^k, llavors és contínua.

(1.3.6) Sigui $f\colon M \to N$ una aplicació. Si f és de classe C^k i $U \subset M$ és un subconjunt obert, llavors $f|_U\colon U \to N$ és classe C^k. Recíprocament, si les restriccions de f als conjunts d'un recobriment obert de M són de classe C^k, llavors f és de classe C^k.

Això es pot expressar dient que «ser de classe C^k» és una propietat local.

(1.3.7) *Lema d'enganxament d'aplicacions diferenciables*

Siguin M, N varietats, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recobriment obert de M, i $f_\alpha\colon U_\alpha \to N$ aplicacions tals que, per a qualssevol $\alpha, \beta \in A$, es compleix $f_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$. Llavors existeix una única aplicació $f\colon M \to N$ tal que, per a tot α, $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$. Si les f_α són de classe C^k, també ho és f.

(1.3.8) Si f és de classe C^k, llavors l'expressió local de f en un parell de cartes qualssevol és de classe C^k.

(1.3.9) Sigui $f\colon M \to N$ una aplicació contínua. Siguin $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ un atles de M, $\{(V_\beta, \psi_\beta) \mid \beta \in B\}$ un atles de N. Llavors f és de classe C^k sii, per a tot $(\alpha, \beta) \in A \times B$, l'aplicació

$$\widehat{f}_{\alpha\beta} = \psi_\beta \circ f|_{U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta)} \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \longrightarrow \psi_\beta(V_\beta)$$

és de classe C^k.

(1.3.10) Siguin $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ aplicacions. Siguin (U,φ), (V,ψ), (W,χ) cartes de M, N i P tals que $f(U) \subset V$, $g(V) \subset W$. Per a les expressions locals de f, g i $g \circ f$ es compleix

$$\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}.$$

(1.3.11) Siguin $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ aplicacions. Si f i g són de classe C^k, també ho és $g \circ f$.

1.4 Difeomorfismes

(1.4.1) Un <u>difeomorfisme</u> (o isomorfisme de varietats diferenciables) és una bijecció $f\colon M \to N$ tal que f i f^{-1} són diferenciables.

Més generalment, es poden considerar difeomorfismes de classe C^k.

(1.4.2) Dues varietats es diuen <u>difeomorfes</u> si existeix un difeomorfisme entre elles. Necessàriament tenen la mateixa dimensió, i són homeomorfes.

(1.4.3) L'aplicació identitat és un difeomorfisme. La composició de difeomorfismes és un difeomorfisme. L'aplicació inversa d'un difeomorfisme també és un difeomorfisme.

(1.4.4) Un difeomorfisme local[2] és una aplicació $f\colon M \to N$ tal que, per a tot punt $p \in M$, existeix un conjunt obert $U \ni p$ tal que $f(U) \subset N$ és obert i la restricció $f|_U\colon U \to f(U)$ és un difeomorfisme.

(1.4.5) Una mateixa varietat topològica pot tenir diferents estructures diferenciables. En algun casos, com ara $\mathbf{R}^4$ o $\mathbf{S}_7$, hi ha diferents estructures diferenciables *no isomorfes.*

Tota varietat diferenciable de classe C^1 té una estructura diferenciable de classe C^∞. En canvi, hi ha varietats topològiques que no admeten cap estructura diferenciable.

Tota varietat diferenciable de dimensió n amb base numerable d'oberts és difeomorfa a una subvarietat de $\mathbf{R}^{2n+1}$ (*teorema de Whitney*).

1.5 Funcions diferenciables i pull-back

(1.5.1) Anomenarem funció una aplicació $f\colon M \to \mathbf{R}$ (o més generalment amb valors vectorials, en $\mathbf{R}^n$ o en un espai vectorial real de dimensió finita).

(1.5.2) Una funció $f\colon M \to \mathbf{R}$ és de classe C^k sii existeix un atles $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de M tal que les expressions locals $\widehat{f}_\alpha = f|_{U_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbf{R}$ són de classe C^k.

(1.5.3) Denotarem el conjunt $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbf{R})$ de les funcions diferenciables en M per $\mathrm{C}^\infty(M)$, o $\mathscr{F}(M)$.

$\mathrm{C}^\infty(M)$ és una subàlgebra de la $\mathbf{R}$-àlgebra de les funcions contínues $\mathrm{C}^0(M)$.

(1.5.4) Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació entre varietats. Si $g\colon N \to \mathbf{R}$ és una funció, es pot definir la funció $F^*(g)\colon M \to \mathbf{R}$ per

$$F^*(g) = g \circ F.$$

$F^*(g)$ és la imatge recíproca o pull-back de g per F.

Si F és contínua, s'obté una aplicació $F^*\colon \mathrm{C}^0(N) \to \mathrm{C}^0(M)$ que és un morfisme d'àlgebres.

(1.5.5) Si $F\colon M \to N$ és una aplicació diferenciable, llavors per a tota funció diferenciable $g\colon N \to \mathbf{R}$ la funció $F^*(g)$ és diferenciable, i l'aplicació

$$F^*\colon \mathrm{C}^\infty(N) \to \mathrm{C}^\infty(M)$$

és un morfisme de $\mathbf{R}$-àlgebres.

[2] Hi ha qui usa informalment el terme *difeomorfisme local* per a referir-se a un difeomorfisme definit en un subconjunt obert; convé evitar aquesta confusió, ja que un difeomorfisme local *no* és un tipus especial de difeomorfisme.

(1.5.6) Considerem dues cartes (U, φ) de M i (V, ψ) de N tals que $F(U) \subset V$. Si $\widehat{F}$ és la corresponent expressió local de F, es compleix que

$$F^*(\psi^j)|_U = \widehat{F}^j \circ \varphi,$$

de manera que $F|_U$ està determinada pel pull-back de les funcions coordenades.

(1.5.7) El pull-back de les funcions coordenades permet calcular, en el conjunt obert pertinent, el pull-back de funcions qualssevol. Amb les mateixes hipòtesis, sigui $g\colon N \to \mathbf{R}$, i escrivim-la com $g = \widehat{g} \circ \psi$, és a dir, g s'expressa com una funció $\widehat{g}$ de les funcions coordenades. El seu pull-back també: $F^*(g) = \widehat{F^*(g)} \circ \varphi$, i de fet

$$F^*(g) = \widehat{g} \circ F^*(\psi)\,,$$

és a dir, només cal substituir les y^j pels seus pull-backs $F^*(y^j)$, els quals són funcions de les x^i.

(1.5.8) L'aplicació pull-back satisfà les propietats següents:

- $\mathrm{Id}_M^* = \mathrm{Id}_{\mathrm{C}^\infty(M)}$.
- Si $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} P$, $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.
- Si $M \xrightarrow{F} N$ és un difeomorfisme, $F^*\colon \mathrm{C}^\infty(N) \to \mathrm{C}^\infty(M)$ és un isomorfisme.

(1.5.9) Recíprocament, si $T\colon \mathrm{C}^\infty(N) \to \mathrm{C}^\infty(M)$ és un isomorfisme de $\mathbf{R}$-àlgebres, es pot provar que existeix un difeomorfisme $F\colon M \to N$ tal que $T = F^*$. Per tant, l'àlgebra $\mathrm{C}^\infty(M)$ caracteritza la varietat M.

(1.5.10) En el cas d'un difeomorfisme $F\colon M \to N$, existeix l'aplicació inversa del pull-back F^*. Es representa per $F_*\colon \mathrm{C}^\infty(M) \to \mathrm{C}^\infty(N)$, i s'anomena push-forward o imatge directa.

1.6 Funcions altiplà

(1.6.1) Recordem que el suport d'una funció $f\colon M \to \mathbf{R}$ és el més petit dels conjunts tancats fora dels quals s'anul·la:

$$\mathrm{Supp}(f) = \text{adherència de } \{p \in M \mid f(p) \neq 0\}.$$

(1.6.2) La funció $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida per $f(t) = e^{-1/t}$ si $t > 0$, $f(t) = 0$ si $t \leq 0$, és de classe C^∞.
(*Observació*: f *no* és de classe C^ω.)

(1.6.3) Siguin $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Existeix una funció $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ tal que $g(t) = 1$ si $t \leq a$, $g(t) = 0$ si $t \geq b$, i $0 < g(t) < 1$ si $a < t < b$.

(1.6.4) Siguin $0 < a < b$. Existeix una funció $h\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ tal que

- $h(x) = 1$ si $\|x\| \leq a$,
- $h(x) = 0$ si $\|x\| \geq b$,
- $0 < h(x) < 1$ si $a < \|x\| < b$.

(1.6.5) *Lema d'existència de funcions altiplà I*

Sigui M una varietat diferenciable, $p \in M$ un punt, $V \ni p$ un conjunt obert. Existeix una funció diferenciable $f\colon M \to \mathbf{R}$ tal que:

- f val 1 en un veïnat compacte $C \ni p$ tal que $C \subset V$,
- f té suport compacte contingut en V,
- $0 \leq f \leq 1$.

(1.6.6) *Lema d'existència de funcions altiplà II*

Sigui M una varietat diferenciable, $V \subset M$ un conjunt obert, $A \subset V$ un conjunt compacte. Existeix una funció diferenciable $f\colon M \to \mathbf{R}$ tal que:

- $f|_A = 1$,
- f té suport compacte contingut en V,
- $0 \leq f \leq 1$.

(1.6.7) Una funció amb les característiques anteriors s'anomena funció altiplà.

(1.6.8) *Lema d'extensió local de funcions*

Sigui M una varietat diferenciable, $V \subset M$ un conjunt obert, $A \subset V$ un conjunt compacte. Si $g\colon V \to \mathbf{R}$ és de classe C^k, existeix una funció de classe C^k $g'\colon M \to \mathbf{R}$ tal que $g'|_A = g|_A$.

(1.6.9) Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació contínua entre varietats. Si per a tota funció $g\colon N \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ el pull-back $F^*(g)$ és de classe C^∞, aleshores això també és cert per a tota funció $g\colon V \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ sobre un obert $V \subset N$ qualsevol.

(1.6.10) *Una caracterització alternativa de la diferenciabilitat d'aplicacions*

Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació contínua entre varietats. Suposem que, per a tota funció $g\colon N \to \mathbf{R}$ de classe C^∞, el pull-back $F^*(g)$ és de classe C^∞. Llavors F és de classe C^∞.

1.7 Particions de la unitat

(1.7.1) Sigui M un espai topològic. Una partició (contínua) de la unitat en M és una família $(\psi_i)_{i\in I}$ de funcions contínues $\psi_i\colon M \to \mathbf{R}$ tal que:

- $0 \le \psi_i \le 1$,
- el conjunt dels suports $\{\mathrm{Supp}(\psi_i)\}_{i\in I}$ és localment finit,
- $\sum_{i\in I} \psi_i = 1$.

La partició es diu subordinada a un recobriment $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de M si cada $\mathrm{Supp}(\psi_i)$ està contingut en algun U_α.

A vegades en aquesta definició se suposa que el conjunt d'índexs tant de la partició com del recobriment és el mateix, i la condició de subordinació es posa com $\mathrm{Supp}(\psi_\alpha) \subset U_\alpha$.

(1.7.2) En un espai paracompacte, per a tot recobriment obert existeix una partició contínua de la unitat subordinada al recobriment.

(1.7.3) Si M és una varietat diferenciable, es defineix de manera anàloga el concepte de partició diferenciable de la unitat, demanant que les funcions ψ_i siguin diferenciables.

(1.7.4) Si M és una varietat paracompacta, tot recobriment obert de M té una partició diferenciable de la unitat subordinada.

Considerem tot seguit el cas més simple d'una varietat amb base numerable d'oberts. El cas general en resulta de tenir en compte que tota varietat és la unió disjunta dels seus components connexos, i que en una varietat paracompacta cada component té base numerable d'oberts.

(1.7.5) *Lema de la ceba*

Sigui M un espai localment compacte amb base numerable d'oberts. Hi ha una successió d'oberts $(G_i)_{i\ge1}$ tal que els $\bar{G}_i$ són compactes, $\bar{G}_i \subset G_{i+1}$, i $M = \cup_i G_i$.

(1.7.6) *Teorema d'existència de particions de la unitat (I)*

Sigui M una varietat diferenciable amb base numerable d'oberts. Sigui (U_α) un recobriment obert de M. Existeix una partició de la unitat numerable $(\psi_i)_{i\in\mathbf{N}}$ subordinada al recobriment (U_α), i amb els $\mathrm{Supp}(\psi_i)$ compactes.

(1.7.7) *Teorema d'existència de particions de la unitat (II)*

Sigui M una varietat diferenciable amb base numerable d'oberts (o, més generalment, paracompacta). Sigui $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recobriment obert de M. Existeix una partició de la unitat $(\chi_\alpha)_{\alpha\in A}$ subordinada al recobriment ($\mathrm{Supp}(\chi_\alpha) \subset U_\alpha$).

(1.7.8) Per a una varietat diferenciable, les condicions següents són equivalents:

- és metritzable

- cada component connex té base numerable d'oberts
- és paracompacta
- té particions diferenciables de la unitat subordinades a qualsevol recobriment obert
- té una mètrica riemanniana

(1.7.9) *Lema d'Urysohn llis*

Sigui M una varietat diferenciable amb base numerable d'oberts (o, més generalment, paracompacta). Siguin $A, B \subset M$ conjunts tancats disjunts. Existeix una funció diferenciable $f\colon M \to \mathbf{R}$ tal que $f|_A = 1,\ f|_B = 0$.

2 Vectors tangents i cotangents

2.1 Vectors tangents i espai tangent

(2.1.1) Recordem que un camí és una aplicació contínua $\gamma\colon I \to M$ definida en un interval $I \subset \mathbf{R}$ no-degenerat. Només considerarem camins definits en intervals oberts.

(2.1.2) Sigui M una varietat diferenciable de dimensió m, $p \in M$. Considerem el conjunt

$$\mathscr{C}_{M,p} = \{\gamma\colon I \to M \mid I \subset \mathbf{R} \text{ interval obert amb } 0 \in I,\ \gamma \text{ és } \mathrm{C}^1,\ \gamma(0) = p\}.$$

Dos camins $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathscr{C}_{M,p}$ són tangents (en 0) quan existeix una carta (U, φ) de M en p tal que les respectives expressions locals són tangents:

- $\widehat{\gamma}_1(0) = \widehat{\gamma}_2(0)$,
- $\mathrm{D}\widehat{\gamma}_1(0) = \mathrm{D}\widehat{\gamma}_2(0)$.

Aquesta propietat no depèn de la carta triada.

(2.1.3) La tangència és la relació d'equivalència en $\mathscr{C}_{M,p}$ induïda per l'aplicació

$$\mathscr{C}_{M,p} \to \mathbf{R}^m, \quad \gamma \mapsto \mathrm{D}(\varphi \circ \gamma)(0),$$

essent φ un sistema de coordenades qualsevol en p.

(2.1.4) Una classe d'equivalència per la relació de tangència s'anomena vector tangent a M en p. Si $\gamma \in \mathscr{C}_{M,p}$, denotem per $[\gamma]_p$ la seva classe de tangència.

Denotem per T_pM el conjunt quocient de $\mathscr{C}_{M,p}$ per la relació de tangència, és a dir, el conjunt dels vectors tangents a M en p.

(2.1.5) Sigui (U, φ) una carta de M en p. L'aplicació

$$\boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}\colon \mathrm{T}_pM \to \mathbf{R}^m, \quad [\gamma]_p \mapsto \mathrm{D}(\varphi \circ \gamma)(0),$$

és bijectiva.

La seva inversa és $\mathbf{v} \mapsto [t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + t\mathbf{v})]_p$.

(2.1.6) Siguin E un conjunt, $E \xrightarrow{\theta_1} V_1$ i $E \xrightarrow{\theta_2} V_2$ dues bijeccions de E amb dos espais vectorials. Siguin E_1, E_2 les respectives estructures d'espai vectorial sobre el conjunt E transportades mitjançant les bijeccions θ_1 i θ_2. Aquestes estructures són la mateixa sii $\tau = \theta_2 \circ \theta_1^{-1}$ és una aplicació lineal.

(2.1.7) La bijecció $\boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}$ permet transportar l'estructura d'espai vectorial de $\mathbf{R}^m$ a T_pM: donats $u, v \in \mathrm{T}_pM$, $c \in \mathbf{R}$, es defineix

$$u + v = \boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}(u) + \boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}(v)), \quad c\,u = \boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}^{-1}(c\,\boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}(u)).$$

L'estructura transportada no depèn de la carta utilitzada.

(2.1.8) L'<u>espai tangent</u> a M en p és el conjunt T_pM dels vectors tangents a M en p dotat d'aquesta estructura d'espai vectorial real de dimensió m.

(2.1.9) Més generalment, es podrien definir els espais tangents en una varietat de classe C^1.

2.2 L'aplicació tangent

(2.2.1) Siguin M, N varietats, $F\colon M \to N$ una aplicació de classe C^1.
L'<u>aplicació tangent</u> de $F\colon M \to N$ en p és

$$\mathrm{T}_pF\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{F(p)}N, \quad \mathrm{T}_pF\cdot[\gamma]_p = [F \circ \gamma]_{F(p)}.$$

En altres termes, T_pF és l'aplicació obtinguda passant als quocients l'aplicació $\mathscr{C}_{M,p} \to \mathscr{C}_{N,F(p)}$, $\gamma \mapsto F \circ \gamma$.

(2.2.2) L'aplicació tangent T_pF és lineal. De fet,

$$\mathrm{T}_pF = \boldsymbol{\theta}_{\psi,F(p)}^{-1} \circ \mathrm{D}\widehat{F}(\widehat{p}) \circ \boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}.$$

(2.2.3) L'aplicació tangent satisfà les propietats següents:

- $\mathrm{T}_p(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{\mathrm{T}_pM}$.
- Siguin $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} P$ aplicacions de classe C^1, $p \in M$. Llavors
$$\mathrm{T}_p(G \circ F) = \mathrm{T}_{F(p)}G \circ \mathrm{T}_pF.$$
- Si $F\colon M \to N$ és un difeomorfisme, $\mathrm{T}_pF\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{F(p)}N$ és un isomorfisme d'espais vectorials, amb invers $\mathrm{T}_{F(p)}F^{-1}$.

(2.2.4) Sigui $U \subset M$ una subvarietat oberta, $p \in U$. La inclusió $U \overset{i}{\hookrightarrow} M$ defineix una inclusió $\mathscr{C}_{U,p} \hookrightarrow \mathscr{C}_{M,p}$ entre els respectius conjunts de camins per p, que dóna lloc a una identificació $\mathrm{T}_pi\colon \mathrm{T}_pU \xrightarrow{\cong} \mathrm{T}_pM$.

(2.2.5) Si $F\colon M \to N$ és un difeomorfisme local, llavors per a tot $p \in M$ l'aplicació $\mathrm{T}_pF\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{F(p)}N$ és un isomorfisme d'espais vectorials.

2.3 Expressions coordenades

(2.3.1) Siguin M una varietat, $p \in M$, $\varphi\colon U \to \widehat{U}$ una carta de M al voltant de p, $\widehat{p} = \varphi(p)$ les coordenades de p en la carta. Considerem l'isomorfisme $\boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}\colon \mathrm{T}_pM \to \mathbf{R}^m$ definit per la carta.

Designem per $\mathbf{e}_i$ els vectors de la base canònica de $\mathbf{R}^m$. L'isomorfisme $\boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}$ els transforma en uns vectors tangents

$$\mathrm{E}_i^{\varphi}\big|_p = \boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}^{-1}(\mathbf{e}_i) \in \mathrm{T}_pM$$

que constitueixen una base de l'espai tangent T_pM. Per definició, $\mathrm{E}_i^{\varphi}\big|_p$ és la classe de tangència $[t \mapsto \varphi^{-1}(\widehat{p}^1, \ldots, \widehat{p}^i + t, \ldots, \widehat{p}^m)]$.

S'anomenen vectors tangents coordenats associats a la carta.

(2.3.2) Sigui $u \in \mathrm{T}_pM$. En la base dels vectors tangents coordenats s'expressa $u = u^i\, \mathrm{E}_i^{\varphi}\big|_p$, o sigui, $\boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}(u) = (u^i) \in \mathbf{R}^m$. Els nombres u^i són els components del vector en el sistema de coordenades.

(2.3.3) Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació de classe C^1, $p \in M$. Siguin (U,φ) una carta de M en p i (V,ψ) una carta de N tals que $F(U) \subset V$. Llavors la matriu de $\mathrm{T}_pF\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{F(p)}N$ en les respectives bases dels vectors tangents coordenats coincideix amb la matriu jacobiana de l'expressió local $\widehat{F}$ en el punt $\widehat{p} = \varphi(p)$, $\mathrm{J}\widehat{F}(\widehat{p}) = (\mathrm{D}_i\widehat{F}^j(\widehat{p}))$:

$$\mathrm{T}_pF \cdot \mathrm{E}_i^{\varphi}\big|_p = \mathrm{D}_i\widehat{F}^j(\widehat{p})\, \mathrm{E}_j^{\psi}\Big|_{F(p)}.$$

(2.3.4) Sigui M una varietat, $p \in M$, (U,φ) i $(U,\bar{\varphi})$ dues cartes de M al voltant de p, que podem suposar amb mateix domini. Considerem les respectives bases de vectors tangents coordenats de T_pM. La matriu del canvi de base que expressa la primera en termes de la segona és la matriu jacobiana del canvi de coordenades $\Phi = \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(p)$:

$$\mathrm{E}_i^{\varphi}\big|_p = \mathrm{D}_i\Phi^j(\varphi(p))\, \mathrm{E}_j^{\bar{\varphi}}\Big|_p.$$

2.4 Derivació definida per un vector tangent

(2.4.1) Sigui M una varietat, $p \in M$, $u \in \mathrm{T}_pM$.

Sigui $f\colon V \to \mathbf{R}$ una funció de classe C^1 definida en un veïnat obert de p.

La derivada (o *derivada direccional*) de f segons el vector tangent u és

$$\mathscr{L}_u f = \mathrm{D}(f \circ \gamma)(0),$$

essent γ un camí de la classe de tangència u. Aquest nombre no depèn del representant triat, ja que, prenent una carta qualsevol de M en p,

$$\mathscr{L}_u f = \mathrm{D}\widehat{f}(\widehat{p})\cdot\boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}(u).$$

A més, només depèn del valor de f en un veïnat de p.

(2.4.2) En una base de vectors tangents coordenats s'expressa $u = u^i\, \mathrm{E}_i|_p$. Aleshores $\mathscr{L}_u f = \mathrm{D}_{\widehat{p},\mathbf{u}} \widehat{f} = \mathrm{D}_i \widehat{f}(\widehat{p})\, u^i$.

Prenent com a vector un dels de la base tenim $\mathscr{L}_{\mathrm{E}_i|_p} f = \mathrm{D}_i \widehat{f}(\widehat{p})$, i en particular la derivada de les funcions coordenades respecte als vectors tangents coordenats és $\mathscr{L}_{\mathrm{E}_i|_p} \varphi^j = \delta^j_i$.

(2.4.3) Sigui $u \in \mathrm{T}_p M$. L'operador $\mathscr{L}_u$ satisfà les propietats següents:

- $\mathscr{L}_u(f+g) = \mathscr{L}_u f + \mathscr{L}_u g$,
- $\mathscr{L}_u(\lambda f) = \lambda\, \mathscr{L}_u f$,
- $\mathscr{L}_u(fg) = \mathscr{L}_u f \cdot g(p) + f(p) \cdot \mathscr{L}_u g$.

(2.4.4) Sigui $F\colon M \to N$ de classe C^1. Si $g\colon N \to \mathbf{R}$ és una funció de classe C^1 i $u \in \mathrm{T}_p M$, llavors

$$\mathscr{L}_{\mathrm{T}_p F\cdot u}\, g = \mathscr{L}_u\, F^*(g).$$

(2.4.5) *L'espai tangent d'un espai vectorial*

Sigui V un espai vectorial real de dimensió finita, $p \in V$ un punt. Existeix un *isomorfisme canònic* entre V i el seu espai tangent en p, a saber:

$$\lambda_p\colon V \to \mathrm{T}_p V, \quad \mathbf{v} \mapsto [t \mapsto p + t\mathbf{v}].$$

La seva aplicació inversa és $[\gamma] \mapsto \mathrm{D}\gamma(0)$.

Si $\varphi\colon V \to \mathbf{R}^n$ és un isomorfisme lineal, llavors $\lambda_p = \boldsymbol{\theta}^{-1}_{\varphi,p} \circ \varphi$.

(2.4.6) Amb les mateixes hipòtesis, si $\mathbf{v} \in V$ i f és una funció de classe C^1 definida en un veïnat de p,

$$\mathscr{L}_{\lambda_p(\mathbf{v})} f = \mathrm{D}_{p,\mathbf{v}} f.$$

(2.4.7) Siguin V, W espais vectorials reals de dimensió finita, $F\colon V \to W$ una aplicació de classe C^1, $p \in V$. L'aplicació tangent $\mathrm{T}_p F\colon \mathrm{T}_p V \to \mathrm{T}_{F(p)} W$, traslladada a V i W pels isomorfismes anteriors, coincideix amb la derivada $\mathrm{D}F(p)\colon V \to W$.

(2.4.8) Apliquem les consideracions anteriors a $V = \mathbf{R}$. Donat $t_\circ \in \mathbf{R}$ hi ha l'isomorfisme canònic $\lambda_{t_\circ}\colon \mathbf{R} \to \mathrm{T}_{t_\circ}\mathbf{R}$, tal que $h \mapsto [t \mapsto t_\circ + th]$. La imatge de $1 \in \mathbf{R}$ per aquest isomorfisme és el vector tangent unitat

$$\mathrm{E}|_{t_\circ} = \lambda_{t_\circ}(1) = [t \mapsto t_\circ + t] \in \mathrm{T}_{t_\circ}\mathbf{R}.$$

(2.4.9) Si $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és de classe C^1, aleshores $\mathscr{L}_{\mathrm{E}|_{t_\circ}} f = \mathrm{D}f(t_\circ)$.

(2.4.10) Sigui $\gamma\colon J \to M$ un camí de classe C^1, $t_\circ \in J$, $p_\circ = \gamma(t_\circ)$. Considerem el camí traslladat $\tilde{\gamma}\colon J - t_\circ \to M$, definit per $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t_\circ + t)$; passa per $p_\circ$ quan $t = 0$. La velocitat o vector tangent de γ en $t_\circ$ és la classe de tangència $[\tilde{\gamma}]_{p_\circ}$. La denotem per $\gamma'(t_\circ)$ (també s'utilitza $\dot{\gamma}(t_\circ)$)).

(2.4.11) Sigui $\gamma\colon J \to M$ un camí de classe C^1. Llavors

$$\gamma'(t_\circ) = \mathrm{T}_{t_\circ}\gamma \cdot \mathrm{E}|_{t_\circ} \in \mathrm{T}_{\gamma(t_\circ)}M.$$

(2.4.12) Considerem també una funció f de classe C^1 en M. Llavors

$$\mathscr{L}_{\gamma'(t_\circ)} f = \mathrm{D}(f \circ \gamma)(t_\circ).$$

(2.4.13) Siguin $J \xrightarrow{\gamma} M \xrightarrow{F} N$ de classe C^1, $t_\circ \in J$.

$$(F \circ \gamma)'(t_\circ) = \mathrm{T}_{\gamma(t_\circ)}F \cdot \gamma'(t_\circ).$$

Siguin $I \xrightarrow{h} J \xrightarrow{\gamma} M$ de classe C^1, $s_\circ \in I$.

$$(\gamma \circ h)'(s_\circ) = \gamma'(h(s_\circ))\, \mathrm{D}h(s_\circ).$$

(2.4.14) Sigui (U, φ) una carta de M amb $\gamma(J) \subset U$, $\widehat{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ l'expressió local de γ. Llavors

$$\gamma'(t_\circ) = \mathrm{D}\widehat{\gamma}^i(t_\circ)\ \mathrm{E}_i^\varphi|_{\gamma(t_\circ)}$$

2.5 Derivacions puntuals

(2.5.1) Sigui M una varietat diferenciable, $p \in M$, i considerem l'àlgebra de les funcions diferenciables $\mathrm{C}^\infty(M)$. Anomenarem derivació puntual de $\mathrm{C}^\infty(M)$ en p una aplicació $\mathbf{R}$-lineal $\delta\colon \mathrm{C}^\infty(M) \to \mathbf{R}$ tal que

$$\delta(fg) = \delta(f)\, g(p) + f(p)\, \delta(g).$$

És a dir, és una derivació (en el sentit algebraic del terme) respecte a l'aplicació $\mathrm{av}_p\colon \mathrm{C}^\infty(M) \to \mathbf{R}$ d'avaluació en p, $f \mapsto f(p)$.

(2.5.2) Les derivacions puntuals en p constitueixen un $\mathbf{R}$-espai vectorial. Denotem-lo per $\mathcal{D}_p(M)$.

(2.5.3) Sigui M una varietat, $p \in M$, $\delta \in \mathcal{D}_p(M)$.

- Si $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ és constant, $\delta(f) = 0$.
- Si $h \in \mathrm{C}^\infty(M)$ és nul·la en un veïnat de p, llavors $\delta(h) = 0$.
- Si $f, g \in \mathrm{C}^\infty(M)$ coincideixen en un veïnat de p, $\delta(f) = \delta(g)$.

La darrera propietat es pot expressar dient que δ és un operador local.

(2.5.4) Sigui M una varietat, $U \subset M$ una subvarietat oberta, $p \in U$. Hi ha una bijecció natural $\mathcal{D}_p(U) \to \mathcal{D}_p(M)$ definida de la manera següent.
Sigui $\delta_\circ \in \mathcal{D}_p(U)$. Es defineix $\delta \in \mathcal{D}_p(M)$: si $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, $\delta(f) = \delta_\circ(f|_U)$.
Sigui $\delta \in \mathcal{D}_p(M)$. Es defineix $\delta_\circ \in \mathcal{D}_p(U)$: si $f_\circ \in \mathrm{C}^\infty(U)$, $\delta_\circ(f_\circ) = \delta(f)$, essent f qualsevol funció $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ que coincideixi amb $f_\circ$ en un veïnat de p.

(2.5.5) *Equivalència entre classes de tangència de camins i derivacions puntuals*
L'aplicació $\mathrm{T}_pM \to \mathcal{D}_p(M)$ que envia $u \mapsto \mathscr{L}_u$ és un isomorfisme d'espais vectorials.

(2.5.6) En vista d'això, es poden adoptar definicions alternatives:

- Vectors tangents a M en p: derivacions puntuals δ de $\mathrm{C}^\infty(M)$ en p.
- Espai tangent a M en p: l'espai vectorial T_pM format per les derivacions puntuals en p.
- Aplicació tangent d'una aplicació diferenciable $F\colon M \to N$ en p: $\mathrm{T}_pF\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{F(p)}N$ definida per $(\mathrm{T}_pF\cdot\delta)\cdot g = \delta\cdot F^*(g)$.
- Isomorfisme canònic $\lambda_p\colon V \to \mathrm{T}_pV$, on V espai vectorial: $\lambda_p(\mathbf{v}) = \mathrm{D}_{p,\mathbf{v}}$.
- Base dels vectors tangents coordenats associada a una carta $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$ de M en p (tal que $\varphi(p) = \widehat{p}$): $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = (\mathrm{T}_p\varphi)^{-1}(\mathrm{D}_{\widehat{p},\mathbf{e}_i})$; és a dir,
$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \mathrm{D}_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \equiv \mathrm{D}_i\widehat{f}(\widehat{p}).$$
Observi's en particular que quan $M = \mathbf{R}^m$ l'operador $\partial/\partial x^i\big|_p$ coincideix amb $\mathrm{D}_i|_p$, la qual cosa justifica la notació usada.
Més particularment, el vector tangent unitat de $\mathbf{R}$ en $t_\circ$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_\circ}$, és la derivada ordinària de funcions d'una variable.
- Velocitat o vector tangent d'un camí diferenciable $\gamma\colon I \to M$ a l'instant $t_\circ$: $\gamma'(t_\circ) = \mathrm{T}_{t_\circ}\gamma\cdot\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_\circ}$; actuant sobre una funció $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ es pot escriure $\gamma'(t_\circ)\cdot f = \mathrm{D}(f \circ \gamma)(t_\circ)$.

(2.5.7) Observem que en aquestes definicions cal que totes les aplicacions considerades siguin de classe C^∞. La consideració de graus de diferenciabilitat finits comporta complicacions addicionals.

(2.5.8) Considerem una carta φ de M en p, on representem les funcions coordenades com $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$. Atesa la identificació dels vectors tangents com a derivacions puntuals, a partir d'ara escriurem els vectors tangents coordenats amb la notació

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \equiv \mathrm{E}_i^\varphi|_p,$$

ambigua i equívoca, però habitual i pràctica.

Així, la derivada d'una funció f segons un vector $u = u^i\, \partial/\partial x^i\big|_p$, l'escriurem simplement com

$$\mathscr{L}_u f \equiv u \cdot f \equiv u^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f \equiv u^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p = u^i\, \mathrm{D}_i \widehat{f}(\widehat{p}).$$

Notem, en particular, $\left.\dfrac{\partial x^j}{\partial x^i}\right|_p = \delta^j_i$.

L'aplicació tangent de $F\colon M \to N$ en p, escrivint les respectives bases de vectors tangents coordenats com $\partial/\partial x^i\big|_p$ i $\partial/\partial y^j\big|_{F(p)}$, s'expressa

$$\mathrm{T}_p F \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \mathrm{D}_i \widehat{F}^j(\widehat{p}) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)} = \left.\frac{\partial (y^j \circ F)}{\partial x^i}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)}.$$

Si considerem dos sistemes de coordenades φ i $\bar{\varphi}$ en M, i denotem les respectives bases de vectors tangents coordenats de $\mathrm{T}_p M$ per $(\partial/\partial x^i\big|_p)$ i $(\partial/\partial \bar{x}^j\big|_p)$, llavors el canvi de base s'expressa

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right|_p.$$

Amb la mateixa notació, considerem un vector expressat en les dues bases, $u = u^i\, \partial/\partial x^i\big|_p = \bar{u}^j\, \partial/\partial \bar{x}^j\big|_p$. La relació entre els components en ambdues bases és

$$\bar{u}^j = \left.\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right|_p u^i.$$

Finalment, la velocitat d'un camí es calcula $\gamma'(t_\circ) = \mathrm{D}\widehat{\gamma}^i(t_\circ) \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t_\circ)}$.

2.6 Espai cotangent i diferencial d'una funció en un punt

(2.6.1) Sigui M una varietat, $p \in M$. L'espai cotangent a M en p és el dual de l'espai tangent T_pM, i es denota per $\mathrm{T}_p^*M \equiv \mathscr{L}in(\mathrm{T}_pM, \mathbf{R})$.
Els seus elements s'anomenen vectors cotangents (o covectors tangents).
Si $\alpha_p \in \mathrm{T}_p^*M$ i $u_p \in \mathrm{T}_pM$, usarem les notacions $\alpha_p \cdot u_p \equiv \langle \alpha_p, u_p \rangle \equiv \alpha_p(u_p)$.

(2.6.2) Sigui $f \colon M \to \mathbf{R}$ una funció de classe C^1. A partir de l'isomorfisme canònic $\lambda_z \colon \mathbf{R} \to \mathrm{T}_z\mathbf{R}$ es defineix un vector cotangent $\mathrm{d}_pf \equiv \mathrm{d}f|_p \in \mathrm{T}_p^*M$ anomenat diferencial de f en p:

$$\mathrm{d}_pf := \lambda_{f(p)}^{-1} \circ \mathrm{T}_pf : \mathrm{T}_pM \to \mathbf{R}.$$

(2.6.3) Si $\gamma \colon I \to M$ és un camí de classe C^1, $\langle \mathrm{d}_{\gamma(t)}f, \gamma'(t) \rangle = \mathrm{D}(f \circ \gamma)(t)$.

(2.6.4) Si $f \colon M \to \mathbf{R}$ és de classe C^1 i $u_p \in \mathrm{T}_pM$,

$$\langle \mathrm{d}_pf, u_p \rangle = \mathscr{L}_{u_p} f.$$

Aquesta propietat es pot usar com a definició alternativa de d_pf.

(2.6.5) Siguin $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{g} \mathbf{R}$ de classe C^1, $p \in M$.

$$\mathrm{d}_p(g \circ F) = {}^t\mathrm{T}_pF \cdot \mathrm{d}_{F(p)}g.$$

Siguin $M \xrightarrow{f} \mathbf{R} \xrightarrow{h} \mathbf{R}$ de classe C^1, $p \in M$.

$$\mathrm{d}_p(h \circ f) = \mathrm{D}h(f(p))\, \mathrm{d}_pf.$$

(2.6.6) Sigui (U, φ) una carta de M en p. Denotem les funcions coordenades per $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$. Els covectors d_px^j constitueixen una base de T_p^*M, i és la base dual dels vectors $\partial/\partial x^i|_p$:

$$\left\langle \mathrm{d}_px^j, \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\rangle = \delta^j_{\ i}.$$

(d_px^j) és la base de vectors cotangents associada a la carta.

(2.6.7) Respecte a aquesta base tenim

$$\mathrm{d}_pf = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \mathrm{d}_px^i.$$

(2.6.8) Considerem una altra carta (U, ψ) en p, amb funcions coordenades $\psi = (y^1, \ldots, y^m)$. Llavors

$$\mathrm{d}_py^j = \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_p \mathrm{d}_px^i.$$

(2.6.9) La construcció de la diferencial val, més generalment, per a funcions amb valors vectorials (en $\mathbf{R}^n$, o en un espai vectorial real de dimensió finita E). Si $f\colon M \to E$, llavors $\mathrm{d}_p f = \lambda_{f(p)}^{-1} \circ \mathrm{T}_p f\colon \mathrm{T}_p M \to E$.

(2.6.10) En particular, considerem una carta $\varphi\colon U \to \widehat{U}$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$. Llavors

$$\mathrm{d}_p\varphi\colon \mathrm{T}_p M \to \mathbf{R}^m$$

és un isomorfisme que aplica $\partial/\partial x^i|_p$ en $\mathbf{e}_i$, per tant

$$\mathrm{d}_p\varphi = \boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}.$$

A més, $\mathrm{d}_p\varphi = (\mathrm{d}_p x^1, \ldots, \mathrm{d}_p x^m)$.

Per transposició també tenim un isomorfisme

$${}^t(\mathrm{d}_p\varphi)^{-1}\colon \mathrm{T}_p^* M \to (\mathbf{R}^m)^*$$

que aplica $\mathrm{d}_p x^i$ en $\mathbf{e}^i$, essent $(\mathbf{e}^i)$ la base dual de la base canònica $(\mathbf{e}_i)$ de $\mathbf{R}^m$.

Resum de les diferents construccions alternatives de l'espai tangent

- *Geomètrica*
  $\mathrm{T}_p M = \mathscr{C}_{M,p}/\sim$
  $\mathscr{C}_{M,p}$ conjunt dels camins C^1 en M per p
  $\gamma \sim \delta$ relació de tangència
- *Diferencial*
  $\mathrm{T}_p M = \mathscr{D}_{M,p}$
  $\mathscr{D}_{M,p}$ conjunt de les derivacions puntuals de $\mathrm{C}^\infty(M)$ en p
- *Coordenada*
  $\mathrm{T}_p M = \mathscr{V}_{M,p}/\sim$
  $\mathscr{V}_{M,p}$ conjunt dels $(\varphi, \mathbf{u})$ on φ és una carta centrada en p i $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$
  $(\varphi, \mathbf{u}) \sim (\psi, \mathbf{v})$ quan $\mathrm{D}(\psi \circ \varphi^{-1})(0) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}$
- *Algebraica*
  $\mathrm{T}_p M = (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$
  $\mathfrak{m}_p$ ideal de les funcions $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ tals que $f(p) = 0$

En les definicions segona i quarta es poden substituir les funcions definides globalment ($\mathrm{C}^\infty(M)$) per funcions definides en un veïnat de p, identificant dues funcions que coincideixin en un veïnat (possiblement més petit) del punt —això és, gèrmens de funcions en p ($\mathscr{F}_p(M)$):

- $\mathrm{T}_p M = \mathscr{D}_{M,p}$
  $\mathscr{D}_{M,p}$ conjunt de les derivacions de l'àlgebra $\mathscr{F}_p(M)$
- $\mathrm{T}_p M = (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$
  $\mathfrak{m}_p \subset \mathscr{F}_p(M)$ ideal dels gèrmens de funcions que s'anul·len en p

Aquestes definicions *no* són totes equivalents quan es consideren varietats de classe C^r amb $r \neq \infty$.

3 Subvarietats i aplicacions

3.1 Subvarietats regulars

(3.1.1) Sigui M una varietat diferenciable de dimensió m. Un subconjunt $N \subset M$ es diu subvarietat regular (o simplement subvarietat) de dimensió n (essent $n \leq m$) si compleix la propietat següent: per a tot $p \in N$ existeix una carta (U, φ) de M en p tal que, identificant $\mathbf{R}^n \times \{0\} \subset \mathbf{R}^m$,

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbf{R}^n \times \{0\}).$$

Es diu que (U, φ) és una carta adaptada a la subvarietat.

El nombre $m - n$ s'anomena codimensió de N dins M.

(3.1.2) Sigui $N \subset M$ una subvarietat regular. Les restriccions $(U \cap N, \varphi|_{U \cap N})$ de les cartes adaptades constitueixen un atles de N, amb el qual és una varietat diferenciable.

Si M té base numerable d'oberts, o és paracompacta, N també.

(3.1.3) Més generalment, es podrien considerar subvarietats de classe C^s d'una varietat de classe C^r, amb $s \leq r$.

(3.1.4) Els subespais discrets de M són les subvarietats de dimensió 0. Els subespais oberts de M són les subvarietats de dimensió m. Una subvarietat $N \subset M$ de codimensió 1 es diu hipersuperfície.

(3.1.5) Siguin M una varietat, $N \subset M$ un subconjunt.

Si N és una subvarietat regular i $V \subset M$ és un conjunt obert, llavors $V \cap N \subset V$ és una subvarietat regular.

Recíprocament, suposem que per a tot conjunt V d'un recobriment obert de M es té que $V \cap N \subset V$ és una subvarietat regular. Llavors $N \subset M$ és una subvarietat regular.

És a dir, «ser una subvarietat» és una propietat local.

(3.1.6) Si $F\colon M \to M'$ és un difeomorfisme i $N \subset M$ és una subvarietat regular llavors $F(N) \subset M'$ és una subvarietat regular.

(3.1.7) Si $P \subset N$ i $N \subset M$ són subvarietats regulars, llavors $P \subset M$ és una subvarietat regular.

3.2 Restricció i extensió d'aplicacions

(3.2.1) Sigui $M_\circ \subset M$ una subvarietat regular. La inclusió $j\colon M_\circ \hookrightarrow M$ és diferenciable.

(3.2.2) Sigui $M_\circ \subset M$ una subvarietat regular. Si $F\colon M \to N$ és diferenciable [de classe C^k] llavors la restricció $F|_{M_\circ}\colon M_\circ \to N$ també ho és.

(3.2.3) Siguin $N_\circ \subset N$ una subvarietat regular, $F\colon M \to N$ una aplicació tal que $F(M) \subset N_\circ$. Si F és diferenciable [de classe C^k] llavors l'aplicació induïda $F_\circ\colon M \to N_\circ$ també ho és.

(3.2.4) Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació diferenciable [de classe C^k]. Siguin $M_\circ \subset M$, $N_\circ \subset N$ subvarietats regulars tals que $F(M_\circ) \subset N_\circ$. Llavors l'aplicació induïda $F_\circ\colon M_\circ \to N_\circ$ és diferenciable [de classe C^k].

(3.2.5) Sigui $N \subset M$ una subvarietat regular. Sigui $G\colon N \to P$ una aplicació diferenciable [de classe C^k]. Per a tot $p \in N$ existeix un conjunt obert $U \subset M$ contenint p i una aplicació diferenciable [de classe C^k] $F\colon U \to P$ tals que $F|_{U\cap N} = G|_{U\cap N}$.

(3.2.6) *Teorema d'extensió de funcions*

Siguin M una varietat diferenciable amb base numerable d'oberts (o, més generalment, paracompacta), i $N \subset M$ una subvarietat regular *tancada.* Tota funció diferenciable [de classe C^k] $g\colon N \to \mathbf{R}$ té una extensió diferenciable [de classe C^k] $f\colon M \to \mathbf{R}$.

Dit altrament, si $N \subset M$ és una subvarietat tancada llavors el morfisme de restricció $\mathrm{C}^\infty(M) \to \mathrm{C}^\infty(N)$, $f \mapsto f|_N$, és suprajectiu.

3.3 Rang d'una aplicació i teorema de la funció inversa

(3.3.1) Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació de classe C^1. Si $p \in M$, el <u>rang</u> de F en p és el rang de l'aplicació tangent $\mathrm{T}_pF\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{F(p)}N$. Per tant, és la dimensió de $\mathrm{Im}\,\mathrm{T}_pF$, i coincideix amb el rang de la matriu jacobiana $\mathrm{J}\widehat{F}(\widehat{p})$ d'una expressió local de F en unes cartes qualssevol.

Es diu que F té <u>rang constant</u> si aquest rang és el mateix en tot punt.

(3.3.2) F es diu <u>submersió</u> en p si T_pF és suprajectiva.

F es diu <u>immersió</u> en p si T_pF és injectiva.

F es diu submersió o immersió si ho és en tot punt.

Quan parlem d'immersions o submersions sense especificar el seu grau de diferenciabilitat sobreentendrem que són de classe C^∞.

(3.3.3) Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació de classe C^1. F és localment constant sii $T_pF = 0$ en tot $p \in M$ (és a dir, sii F té rang 0).

Per a una funció $F\colon M \to \mathbf{R}$, F és localment constant sii $d_pF = 0$ en tot p.

(3.3.4) *Teorema de la funció inversa*

Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació diferenciable [de classe C^k, $k \geq 1$]. Donat $p \in M$, les dues afirmacions següents són equivalents:

i) $T_pF\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ és un isomorfisme d'espais vectorials.

ii) Existeix un veïnat obert $U_\circ \ni p$ tal que $F(U_\circ) \subset N$ és obert i l'aplicació restringida $F|_{U_\circ}\colon U_\circ \to F(U_\circ)$ és un difeomorfisme [un difeomorfisme de classe C^k].

(3.3.5) Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació diferenciable. Les afirmacions següents són equivalents:

i) Per a tot $p \in M$, T_pF és un isomorfisme lineal.

ii) F és un difeomorfisme local.

Per tant F és un difeomorfisme local sii és alhora una immersió i una submersió.

(3.3.6) Siguin $F\colon M \to \mathbf{R}^m$ una aplicació diferenciable, $p \in M$. Si d_pF és un isomorfisme, existeix un conjunt obert $U \ni p$ tal que $F|_U\colon U \to F(U)$ és una carta de M.

(3.3.7) Si $F\colon M \to N$ és un difeomorfisme local injectiu llavors l'aplicació induïda $F_\circ\colon M \to F(M)$ és un difeomorfisme.

3.4 Estudi local de les immersions

(3.4.1) *L'espai tangent d'una subvarietat*

Sigui $N' \subset N$ una subvarietat regular, amb inclusió $j\colon N' \hookrightarrow N$. Si $q \in N'$, l'aplicació tangent T_qj és injectiva i permet identificar $T_qN' \subset T_qN$ com un subespai vectorial.

Un vector $v_q \in T_qN$ es diu <u>tangent</u> a N' quan $v_q \in T_qN'$.

(3.4.2) Si una aplicació diferenciable $F\colon M \to N$ pren valors dins la subvarietat N', llavors l'aplicació tangent $T_pF\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ pren valors dins el subespai $T_{F(p)}N'$.

(3.4.3) *Expressió local de les immersions*
Siguin $F\colon M \to N$ una aplicació diferenciable, $p \in M$. Suposem que F és una immersió en p, i sigui (U, φ) una carta de M en p. Llavors existeix una carta (V, ψ) de N en $F(p)$ tal que l'expressió local de F en aquestes cartes, restringint si cal el domini de la primera, és

$$\widehat{F}(x^1, \dots x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0).$$

(3.4.4) Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació diferenciable. Si F és una immersió en $p \in M$, llavors existeix un conjunt obert $U \ni p$ tal que $F(U) \subset N$ és una subvarietat regular de dimensió m, i l'aplicació induïda $F_\circ\colon U \to F(U)$ és un difeomorfisme. A més,

$$\mathrm{T}_{F(p)}\, F(U) = \mathrm{Im}\, \mathrm{T}_p F.$$

(3.4.5) Encara que $F\colon M \to N$ sigui una immersió injectiva, en general no és cert que globalment $F(M) \subset N$ sigui una subvarietat regular.

3.5 Estudi local de les submersions

(3.5.1) *Expressió local de les submersions*
Siguin $F\colon M \to N$ una aplicació diferenciable, $p \in M$. Suposem que F és una submersió en p, i sigui (V, ψ) una carta de N en $F(p)$. Llavors existeix una carta (U, φ) de M en p tal que l'expressió local de F en aquestes cartes és

$$\widehat{F}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n).$$

(3.5.2) L'expressió anterior significa que $\varphi^j = F^*(\psi^j)$ per a $1 \le j \le n$. Es diu que les φ^i són *coordenades adaptades* a F.

(3.5.3) Les submersions són aplicacions obertes.

(3.5.4) Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació de classe C^1.
Un punt $p \in M$ es diu punt regular de F si $\mathrm{T}_p F$ és suprajectiva (és a dir, si F és una submersió en p); en cas contrari es diu punt crític.
Un punt $q \in N$ es diu valor crític de F si és la imatge d'un punt crític; en cas contrari es diu valor regular (és a dir, si $F^{-1}(q)$ no conté punts crítics).
Per a una funció $F\colon M \to \mathbf{R}$, p és un punt crític sii $\mathrm{d}_p F = 0$.

(3.5.5) *Teorema del valor regular*
Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació diferenciable, $q \in N$ un valor regular. Si

no és buida, la fibra $F^{-1}(q) \subset M$ és una subvarietat regular de dimensió $m - n$. A més, si $p \in F^{-1}(q)$,

$$\mathrm{T}_p\, F^{-1}(q) = \mathrm{Ker}\, \mathrm{T}_p F.$$

(3.5.6) Les fibres $F^{-1}(q)$ d'una submersió $F\colon M \to N$ són subvarietats regulars.

(3.5.7) Siguin M una varietat, $\mathbf{f}\colon M \to \mathbf{R}^n$ una funció diferenciable, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$. Se suposa que les diferencials $\mathrm{d}_p f^j$ de les components són linealment independents en tot $p \in \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{c})$. Llavors el conjunt $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{c}) \subset M$ és una subvarietat regular, i el seu espai tangent en p és l'anul·lador d'aquelles diferencials,

$$\mathrm{T}_p\, \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{c}) = \langle \mathrm{d}_p f^1, \ldots, \mathrm{d}_p f^n \rangle^{\vdash}.$$

Un vector $v \in \mathrm{T}_p M$ és tangent a $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{c})$ en p sii $\mathscr{L}_v f^i = 0$.

En aquestes condicions, a vegades es diu que les funcions f^j són un *sistema de lligams* que defineix la subvarietat.

Tota subvarietat regular es pot definir així localment (per exemple a partir de les funcions coordenades d'una carta adaptada).

(3.5.8) Més generalment, l'antiimatge d'una subvarietat per una submersió és una subvarietat.

(3.5.9) *Teorema del rang constant*

Siguin $F\colon M \to N$ una aplicació diferenciable, $p \in M$. Suposem que F té rang constant r en un veïnat de p. Aleshores existeixen cartes (U, φ) de M en p i (V, ψ) de N en $F(p)$ tals que l'expressió local corresponent de F és

$$\widehat{F}(x^1, \ldots x^r, x^{r+1}, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0)\,.$$

(3.5.10) De l'anterior es dedueix que l'antiimatge d'un punt per una aplicació diferenciable de rang constant és una subvarietat.

3.6 Subvarietats immerses i immersions difeomorfes

(3.6.1) Siguin M, N varietats, $F\colon M \to N$ una immersió injectiva, que per tant defineix una bijecció $F_\circ\colon M \to F(M)$. Aquesta permet transportar la topologia i l'estructura diferenciable de M a $F(M)$. Amb aquestes estructures, $F(M)$ es diu subvarietat immersa.

(3.6.2) En general, la topologia de $F(M)$ transportada per F és més fina que la topologia habitual de $F(M)$ induïda com a subespai de N.

Una immersió injectiva $F\colon M \to N$ es diu immersió difeomorfa o embedding[3] si ambdues topologies coincideixen, és a dir, si $F_\circ\colon M \to F(M)$ és un homeomorfisme.

(3.6.3) Si $M \subset N$ és una subvarietat regular, la inclusió $j\colon M \hookrightarrow N$ és una immersió difeomorfa.

Si $F\colon M \to N$ és una immersió, localment és una immersió difeomorfa.

(3.6.4) Si $F\colon M \to N$ és una immersió difeomorfa, llavors $F(M) \subset N$ és una subvarietat regular, i l'aplicació induïda $F_\circ\colon M \to F(M)$ és un difeomorfisme.

(3.6.5) Si $F\colon M \to N$ és una immersió injectiva i M és compacta, llavors és una immersió difeomorfa.

(3.6.6) Sigui $F\colon M \to N$ una immersió injectiva. Se suposa que hi ha una subvarietat regular $N' \subset N$ tal que $\dim M = \dim N'$ i $F(M) \subset N'$. Aleshores F és una immersió difeomorfa.

(3.6.7) Sigui $g\colon \widehat{U} \to N$ una immersió injectiva definida en un conjunt obert $\widehat{U} \subset \mathbf{R}^m$. Se suposa que hi ha una subvarietat regular $N' \subset N$ de dimensió m tal que $g(\widehat{U}) \subset N'$. Aleshores la bijecció $g\colon \widehat{U} \to g(\widehat{U})$ és l'aplicació inversa d'una carta de N'. (Es diu també que g és una *parametrització regular* de N'.)

(3.6.8) *Teorema d'embedding de Whitney*

Sigui M una varietat de dimensió n amb base numerable d'oberts. Existeix una immersió difeomorfa tancada $M \hookrightarrow \mathbf{R}^{2n+1}$.

3.7 Varietats quocient

(3.7.1) Sigui M una varietat. Una relació d'equivalència R en M es diu regular si l'espai quocient té una estructura de varietat diferenciable (no necessàriament separada) per a la qual la projecció canònica $\pi\colon M \to M/R$ és una submersió.

En tal cas, M/R es diu la varietat quocient de M per R.

(3.7.2) Si $f\colon M \to P$ és diferenciable i compatible amb R, aleshores existeix una única aplicació diferenciable $\hat{f}\colon M/R \to P$ tal que $f = \hat{f} \circ \pi$.

(3.7.3) L'estructura de varietat quocient, si existeix, és única.

[3] Cal una versió catalana d'aquest terme anglès. En francès s'usa molt apropiadament la paraula *plongement*, la qual cosa podria suggerir usar *capbussament*. En castellà es pot trobar *embebimiento*, *encaje*, *incrustación*, *inserción*, *zambullida*…

(3.7.4) Siguin $f\colon M \to N$ diferenciable, R i S relacions d'equivalència regulars en M i N, respectivament. Aleshores f passa als quocients com una aplicació diferenciable $\hat{f}\colon M/R \to N/S$.

(3.7.5) Com que una relació d'equivalència regular és oberta, l'espai quocient és separat sii el seu graf $\Gamma \subset M \times M$ és tancat. Si M té base numerable d'oberts, M/R també.

(3.7.6) Sigui $f\colon M \to N$ una submersió. La relació d'equivalència R_f induïda per f és regular, i M/R_f és difeomorfa a $f(M)$.

(3.7.7) *Teorema de Godement*

Una relació d'equivalència R en M és regular sii

i) el seu graf $\Gamma \subset M \times M$ és una subvarietat regular, i

ii) la projecció $p_1\colon \Gamma \to M$, $p_1(x, y) = x$, és una submersió.

4 Els fibrats tangent i cotangent

4.1 El fibrat tangent

(4.1.1) *Lema de construcció de varietats*

Sigui N un conjunt, $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recobriment de N, $\psi_\alpha \colon V_\alpha \to \mathbf{R}^n$ aplicacions injectives tals que:

i) Per a tot $\alpha \in A$, $\psi_\alpha(V_\alpha) \subset \mathbf{R}^n$ és obert.

ii) Per a tot $\alpha, \beta \in A$, $\psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \subset \mathbf{R}^n$ és obert.

iii) Si $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \colon \psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \to \psi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$ és un difeomorfisme [de classe C^k].

Llavors N té una única estructura diferenciable [de classe C^k] amb la qual els parells (V_α, ψ_α) són cartes.

Suposem que

iv) Si $p, q \in N$, $p \neq q$, llavors, o bé existeix un V_α tal que $p, q \in V_\alpha$, o bé existeixen conjunts disjunts V_α, V_β tals que $p \in V_\alpha$, $q \in V_\beta$.

Llavors N és separat.

Suposem també que

v) Un subconjunt numerable dels V_α recobreix N.

Llavors N té base numerable d'oberts.

(4.1.2) Sigui M una varietat diferenciable. El fibrat tangent de M és la unió disjunta dels espais tangents

$$\mathrm{T}M = \coprod_{p\in M} \mathrm{T}_p M.$$

Denotem els seus elements per (p, u), u_p, u, ...

La projecció canònica de $\mathrm{T}M$ és l'aplicació $\tau_M \colon \mathrm{T}M \to M$ definida per $\tau_M(u_p) = p$. Les seves fibres són els espais tangents, $\tau_M^{-1}(p) = \mathrm{T}_p M$.

(4.1.3) Sigui M una varietat diferenciable de dimensió m. El fibrat tangent $\mathrm{T}M$ té una única estructura diferenciable de dimensió $2m$ caracteritzada per la propietat següent: si (U, φ) és una carta de M, llavors l'aplicació $\Phi \colon \tau_M^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbf{R}^m$ definida per

$$\Phi(u_p) = (\varphi(p), \mathrm{d}_p\varphi \cdot u_p)$$

és una carta de $\mathrm{T}M$.

Aquesta aplicació també es pot expressar

$$\Phi(u^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p) = (\varphi(p); u^1, \ldots, u^m)\,.$$

Amb aquesta estructura, $\mathrm{T}M$ és una varietat diferenciable. Si M té base numerable d'oberts, o és paracompacta, $\mathrm{T}M$ també.

(4.1.4) Si (V, ψ) és una altra carta de M, i denotem per $\Psi\colon \tau_M^{-1}(V) \to \psi(V) \times \mathbf{R}^m$ la carta de $\mathrm{T}M$ definida anàlogament, llavors el canvi de coordenades és

$$(\Psi \circ \Phi^{-1})(x, \mathbf{u}) = ((\psi \circ \varphi^{-1})(x), \mathrm{D}(\psi \circ \varphi^{-1})(x)\cdot\mathbf{u}).$$

Expressant de manera més informal el canvi entre les dues cartes de M com $x \mapsto y(x)$, el canvi entre les cartes corresponents de $\mathrm{T}M$ s'expressa

$$(x^i, u^i) \mapsto \left(y^j(x), \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x)\, u^i\right).$$

(4.1.5) La carta, i les coordenades, de $\mathrm{T}M$ construïdes d'aquesta manera a partir de les de M, es diuen naturals.

Quan parlem del fibrat tangent sobreentendrem que està dotat de l'estructura diferenciable anterior.

(4.1.6) La projecció canònica $\tau_M\colon \mathrm{T}M \to M$ és diferenciable, i és una submersió suprajectiva.

(4.1.7) Si $U \subset \mathbf{R}^m$ és un conjunt obert, tenim una identificació canònica $\mathrm{T}U \cong U \times \mathbf{R}^m$.

(4.1.8) Més generalment, si M és una varietat de classe C^r $(r \geq 1)$, també es pot construir el fibrat tangent $\mathrm{T}M$, i és una varietat de classe C^{r-1}.

4.2 L'aplicació tangent

(4.2.1) Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació de classe C^1. L'aplicació tangent $\mathrm{T}_pF\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{F(p)}N$ en cada punt indueix globalment l'aplicació tangent de F,

$$\mathrm{T}F\colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}N, \quad u_p \mapsto \mathrm{T}_pF\cdot u_p.$$

(4.2.2) Si l'expressió local de F en unes cartes de M i N és $\widehat{F}$, l'expressió local de $\mathrm{T}F$ en les cartes naturals corresponents de $\mathrm{T}M$ i $\mathrm{T}N$ és

$$\widehat{\mathrm{T}F}(x, \mathbf{u}) = (\widehat{F}(x), \mathrm{D}\widehat{F}(x)\cdot\mathbf{u}).$$

(4.2.3) Si F és diferenciable [de classe C^k] aleshores $\mathrm{T}F$ és diferenciable [de classe C^{k-1}].

(4.2.4) L'aplicació tangent satisfà les propietats següents:

- $\mathrm{T}(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{\mathrm{T}M}$.
- Si $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} P$ són aplicacions de classe C^1, llavors
$$\mathrm{T}(G \circ F) = \mathrm{T}G \circ \mathrm{T}F.$$
- Si $F\colon M \to N$ és un difeomorfisme, $\mathrm{T}F\colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}N$ és un difeomorfisme, i
$$\mathrm{T}(F^{-1}) = (\mathrm{T}F)^{-1}.$$

(4.2.5) Sigui $V \subset M$ una subvarietat oberta, $i\colon V \to M$ la inclusió. Llavors $\mathrm{T}i$ identifica $\mathrm{T}V$ amb la subvarietat oberta $\tau_M^{-1}(V) \subset \mathrm{T}M$.

(4.2.6) Sigui (U, φ) una carta de M. Amb la identificació anterior, la carta natural $\Phi\colon \tau_M^{-1}(U) \to \widehat{U} \times \mathbf{R}^m$ s'identifica amb l'aplicació tangent $\mathrm{T}\varphi\colon \mathrm{T}U \to \mathrm{T}\widehat{U}$.

(4.2.7) Si $F\colon M \to N$ és un difeomorfisme local, $\mathrm{T}F\colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}N$ és un difeomorfisme local.

4.3 Camps vectorials

(4.3.1) Sigui M una varietat. Un camp vectorial (o camp de vectors tangents) en M és una secció del fibrat tangent $\tau_M\colon \mathrm{T}M \to M$, és a dir, una aplicació $X\colon M \to \mathrm{T}M$ tal que $\tau_M \circ X = \mathrm{Id}_M$. Per tant, en cada $p \in M$ tenim un vector $X(p) \equiv X_p \in \mathrm{T}_p M$.

(4.3.2) Sigui (U, φ) una carta de M. Es pot escriure
$$X(p) = X^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,$$
on les funcions $X^i\colon U \to \mathbf{R}$ són les components de X en la carta.

L'expressió local de X respecte a la carta de M i a la carta natural corresponent de $\mathrm{T}M$ és $\widehat{X}(x) = (x^i; \widehat{X}^i(x))$.

(4.3.3) Un camp vectorial és de classe C^k sii ho són les seves components en una carta.

(4.3.4) En particular, els camps vectorials coordenats definits per una carta (U, φ) són els camps vectorials $\partial/\partial x^i$ en U tals que apliquen $p \mapsto \partial/\partial x^i\big|_p$. Són diferenciables.

(4.3.5) Si $V \subset M$ és una subvarietat oberta i X és un camp vectorial en M, podem considerar la restricció $X|_V$ com un camp vectorial en V.

(4.3.6) Les operacions de l'espai vectorial T_pM, fetes en cada $p \in M$, permeten definir la suma $X+Y$ de dos camps vectorials X, Y en M com el camp vectorial definit per $(X+Y)(p) = X(p)+Y(p)$. Anàlogament, el producte fX d'una funció f per X és el camp vectorial definit per $(fX)(p) = f(p)X(p)$. Aquestes operacions entre aplicacions de classe C^k donen resultats de classe C^k.

(4.3.7) Denotem per $\mathfrak{X}(M)$, o $\mathcal{T}^1(M)$, el conjunt de camps vectorials diferenciables en M. És un $\mathbf{R}$-espai vectorial, i també un $\mathrm{C}^\infty(M)$-mòdul.

(4.3.8) Si (U, φ) és una carta, $\mathfrak{X}(U)$ és un $\mathrm{C}^\infty(U)$-mòdul lliure, amb base els $\partial/\partial x^i$. Qualsevol camp vectorial s'expressa de manera única $X|_U = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$.
Donada una altra carta (U, ψ), amb camps vectorials coordenats $\partial/\partial y^j$, les bases respectives estan relacionades per

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j},$$

on $\dfrac{\partial y^j}{\partial x^i}$ és la funció que val $\left.\dfrac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_p$ en el punt p (matriu jacobiana del canvi de variables).

(4.3.9) Així, $\mathfrak{X}(\mathbf{R}^m)$ és un $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^m)$-mòdul lliure amb base els camps vectorials coordenats $\partial/\partial t^i$ definits per la seva carta canònica. Un camp vectorial $v^i\, \partial/\partial t^i$ en $\mathbf{R}^m$ s'identifica amb la funció vectorial donada per les seves components, $\mathbf{v} = (v^1, \ldots, v^n)$.
En particular, el <u>camp vectorial unitat</u> de $\mathbf{R}$, que podem representar per $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$, constitueix una base global dels camps vectorials en $\mathbf{R}$. Un camp vectorial en $\mathbf{R}$ s'identifica a una funció.
Les mateixes afirmacions valen per als subconjunts oberts de $\mathbf{R}^m$, o de $\mathbf{R}$.

(4.3.10) Una varietat es diu <u>paral·lelitzable</u> si el seu fibrat tangent és <u>trivialitzable</u>, és a dir, si existeixen m camps vectorials diferenciables $E_1, \ldots, E_m$ linealment independents en cada punt de M; o, el que és el mateix, tals que tot camp vectorial X en M s'escriu de manera única $X = f^i E_i$, on f^i són funcions. Això també significa que $\mathfrak{X}(M)$ és un $\mathrm{C}^\infty(M)$-mòdul lliure, i que $\mathrm{T}M$ és isomorf a $M \times \mathbf{R}^m$.
Els conjunts oberts de $\mathbf{R}^m$ i els grups de Lie són paral·lelitzables.

(4.3.11) Sigui M una varietat, $A \subset V \subset M$ subconjunts tals que A és compacte i V obert. Sigui $Y \in \mathfrak{X}(V)$. Existeix un camp vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, amb

$\mathrm{Supp}(X) \subset V$, tal que $X|_A = Y|_A$.

(4.3.12) Sigui M una varietat, $p \in M$, $v_p \in \mathrm{T}_p M$. Existeix un camp vectorial diferenciable X en M tal que $X(p) = v_p$.

És a dir, l'aplicació $\mathbf{R}$-lineal $\mathfrak{X}(M) \to \mathrm{T}_p M$ tal que $X \mapsto X(p)$ és suprajectiva.

(4.3.13) *El fibrat tangent d'un espai vectorial*

Sigui V un espai vectorial real de dimensió finita. Els isomorfismes canònics $\lambda_p \colon V \to \mathrm{T}_p V$ entre V i els espais tangents de V permeten construir un isomorfisme

$$\lambda \colon V \times V \to \mathrm{T}V\,, \quad \lambda(p, \mathbf{v}) = \lambda_p(\mathbf{v}) = [\, t \mapsto p + t\mathbf{v} \,] = \mathrm{D}_{p,\mathbf{v}}\,.$$

A través d'aquest isomorfisme, un camp vectorial X en V s'identifica amb una aplicació de la forma $X(p) = (p, \mathbf{f}(p))$, i doncs a una funció vectorial $\mathbf{f} \colon V \to V$. Així, $\mathfrak{X}(V) \cong \mathrm{C}^\infty(V, V)$.

Anàlogament, si $F \colon V \to W$ és una aplicació de classe C^1 entre espais vectorials, l'isomorfisme anterior identifica $\mathrm{T}F$ amb l'aplicació $\mathrm{T}F \colon V \times V \to W \times W$ definida per $(p, \mathbf{u}) \mapsto (F(p), \mathrm{D}F(p) \cdot \mathbf{u})$.

(4.3.14) *El fibrat tangent d'una subvarietat*

Siguin M una varietat i $j \colon N \hookrightarrow M$ una subvarietat. Llavors l'aplicació tangent de la inclusió, $\mathrm{T}j \colon \mathrm{T}N \hookrightarrow \mathrm{T}M$, identifica $\mathrm{T}N$ com una subvarietat de $\mathrm{T}M$.

Un camp vectorial X en M es diu tangent a N quan, per a tot punt $p \in N$, el vector X_p és tangent a N. Si N està definida localment per l'anul·lació d'un sistema de lligams $f^1, \ldots, f^r$ amb diferencials linealment independents, això equival a afirmar que $\mathscr{L}_X f^1, \ldots, \mathscr{L}_X f^r$ s'anul·len sobre N.

Quan X és tangent a N, la seva restricció, considerada com a aplicació $X_\circ \colon N \to \mathrm{T}N$, és un camp vectorial en N. Per definició, $\mathrm{T}j \circ X_\circ = X \circ j$.

(4.3.15) Suposant M paracompacta, i anàlogament al cas de les funcions, tot camp vectorial diferenciable Y definit en una subvarietat tancada $N \subset M$ es prolonga a un camp vectorial diferenciable X en M.

4.4 Camps vectorials com a derivacions

(4.4.1) Sigui M una varietat, X un camp vectorial en M. Si $W \subset M$ és obert i $f \colon W \to \mathbf{R}$ és una funció de classe C^1, es pot definir la derivada de f

segons X com la funció $X \cdot f \equiv \mathscr{L}_X f \colon W \to \mathbf{R}$ definida per

$$(\mathscr{L}_X f)(p) = \mathscr{L}_{X_p} f.$$

(4.4.2) $\mathscr{L}_X$ és un *operador local*: si $g|_V = g'|_V$, llavors $(\mathscr{L}_X g)|_V = (\mathscr{L}_X g')|_V$.

(4.4.3) Sigui (U, φ) una carta de M. Si $X|_U = X^i \, \partial/\partial x^i$, llavors

$$(\mathscr{L}_X f)|_U = \frac{\partial f}{\partial x^i} X^i,$$

on $\dfrac{\partial f}{\partial x^i} \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^i} f \equiv \mathscr{L}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} f$.

L'expressió local de $\mathscr{L}_X f$ és $\widehat{\mathscr{L}_X f} = \widehat{X}^i \, \mathrm{D}_i \widehat{f}$.

(4.4.4) Si X és de classe C^k i f és de classe C^{k+1}, $\mathscr{L}_X f$ és de classe C^k.

(4.4.5) Sigui $X \colon M \to \mathrm{T}M$ un camp vectorial. X és diferenciable sii, per a tota funció $f \colon M \to \mathbf{R}$ diferenciable, $\mathscr{L}_X f$ és diferenciable.

(4.4.6) Sigui $X \in \mathfrak{X}(M)$ un camp vectorial diferenciable en M. L'aplicació $\mathscr{L}_X \colon \mathrm{C}^\infty(M) \to \mathrm{C}^\infty(M)$ és una derivació.

(4.4.7) *Teorema d'equivalència entre camps vectorials i derivacions*

Sigui $D \colon \mathrm{C}^\infty(M) \to \mathrm{C}^\infty(M)$ una derivació. Existeix un únic camp vectorial diferenciable $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $D = \mathscr{L}_X$.

Dit altrament, l'aplicació $\mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}\,\mathrm{C}^\infty(M)$, tal que $X \mapsto \mathscr{L}_X$, és un isomorfisme de $\mathbf{R}$-espais vectorials.

(4.4.8) Sigui M una varietat, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ camps vectorials diferenciables. El commutador $[\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y] = \mathscr{L}_X \circ \mathscr{L}_Y - \mathscr{L}_X \circ \mathscr{L}_Y$ de les corresponents derivacions de $\mathrm{C}^\infty(M)$ també n'és una derivació, per tant és de la forma $\mathscr{L}_Z$ on Z és un altre camp vectorial diferenciable; aquest es denota per $[X, Y]$, i s'anomena <u>parèntesi de Lie</u> (o <u>claudàtor de Lie</u>) dels camps vectorials X, Y.

Per definició, si h és diferenciable aleshores

$$\mathscr{L}_{[X,Y]} h = \mathscr{L}_X(\mathscr{L}_Y h) - \mathscr{L}_Y(\mathscr{L}_X h).$$

(4.4.9) $\mathfrak{X}(M)$ amb el parèntesi de Lie és una $\mathbf{R}$-àlgebra de Lie.

En particular, el parèntesi de Lie

- és $\mathbf{R}$-bilineal;
- és alternat, $[X, X] = 0$, i per tant antisimètric:

$$[X, Y] = -[Y, X]\,;$$

- satisfà la *identitat de Jacobi*:
$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0\,.$$

(4.4.10) El parèntesi de Lie *no* és $\mathrm{C}^\infty(M)$-bilineal:
$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(X\cdot g)Y - g(Y\cdot f)X.$$

(4.4.11) Sigui (U,φ) una carta de M. Si $X|_U = f^i\,\partial/\partial x^i$ i $Y|_U = g^i\,\partial/\partial x^i$, llavors
$$[X,Y]|_U = \left(f^i \frac{\partial g^j}{\partial x^i} - g^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} = (X\cdot g^j - Y\cdot f^j)\,\frac{\partial}{\partial x^j}.$$
En particular, $\left[\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0$

(4.4.12) L'expressió anterior és vàlida per a camps vectorials de classe C^1. Si X, Y són de classe C^k, $[X,Y]$ és de classe C^{k-1}.

4.5 Camps vectorials relacionats per aplicacions

(4.5.1) Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació de classe C^1. Dos camps vectorials X en M, Y en N, es diuen F-relacionats quan, per a tot $p \in M$, $\mathrm{T}_pF\cdot X_p = Y_{F(p)}$, és a dir,
$$\mathrm{T}F \circ X = Y \circ F.$$
En tal cas a vegades s'escriu $X \underset{F}{\sim} Y$.

Un camp vectorial X en M es diu F-projectable si està F-relacionat amb algun camp vectorial en N.

(4.5.2) Considerem coordenades (x^i) en M i (y^j) en N, i siguin $X = X^i\,\partial/\partial x^i$, $Y = Y^j\,\partial/\partial y^j$ les corresponents expressions dels camps vectorials X, Y. De la relació $\mathrm{T}F \circ \dfrac{\partial}{\partial x^i} = \dfrac{\partial(y^j\circ F)}{\partial x^i}\,\dfrac{\partial}{\partial y^j} \circ F$ es desprèn que X i Y estan F-relacionats sii
$$\frac{\partial(y^j\circ F)}{\partial x^i}\,X^i = Y^j \circ F.$$

(4.5.3) Sigui $F\colon M \to N$ un *difeomorfisme*. Si X és un camp vectorial en M, aleshores hi ha un únic camp vectorial Y en N F-relacionat amb X:
$$F_*(X) = \mathrm{T}F \circ X \circ F^{-1}.$$
S'anomena push-forward o imatge directa de X per F.

Si X és diferenciable, $F_*(X)$ també ho és.

L'operació inversa del push-forward s'anomena pull-back, i es denota per F^*.

(4.5.4) En coordenades el push-forward es calcula

$$F_*\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = F_*\left(\frac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i} X^i\right) \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

(4.5.5) Sigui $F\colon M \to N$ diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Els camps vectorials X, Y estan F-relacionats sii, per a tota funció diferenciable $g\colon N \to \mathbf{R}$,

$$X \cdot F^*(g) = F^*(Y \cdot g).$$

(4.5.6) Sigui $F\colon M \to N$ diferenciable, $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$. Si $X_1 \underset{F}{\sim} Y_1$ i $X_2 \underset{F}{\sim} Y_2$, llavors $[X_1, X_2] \underset{F}{\sim} [Y_1, Y_2]$.

(4.5.7) Si F és un difeomorfisme,

$$F_*[X_1, X_2] = [F_*(X_1), F_*(X_2)].$$

(4.5.8) Si $j\colon N \hookrightarrow M$ és una subvarietat, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ i $X \in \mathfrak{X}(M)$, afirmar que $Y \underset{j}{\sim} X$ significa que X és tangent a N i $Y = X|_N$.

(4.5.9) Si dos camps vectorials X_1, X_2 són tangents a una subvarietat $N \subset M$, també ho és el seu parèntesi de Lie $[X_1, X_2]$.

4.6 El fibrat cotangent

(4.6.1) Sigui M una varietat. El fibrat cotangent de M és la unió disjunta dels espais cotangents

$$\mathrm{T}^*M = \coprod_{p \in M} \mathrm{T}^*_p M.$$

Denotem els seus elements per (p, α), α_p, α, ...

La projecció canònica de T^*M és l'aplicació que representarem per $\pi_M\colon \mathrm{T}^*M \to M$, definida per $\pi_M(\alpha_p) = p$. Les seves fibres són els espais cotangents, $\pi_M^{-1}(p) = \mathrm{T}^*_p M$.

(4.6.2) Sigui M una varietat diferenciable de dimensió m. El fibrat cotangent T^*M té una única estructura diferenciable de dimensió $2m$ caracteritzada per la propietat següent: si (U, φ) és una carta de M, llavors l'aplicació $\Phi^\vee\colon \pi_M^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbf{R}^m$ definida per

$$\Phi^\vee(\alpha_p) = (\varphi(p), {}^t(\mathrm{d}_p\varphi)^{-1} \cdot \alpha_p).$$

és una carta de T^*M (aquí estem identificant $(\mathbf{R}^m)^*$ amb $\mathbf{R}^m$).

Aquesta carta també es pot expressar

$$\Phi^\vee(a_i\, \mathrm{d}_p x^i) = (\varphi(p); a_1, \ldots, a_m)\,.$$

(4.6.3) Expressant el canvi entre dues cartes de M com $x \mapsto y(x)$, i el seu invers com $y \mapsto x(y)$, el canvi entre les cartes corresponents de T^*M s'expressa

$$(x^i, a_i) \mapsto \left(y^j(x), a_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y(x)) \right).$$

(4.6.4) La carta, i les coordenades, de T^*M construïdes d'aquesta manera a partir de les de M, es diuen naturals.

Quan parlem del fibrat cotangent sobreentendrem que està dotat de l'estructura diferenciable anterior.

(4.6.5) La projecció canònica $\pi_M \colon \mathrm{T}^*M \to M$ és diferenciable.

(4.6.6) Si $U \subset \mathbf{R}^m$ és un subconjunt obert, tenim una identificació canònica $\mathrm{T}^*U \cong U \times (\mathbf{R}^m)^*$.

(4.6.7) Si $V \subset M$ és una subvarietat oberta, el seu fibrat cotangent T^*V coincideix amb el subespai obert $\pi_M^{-1}(V) \subset \mathrm{T}^*M$.

4.7 Formes diferencials i diferencial d'una funció

(4.7.1) Sigui M una varietat. Una (1-)forma diferencial en M és un camp de vectors cotangents, és a dir, una secció del fibrat cotangent $\pi_M \colon \mathrm{T}^*M \to M$, és a dir, una aplicació $\omega \colon M \to \mathrm{T}^*M$ tal que $\pi_M \circ \omega = \mathrm{Id}_M$. Per tant, en cada $p \in M$ tenim un covector $\omega(p) \equiv \omega_p \in \mathrm{T}^*_p M$.

(4.7.2) Sigui (U, φ) una carta de M. Es pot escriure

$$\omega(p) = \omega_i(p)\, \mathrm{d}_p x^i,$$

on les funcions $\omega_i \colon U \to \mathbf{R}$ són les components de ω en la carta.

L'expressió local de ω en coordenades naturals és $\widehat{\omega}(x) = (x^i; \widehat{\omega}_i(x))$.

(4.7.3) Una forma diferencial és de classe C^k sii ho són les seves components en una carta.

(4.7.4) En particular, les aplicacions $\mathrm{d}x^i \colon U \to \mathrm{T}^*U$, definides per $p \mapsto \mathrm{d}_p x^i$, són m formes diferencials diferenciables en U.

(4.7.5) Si $V \subset M$ és una subvarietat oberta i ω és una forma diferencial en M, podem considerar la restricció $\omega|_V$ com una forma diferencial en V.

(4.7.6) De manera anàloga als camps de vectors tangents, es pot definir la suma de dos camps de vectors cotangents, i el seu producte per funcions.

(4.7.7) Denotem per $\Omega^1(M)$ el conjunt de 1-formes diferencials de classe C^∞ en M. És un $\mathbf{R}$-espai vectorial, i de fet un $C^\infty(M)$-mòdul.

(4.7.8) Si (U, φ) és una carta, $\Omega^1(U)$ és un $C^\infty(U)$-mòdul lliure, amb base les $\mathrm{d}x^i$: qualsevol forma diferencial s'escriu, sobre U, $\omega|_U = \omega_i \, \mathrm{d}x^i$.

(4.7.9) Sigui $f\colon M \to \mathbf{R}$ de classe C^1. La diferencial de f és la 1-forma diferencial $\mathrm{d}f$ definida per $\mathrm{d}f(p) = \mathrm{d}_p f$.

(4.7.10) En un obert coordenat la diferencial s'expressa

$$\mathrm{d}f|_U = \frac{\partial f}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^i.$$

L'expressió local de $\mathrm{d}f$ és doncs $\widehat{\mathrm{d}f}(x) = (x; \mathrm{D}_i \widehat{f}(x))$.

(4.7.11) Si f és diferenciable [de classe C^k], $\mathrm{d}f$ és diferenciable [de classe C^{k-1}].

(4.7.12) L'aplicació $\mathrm{d}\colon C^\infty(M) \to \Omega^1(M)$ és $\mathbf{R}$-lineal, i

$$\mathrm{d}(fg) = g \, \mathrm{d}f + f \, \mathrm{d}g.$$

(4.7.13) Siguin $M \xrightarrow{f} \mathbf{R} \xrightarrow{h} \mathbf{R}$ de classe C^1. Llavors

$$\mathrm{d}(h \circ f) = (\mathrm{D}h \circ f) \, \mathrm{d}f.$$

(4.7.14) Igual que en el cas del fibrat tangent, si V és un espai vectorial es té una identificació de T^*V amb $V \times V^*$, i les formes diferencials en V s'identifiquen amb les funcions vectorials $V \to V^*$.

4.8 Dualitat entre camps vectorials i 1-formes diferencials

(4.8.1) Siguin M una varietat, X un camp vectorial i ω una 1-forma diferencial en M. La contracció entre ω i X és una funció

$$\langle \omega, X \rangle \equiv \omega(X) \equiv i_X \omega\colon M \to \mathbf{R}$$

definida per

$$\langle \omega, X \rangle(p) = \langle \omega_p, X_p \rangle.$$

(4.8.2) En coordenades es té

$$\left\langle \mathrm{d}x^j, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \delta^j_{\ i}.$$

D'aquí es pot calcular la contracció $\langle \omega, X \rangle$: si $\omega|_U = \omega_i \, \mathrm{d}x^i$ i $X|_U = X^j \, \partial/\partial x^j$, llavors $\langle \omega, X \rangle|_U = \omega_i X^i$.

Si ω i X són de classe C^k, $\langle \omega, X \rangle$ també ho és.

(4.8.3) Si X és un camp vectorial i f una funció de classe C^1 llavors
$$\langle \mathrm{d}f, X\rangle = \mathscr{L}_X f.$$

(4.8.4) Una 1-forma diferencial ω és diferenciable sii, per a tot camp vectorial diferenciable X, la funció $\langle \omega, X\rangle$ és diferenciable.

(4.8.5) Si $\omega \in \Omega^1(M)$, l'aplicació $\widetilde{\omega}\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{C}^\infty(M)$ tal que $\widetilde{\omega}(X) = \langle \omega, X\rangle$ és $\mathrm{C}^\infty(M)$-lineal.

(4.8.6) *Teorema de dualitat entre camps vectorials i 1-formes diferencials*
Sigui $L\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{C}^\infty(M)$ una aplicació $\mathrm{C}^\infty(M)$-lineal. Existeix una única $\omega \in \Omega^1(M)$ tal que $L(X) = \langle \omega, X\rangle$.
És a dir, l'aplicació $\Omega^1(M) \to \mathfrak{X}(M)^*$, $\omega \mapsto \langle \omega, \cdot\rangle$, és un isomorfisme de $\mathrm{C}^\infty(M)$-mòduls.

(4.8.7) En l'enunciat anterior l'operador L és local en el sentit següent: el valor de $L(X)$ en p està determinat pel valor de X en un veïnat arbitràriament petit de p. Això és el mateix que afirmar que, si X i Y coincideixen en un conjunt obert $V \subset M$, aleshores $L(X)$ i $L(Y)$ coincideixen en V. Essent L lineal, això també s'expressa dient que, si X s'anul·la en V, aleshores $L(X)$ també s'hi anul·la.

(4.8.8) Igualment, $\mathfrak{X}(M)$ és isomorf al mòdul dual de $\Omega^1(M)$.

(4.8.9) Si M és paracompacta, usant una mètrica riemanniana es construeix fàcilment un isomorfisme entre $\mathrm{T}M$ i T^*M, i per tant un isomorfisme entre els mòduls de seccions corresponents $\mathfrak{X}(M)$ i $\Omega^1(M)$. Tanmateix, no existeix cap isomorfisme *canònic* entre ambdós.

4.9 Pull-back de formes diferencials

(4.9.1) Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació de classe C^1, $p \in M$. La seva aplicació tangent en p té una transposada ${}^t\mathrm{T}_pF\colon \mathrm{T}^*_{F(p)}N \to \mathrm{T}^*_pM$, a vegades anomenada aplicació cotangent. Per definició,
$$\langle {}^t\mathrm{T}_pF \cdot \beta_{F(p)}, u_p\rangle = \langle \beta_{F(p)}, \mathrm{T}_pF \cdot u_p\rangle.$$

(4.9.2) A partir d'una forma diferencial ω en N se'n defineix una en M, denotada per $F^*(\omega)$ i anomenada pull-back o imatge recíproca de ω per F:
$$F^*(\omega)_p = {}^t\mathrm{T}_pF \cdot \omega_{F(p)}.$$

(4.9.3) Siguin $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{g} \mathbf{R}$ de classe C^1. Llavors

$$\mathrm{d}\, F^*(g) = F^*(\mathrm{d}g).$$

(4.9.4) Siguin $F \colon M \to N$ una aplicació de classe C^1, ω una forma diferencial en N, i $g \colon N \to \mathbf{R}$ una funció. Aleshores

$$F^*(g\omega) = F^*(g)\, F^*(\omega).$$

(4.9.5) Sigui (V, ψ) una carta de N. Si $\omega|_V = \omega_j\, \mathrm{d}y^j$, llavors $F^*(\omega)|_{F^{-1}(V)} = F^*(\omega_j)\, \mathrm{d}F^*(y^j)$.

Sigui també (U, φ) una carta de M, amb $F(U) \subset V$; llavors podem expressar $\mathrm{d}F^*(y^j) = \dfrac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i}\, \mathrm{d}x^i$, i doncs

$$F^*(\omega)|_U = F^*(\omega_j)\, \frac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i}\, \mathrm{d}x^i.$$

També podem escriure $\widehat{F^*(\omega)}(x) = (x, \widehat{\omega}_j(\widehat{F}(x))\mathrm{D}_i\widehat{F}^j(x))$.

(4.9.6) Si $F \colon M \to N$ és de classe C^{k+1} i ω és una forma diferencial de classe C^k en N, llavors $F^*(\omega)$ és de classe C^k.

En particular, si F és diferenciable tenim una aplicació lineal $F^* \colon \Omega^1(N) \to \Omega^1(M)$.

(4.9.7) Si X, Y són camps vectorials F-relacionats, i α, β són 1-formes diferencials tals que $\alpha = F^*(\beta)$, aleshores $\langle \alpha, X \rangle = F^*\langle \beta, Y \rangle$.

(4.9.8) Suposem que $F \colon M \to N$ és un *difeomorfisme*. En aquest cas podem definir l'aplicació $\mathrm{T}^*_p F := {}^t(\mathrm{T}_p F)^{-1} \colon \mathrm{T}^*_p M \to \mathrm{T}^*_{F(p)} N$, i globalment una aplicació diferenciable $\mathrm{T}^* F \colon \mathrm{T}^* M \to \mathrm{T}^* N$.

En aquest cas, si $\omega \in \Omega^1(N)$, $F^*(\omega) = (\mathrm{T}^* F)^{-1} \circ \omega \circ F$.

L'operació inversa del pull-back es diu push-forward o imatge directa: si $\theta \in \Omega^1(M)$, està definit per

$$F_*(\theta) = \mathrm{T}^* F \circ \theta \circ F^{-1}.$$

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ i $\theta \in \Omega^1(M)$,

$$F_*(\langle \theta, X \rangle) = \langle F_*(\theta), F_*(X) \rangle.$$

5 Equacions diferencials i fluxos

5.1 Aixecament d'un camí al fibrat tangent

(5.1.1) Un camp vectorial al llarg d'una aplicació $F\colon M \to N$ és una aplicació $V\colon M \to \mathrm{T}N$ tal que, per a tot $p \in M$, $V(p) \in \mathrm{T}_{F(p)}N$. És a dir, $\tau_N \circ V = F$. Si $V(p) = v^j(p)\,\partial/\partial y^j\big|_{F(p)}$, la seva expressió local és $\widehat{V}(x) = (\widehat{F}(x); \widehat{v}^j(x))$.

(5.1.2) Siguin M una varietat, $\gamma\colon I \to M$ un camí de classe C^1. El vector tangent $\gamma'(t) = \mathrm{T}_t\gamma \cdot \mathrm{d}/\mathrm{d}t|_t \in \mathrm{T}_{\gamma(t)}M$ en cada $t \in I$ defineix una aplicació $\gamma' \equiv \dot{\gamma}\colon I \to \mathrm{T}M$, que també es pot expressar

$$\gamma' = \mathrm{T}\gamma \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,,$$

on $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ és el camp vectorial unitat de $\mathbf{R}$. És un camp vectorial al llarg de γ, anomenat velocitat, derivada o aixecament canònic de γ a $\mathrm{T}M$.

(5.1.3) Si γ és de classe C^k llavors γ' és de classe C^{k-1}.

(5.1.4) γ és una immersió sii γ' no s'anul·la mai.

(5.1.5) Siguin $I \xrightarrow{\gamma} M \xrightarrow{F} N$ de classe C^1. Aleshores

$$(F \circ \gamma)' = \mathrm{T}F \circ \gamma'\,.$$

Siguin $J \xrightarrow{h} I \xrightarrow{\gamma} M$ de classe C^1. Aleshores

$$(\gamma \circ h)' = (\gamma' \circ h)\,\mathrm{D}h\,.$$

(5.1.6) Sigui (U, φ) una carta de M, i suposem que $\gamma(I) \subset U$. Sigui $\widehat{\gamma}$ l'expressió local de γ. Recordem que $\gamma'(t) = \mathrm{D}\widehat{\gamma}^i(t)\,\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)}$. Considerant en $\mathrm{T}M$ la carta natural associada a φ, l'expressió local de γ' és $\widehat{\gamma'} = (\widehat{\gamma}, \mathrm{D}\widehat{\gamma})$.

5.2 Corbes integrals d'un camp vectorial

(5.2.1) Siguin M una varietat diferenciable, i $X\colon M \to \mathrm{T}M$ un camp vectorial en M de classe C^0. Un camí $\gamma\colon I \to M$ de classe C^1 es diu corba integral de X si

$$\gamma' = X \circ \gamma\,.$$

Aquesta expressió s'anomena equació diferencial (ordinària, explícita, de primer ordre, autònoma) en M, i llavors γ s'anomena solució de l'equació.

Si X és de classe C^k, necessàriament γ ha de ser de classe C^{k+1}.
Si $\gamma(t_\circ) = p_\circ$, es diu que γ satisfà la condició inicial $(t_\circ, p_\circ)$, o $\gamma(t_\circ) = p_\circ$.

(5.2.2) Si en una carta de M tenim expressions locals $\widehat{\gamma}$ i $\widehat{X}(x) = (x, \mathbf{f}(x))$, llavors l'expressió local de l'equació és $\mathrm{D}\widehat{\gamma} = \mathbf{f} \circ \widehat{\gamma}$.

(5.2.3) Siguin $\gamma\colon I \to M$, $\delta\colon J \to M$ dues corbes integrals de X. Es diu que δ és una prolongació de γ si $I \subset J$ i $\gamma = \delta|_I$.
Una corba integral es diu maximal si no admet cap prolongació a un interval més gran.

(5.2.4) Siguin M una varietat, $X\colon M \to \mathrm{T}M$ un camp vectorial de classe C^1, i $\gamma_1\colon I_1 \to M$, $\gamma_2\colon I_2 \to M$ dues corbes integrals de X amb mateixa condició inicial $(t_\circ, p_\circ)$. Llavors γ_1 i γ_2 coincideixen en $I_1 \cap I_2$.

(5.2.5) *Teorema d'existència i unicitat per a equacions diferencials*
Siguin M una varietat, $X\colon M \to \mathrm{T}M$ un camp vectorial de classe C^1. Donats $t_\circ \in \mathbf{R}$ i $p_\circ \in M$, existeix una única corba integral maximal de X amb condició inicial $(t_\circ, p_\circ)$.

(5.2.6) *Lema de translació*
Si $\gamma\colon I \to M$ és una corba integral de X, també ho és el camí traslladat en $t_\circ$, $\tilde{\gamma}\colon I - t_\circ \to M$, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t + t_\circ)$. Si γ és maximal, $\tilde{\gamma}$ també ho és.

5.3 Flux d'un camp vectorial

(5.3.1) Sigui $X\colon M \to \mathrm{T}M$ un camp vectorial en M de classe C^1. Donat $p \in M$, sigui $\gamma_p\colon I_p \to M$ la corba integral maximal de X amb condició inicial $(0, p)$. Escrivim

$$\mathrm{F}_X(t, p) = \gamma_p(t)\,.$$

El domini de F_X és el conjunt

$$\mathscr{D}_X = \{(t, p) \mid p \in M, t \in I_p\} = \bigcup_{p \in M} I_p \times \{p\} \subset \mathbf{R} \times M\,.$$

L'aplicació $\mathrm{F}_X\colon \mathscr{D}_X \to M$ s'anomena flux del camp vectorial X.

(5.3.2) Per definició, el flux de X compleix

- $\mathrm{F}(0, p) = p$,
- $\mathrm{F}'(t, p) = X(\mathrm{F}(t, p))$.

Aquí denotem per $\mathrm{F}' \colon \mathscr{D} \to \mathrm{T}M$ l'aplicació definida per $\mathrm{F}'(t,p) = \mathrm{F}(-,p)'(t)$ (vector tangent del camí $\mathrm{F}(-,p) \colon I_p \to M$ en l'instant t).

(5.3.3) Si $t_\circ \in I_p$, llavors $I_{\mathrm{F}(t_\circ,p)} = I_p - t_\circ$. I si $t \in I_p - t_\circ$, llavors es compleix la *llei de grup*

- $\mathrm{F}(t, \mathrm{F}(t_\circ, p)) = \mathrm{F}(t + t_\circ, p)$.

(5.3.4) *Teorema fonamental sobre el flux d'un camp vectorial*
Sigui $X \colon M \to \mathrm{T}M$ un camp vectorial en M de classe C^k ($k \geq 1$). El domini $\mathscr{D}_X \subset \mathbf{R} \times M$ del seu flux és obert, i el flux $\mathrm{F}_X \colon \mathscr{D}_X \to M$ és una aplicació de classe C^k.

(5.3.5) Amb les mateixes hipòtesis del teorema anterior, per a tot $t \in \mathbf{R}$ el conjunt $M_t = \{p \in M \mid (t,p) \in \mathscr{D}_X\}$ és obert en M, i l'aplicació
$$\mathrm{F}^t \colon M_t \to M_{-t}, \quad \mathrm{F}^t(p) = \mathrm{F}_X(t,p)$$
(*flux a temps t*) està ben definida i és un difeomorfisme de classe C^k, amb invers F^{-t}.

(5.3.6) Amb les mateixes hipòtesis, sigui $p \in M$. Existeixen un conjunt obert $U \subset M$ que conté p i un nombre $a > 0$ tals que $]-a, a[\times U \subset \mathscr{D}_X$. Per a tot $t \in]-a, a[$, l'aplicació $\mathrm{F}^t \colon U \to \mathrm{F}^t(U)$ és un difeomorfisme de classe C^k.

(5.3.7) Havent vist que $\mathscr{D}_X \subset \mathbf{R} \times M$ és obert i que el flux F_X és de classe C^1, notem que es pot reescriure
$$\mathrm{F}'_X = \mathrm{T}\mathrm{F}_X \circ \frac{\partial}{\partial t},$$
essent $\partial/\partial t$ el camp vectorial en $\mathbf{R} \times M$ definit a partir del camp vectorial unitat de $\mathbf{R}$ (vegeu **A.1.8**).

5.4 Camps vectorials complets

(5.4.1) *Lema d'escapament*
Sigui $X \colon M \to \mathrm{T}M$ un camp vectorial de classe C^1 en M. Sigui $\gamma \colon]a, b[\to M$ una corba integral maximal de X. Se suposa que $b < +\infty$.
Si $A \subset M$ és un subconjunt compacte, llavors existeix $t^* < b$ tal que $\gamma(t) \notin A$ per a $t > t^*$.

Hi ha un enunciat anàleg si $a > -\infty$.

Amb altres paraules, el lema diu que si el domini d'una corba integral maximal no és tot $\mathbf{R}$, llavors acaba escapant de qualsevol subconjunt compacte de M.

(5.4.2) Un camp vectorial (de classe C^1) X en M es diu complet si el domini de les seves corbes integrals maximals és $\mathbf{R}$. És a dir, si $\mathscr{D}_X = \mathbf{R} \times M$.

(5.4.3) En una varietat compacta tots els camps vectorials (de classe C^1) són complets.

(5.4.4) Més generalment, si un camp vectorial té suport compacte llavors és complet.

5.5 Grups uniparamètrics de transformacions

(5.5.1) El flux d'un camp vectorial complet és un grup uniparamètric de transformacions.

(5.5.2) Un grup uniparamètric de transformacions de M és una acció de $\mathbf{R}$ sobre M, és a dir, una aplicació $F\colon \mathbf{R} \times M \to M$ tal que $\forall s,t \in \mathbf{R}$, $\forall p \in M$,

- $F(0,p) = p$,
- $F(t+s,p) = F(t,F(s,p))$.

(5.5.3) Sigui $t \in \mathbf{R}$. Definim $F^t\colon M \to M$ per $F^t(p) = F(t,p)$. Les propietats anteriors s'escriuen

- $F^0 = \mathrm{Id}_M$,
- $F^{t+s} = F^t \circ F^s$.

F^t és una bijecció, amb inversa F^{-t}.

Denotem per $\mathfrak{S}_M$ el conjunt de permutacions de M. Les propietats anteriors poden enunciar-se dient que l'aplicació $\mathbf{R} \to \mathfrak{S}_M$, $t \mapsto F^t$, és un morfisme de grups.

(5.5.4) Sigui $p \in M$. Definim $\gamma_p\colon \mathbf{R} \to M$ per $\gamma_p(t) = F(t,p)$. La imatge de γ_p és l'òrbita de p per l'acció,

$$\mathscr{O}_p = \{\gamma_p(t) \mid t \in \mathbf{R}\} = \{F^t(p) \mid t \in \mathbf{R}\}\,.$$

M és la unió disjunta de les òrbites.

(5.5.5) Suposem que F és diferenciable [de classe C^k, amb $k \geq 1$] [contínua]. Llavors també ho són els camins γ_p. Les bijeccions F^t són difeomorfismes [difeomorfismes de classe C^k] [homeomorfismes].

(5.5.6) Suposem que F és de classe C^1. Llavors podem definir el vector tangent $X_p = \gamma_p'(0) \in \mathrm{T}_pM$. Això defineix un camp vectorial X en M, que podem escriure

$$X = F'(0,-)\,,$$

on $F'(t,p)$ és el vector tangent de $F(-,p)$ a l'instant t ($F' = \mathrm{T}F \circ \partial/\partial t$, com s'ha vist abans).

El camp vectorial X obtingut s'anomena generador infinitesimal del grup uniparamètric F.

(5.5.7) Si F és un grup uniparamètric de transformacions de M de classe C^k ($k \geq 1$) llavors el seu generador infinitesimal X és de classe C^{k-1}.

L'expressió local de X en una carta de M és $\widehat{X}(x) = (x, \mathrm{D}_1 \widehat{F}(0,x))$.

(5.5.8) Si $F\colon \mathbf{R} \times M \to M$ és un grup uniparamètric diferenciable amb generador infinitesimal X, llavors els camins $\gamma_p(t) = F(t,p)$ són corbes integrals de X, F és el flux de X, i X és un camp vectorial complet.

Hi ha, doncs, una bijecció entre camps vectorials complets i grups uniparamètrics de transformacions.

(5.5.9) A fi de tractar el flux d'un camp vectorial no complet és necessari ampliar la definició de grup uniparamètric de transformacions.

Un grup uniparamètric local de transformacions d'una varietat M és una aplicació $F\colon \mathscr{D} \to M$ tal que:

- $\mathscr{D} \subset \mathbf{R} \times M$ és obert.
- Per a cada $p \in M$, $I_p = \{t \in \mathbf{R} \mid (t,p) \in \mathscr{D}\}$ és un interval obert que conté 0.
- Per a cada $p \in M$, $F(0,p) = p$.
- Per a cada $p \in M$, si $s \in I_p$, $t \in I_{F(s,p)}$ i $t+s \in I_p$, llavors $F(t+s,p) = F(t, F(s,p))$.

(5.5.10) En aquesta situació encara podem usar les notacions anteriors $\gamma_p(t) = F(t,p) = F^t(p)$, amb les precaucions pertinents sobre el domini d'aquestes aplicacions. Si F és de classe C^1, també es pot definir el seu generador infinitesimal $X = F'(0,-)$. Recíprocament, el flux d'un camp vectorial X de classe C^1 és un grup uniparamètric local de transformacions, i el seu generador infinitesimal és X. Hi ha, doncs, una correspondència entre camps vectorials i grups uniparamètrics locals de transformacions.

5.6 Òrbites d'una equació diferencial

(5.6.1) Un punt regular d'un camp vectorial X és un punt $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$.

Un punt crític d'un camp vectorial X és un punt p tal que $X(p) = 0$. En aquest cas el camí constant $\gamma(t) = p$ és una corba integral de X, definida en tot $\mathbf{R}$, anomenada *solució d'equilibri.*

Anomenem òrbita de X la imatge de qualsevol de les seves corbes integrals. M és la unió disjunta de totes les òrbites de X.

(5.6.2) Sigui M una varietat, $X\colon M \to \mathrm{T}M$ un camp vectorial en M de classe C^k ($k \geq 1$). Si $\gamma\colon I \to M$ és una corba integral maximal de X, llavors es compleix una d'aquestes possibilitats:

- γ és constant, i l'òrbita és un punt.
- γ és una immersió injectiva.
- γ és una immersió periòdica, i l'òrbita és C^{k+1}-difeomorfa a la circumferència $\mathbf{S}_1$.

(5.6.3) Tot subgrup tancat de $\mathbf{R}$ és, o bé $\mathbf{R}$, o bé de la forma $c\mathbf{Z}$, on $c \geq 0$.

(5.6.4) Sigui M un espai topològic separat. El conjunt dels períodes d'una aplicació contínua $f\colon \mathbf{R} \to M$ és un subgrup tancat de $\mathbf{R}$.

(5.6.5) *Teorema de redreçament de camps vectorials*

Sigui M una varietat, X un camp vectorial diferenciable en M, $p \in M$. Si $X(p) \neq 0$, llavors existeix un sistema de coordenades (x^i) en p amb el qual localment es pot expressar $X = \partial/\partial x^1$.

Si X és només de classe C^k ($k \geq 1$), les coordenades que el redrecen també són de classe C^k.

(5.6.6) El procediment per a redreçar X en p es pot resumir així.

Es pren una hipersuperfície $M_\circ \subset M$ que contingui p i tal que $X_p \notin \mathrm{T}_p M_\circ$. Aleshores la restricció $F_\circ\colon \mathscr{D} \cap (\mathbf{R} \times M_\circ) \to M$ del flux de X és un difeomorfisme local en $(0, p)$ tal que, restringit entre subconjunts oberts més petits a fi d'obtenir un difeomorfisme, compleix $F_{\circ *}(\partial/\partial t) = X$.

Finalment, la coordenada t, juntament amb l'elecció de $m-1$ coordenades en $M_\circ$, dóna, a través de $F_\circ$, les coordenades desitjades en M.

(5.6.7) En un veïnat d'un punt crític l'estudi local del flux de X és més complicat. Un resultat anàleg al teorema de redreçament és el teorema de Grobman–Hartman. Descrivim-ho succintament.

Siguin M una varietat, X un camp vectorial de classe C^1 en M, F^t el seu flux, i p un punt crític de X: $X_p = 0$.

L'aplicació tangent de X en p permet construir un endomorfisme $A\colon \mathrm{T}_p M \to$

$\mathrm{T}_p M$; en coordenades, si $X = f^i\, \partial/\partial x^i$, la matriu de A en la base de vectors tangents coordenats és la jacobiana $\left(\partial f^i/\partial x^j\big|_p\right)$. És l'*endomorfisme linealitzat* de X en p.
Aquest endomorfisme dóna lloc a una equació diferencial lineal en l'espai vectorial $\mathrm{T}_p M$: $u' = Au$; és el *sistema linealitzat* de X en p. El seu flux és simplement $G^t = \exp(At)$.
Els valors propis de A s'anomenen *exponents característics* de A, i són decisius en l'estudi de l'estabilitat de la solució d'equilibri corresponent a p. El punt d'equilibri es diu *hiperbòlic* quan tots els exponents característics del seu sistema linealitzat tenen part real no nul·la.

(5.6.8) *Teorema de Grobman–Hartman*
Sigui M una varietat, X un camp vectorial de classe C^2 en M, $p \in M$ un punt crític hiperbòlic de X.
En un veïnat de p el flux F^t de X i el flux G^t del seu linealitzat en p són conjugats per un *homeomorfisme* h: $h \circ F^t = G^t \circ h$.

Intuïtivament, això expressa que els respectius retrats de fase són semblants.
A vegades l'homeomorfisme h és un difeomorfisme. En aquest cas podem dir que X i el seu linealitzat estan h-relacionats, i per tant que X es pot linealitzar (localment) amb unes coordenades adequades. (Vegeu **5.7.6**.)

5.7 Derivada de Lie de funcions i de camps vectorials

(5.7.1) Sigui X un camp vectorial en M de classe C^1, i $\mathrm{F}\colon \mathscr{D} \to M$ el seu flux.
Si $f\colon M \to \mathbf{R}$ és una funció de classe C^1, podem calcular la derivada $\mathscr{L}_X f$, també anomenada derivada de Lie de f respecte a X, com

$$\mathscr{L}_X f\,(p) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{F}^{t*}(f)(p) - f(p)}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{F}^{t*}(f)(p)\,.$$

En el cas que X no sigui complet, cal recordar que els difeomorfismes F^t del flux no estan definits en tot M; tanmateix, per a cada $p \in M$ existeixen conjunts oberts $I \ni 0$ i $U_p \ni p$ tals que $I \times U_p \subset \mathscr{D}$, de manera que per a $t \in I$ estan definits els $\mathrm{F}^t\colon U_p \to M$, i doncs les $\mathrm{F}^{t*}(f)$ estan definides en U_p.
També escriurem l'expressió anterior, de manera poc correcta, com

$$\mathscr{L}_X f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{F}^{t*}(f)\,,$$

entenent que s'ha d'interpretar segons la fórmula donada.

(5.7.2) Sigui ara Y un camp vectorial de classe C^1. De manera anàloga, i amb les mateixes precaucions si X no és complet, definim

$$\mathscr{L}_X Y\,(p) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{T}_{\mathrm{F}^t(p)}\mathrm{F}^{-t}\cdot Y(\mathrm{F}^t(p)) - Y(p)}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{F}^{t*}(Y)(p) \in \mathrm{T}_p M\,,$$

límit que veurem que existeix. S'obté així un camp vectorial $\mathscr{L}_X Y$, anomenat <u>derivada de Lie</u> de Y respecte a X.

També ho podem escriure, amb el mateix abús de notació que abans, com

$$\mathscr{L}_X Y = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{F}^{t*}(Y)\,.$$

(5.7.3) Si X i Y són camps vectorials de classe C^1 en M, llavors

$$\mathscr{L}_X Y = [X,Y]\,.$$

(5.7.4) La derivada de Lie sobre camps vectorials satisfà les propietats següents:

- $\mathscr{L}_X Y = -\mathscr{L}_Y X$.
- $\mathscr{L}_X [Y,Z] = [\mathscr{L}_X Y, Z] + [Y, \mathscr{L}_X Z]$.
- $\mathscr{L}_{[X,Y]} Z = [\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y] Z$.
- $\mathscr{L}_X (fY) = (\mathscr{L}_X f) Y + f \mathscr{L}_X Y$.
- Si $H\colon M \to N$ és un difeomorfisme, $H_*(\mathscr{L}_X Y) = \mathscr{L}_{H_*(X)} H_*(Y)$.

(5.7.5) Siguin M, N varietats, $H\colon M \to N$ una aplicació de classe C^1. Siguin X, Y camps vectorials de classe C^1 en M i N, respectivament. Les tres propietats següents són equivalents:

i) X i Y estan H-relacionats.

ii) Si γ és una corba integral de X aleshores $H \circ \gamma$ és una corba integral de Y.

iii) Es compleix $H \circ \mathrm{F}^t_X = \mathrm{F}^t_Y \circ H$ allà on aquesta expressió estigui definida.

(5.7.6) Sigui $H\colon M \to N$ un difeomorfisme de classe C^1. Siguin X un camp vectorial de classe C^1 en M, amb flux F^t. El flux de $H_*(X) = \mathrm{T}H \circ X \circ H^{-1}$ és $H_*(F^t) := H \circ F^t \circ H^{-1}$.

(5.7.7) Un camp vectorial X es diu <u>invariant</u> per un difeomorfisme $H\colon M \to M$ quan $H_*(X) = X$.

(5.7.8) Un camp vectorial X és invariant per un difeomorfisme $H\colon M \to M$ sii H commuta amb el flux F^t_X de X.

(5.7.9) Un camp vectorial Y es diu <u>invariant</u> per un camp vectorial X quan és invariant pels difeomorfismes del flux de X: $(\mathrm{F}^t_X)_*(Y) = Y$ (sobre el domini de cada F^t_X).

(5.7.10) $$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_\circ} {\mathrm{F}^t_X}^*(Y) = {\mathrm{F}^{t_\circ}_X}^*(\mathscr{L}_X Y)\,.$$

(5.7.11) Siguin X, Y camps vectorials de classe C^1 en M. Les afirmacions següents són equivalents:

i) $[X, Y] = 0$.
ii) $\mathscr{L}_X Y = 0$.
iii) Y és invariant per X: $(\mathrm{F}^t_X)_*(Y) = Y$.
iv) $\mathrm{F}^t_X \circ \mathrm{F}^s_Y = \mathrm{F}^s_Y \circ \mathrm{F}^t_X$ allà on els dos membres estiguin definits.

(5.7.12) X és invariant pel seu flux: $(\mathrm{F}^t_X)_*(X) = X$.

6 Camps tensorials

6.1 Camps tensorials

(6.1.1) Sigui M una varietat diferenciable de dimensió m, $p \in M$ un punt, i $k, \ell \in \mathbf{N}$. A partir de l'espai tangent $\mathrm{T}_p M$ podem construir els productes tensorials[4] $\mathsf{Tens}^k_\ell(\mathrm{T}_p M) = \otimes^\ell \mathrm{T}^*_p M \otimes^k \mathrm{T}_p M$; els seus elements s'anomenen tensors en p.

(6.1.2) Semblantment a la construcció dels fibrats tangent i cotangent, la unió disjunta d'aquests espais vectorials, quan p recorre M, és un *fibrat vectorial* $\mathsf{Tens}^k_\ell(\mathrm{T}M)$, que es pot dotar d'una projecció $\tau^k_\ell \colon \mathsf{Tens}^k_\ell(\mathrm{T}M) \to M$ i d'una estructura diferenciable. Més concretament, donada una carta (U, φ) de M, s'obté una carta natural $((\tau^k_\ell)^{-1}(U), \Phi^k_\ell)$ de $\mathsf{Tens}^k_\ell(\mathrm{T}M)$ definint, per a $K_p \in \mathsf{Tens}^k_\ell(\mathrm{T}_p M)$, $\Phi^k_\ell(K_p) = (\varphi(p), \mathsf{Tens}^k_\ell(\mathrm{d}_p\varphi) \cdot K_p)$.

(6.1.3) Un camp tensorial k-contravariant ℓ-covariant, o de tipus (k, ℓ), és una aplicació R que assigna a cada punt $p \in M$ un tensor $R(p) \equiv R_p \in \mathsf{Tens}^k_\ell(\mathrm{T}_p M)$.

És a dir, és una secció del fibrat tensorial $\mathsf{Tens}^k_\ell(\mathrm{T}M)$ corresponent.

(6.1.4) Sigui (U, φ) una carta de M al voltant de p. La corresponent base de vectors tangents coordenats $\partial/\partial x^i|_p$ dóna lloc a la base dual $\mathrm{d}x^i|_p$ de $\mathrm{T}^*_p M$, i la base corresponent $\mathrm{d}x^{j_1}|_p \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_\ell}|_p \otimes \partial/\partial x^{i_1}|_p \otimes \ldots \otimes \partial/\partial x^{i_k}|_p$ de $\mathsf{Tens}^k_\ell(\mathrm{T}_p M)$, anomenada base natural associada a la carta.

Mitjançant aquesta base també podem expressar la carta natural del fibrat tensorial com $\Phi^k_\ell(K^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_\ell}\, \mathrm{d}_p x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}_p x^{j_\ell} \otimes \partial/\partial x^{i_1}\big|_p \otimes \ldots \otimes \partial/\partial x^{i_k}\big|_p) = (\widehat{p}; K^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_\ell})$.

(6.1.5) Si R és un camp tensorial k-contravariant ℓ-covariant, en cada punt $p \in U$ es pot escriure, doncs,

$$R(p) = R^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_\ell}(p)\, \mathrm{d}_p x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}_p x^{j_\ell} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\bigg|_p \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\bigg|_p ,$$

on les funcions $R^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_\ell}$ s'anomenen components de R en la carta donada. L'expressió anterior es pot escriure

$$R|_U = R^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_\ell}\, \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_\ell} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} ,$$

[4] Al llarg de tota l'exposició posarem primer els factors de l'espai cotangent i després els de l'espai tangent, però això no és més que un conveni, i fins i tot podríem intercalar tangents i cotangents.

interpretant que s'ha d'avaluar cada terme en p, o bé usant les operacions elementals amb camps tensorials que es descriuran a la secció següent.

(6.1.6) Un camp tensorial R es diu diferenciable [de classe C^r] quan ho són les seves funcions components en una carta.

Això equival a afirmar que $R\colon M \to \mathsf{Tens}^k_\ell(\mathrm{T}M)$ és una aplicació diferenciable [de classe C^r].

(6.1.7) Si R és un camp tensorial en M i $V \subset M$ és una subvarietat oberta, podem considerar $R|_V$ com un camp tensorial en V.

(6.1.8) Denotarem per $\mathcal{T}^k_\ell(M)$ el conjunt dels camps tensorials de tipus (k,ℓ) diferenciables en M.

Escriurem $\mathcal{T}^k(M) = \mathcal{T}^k_0(M)$ per als camps tensorials contravariants, i $\mathcal{T}_\ell(M) = \mathcal{T}^0_\ell(M)$ per als camps tensorials covariants. En particular tenim $\mathcal{T}^0_0(M) = \mathrm{C}^\infty(M)$, $\mathcal{T}^1(M) = \mathfrak{X}(M)$ i $\mathcal{T}_1(M) = \Omega^1(M)$.

(6.1.9) Un tensor $R_p \in \mathsf{Tens}^k_\ell(\mathrm{T}_pM)$ defineix una funció multilineal de k covectors i ℓ vectors. Per tant un camp tensorial R defineix una aplicació multilineal actuant sobre k camps de vectors cotangents $\theta_1,\ldots,\theta_k$ i ℓ camps de vectors tangents $X_1,\ldots,X_\ell$, que dóna com a resultat una funció,

$$\widetilde{R}(X_1,\ldots,X_\ell,\theta_1,\ldots,\theta_k)(p) = R_p(X_1(p),\ldots,X_\ell(p),\theta_1(p),\ldots,\theta_k(p))\,.$$

Escriurem aquesta funció més simplement $R(X_1,\ldots,X_\ell,\theta_1,\ldots,\theta_k)$, sense senyalar R amb cap símbol addicional.

Expressant en coordenades aquest camp tensorial i tots els camps de vectors i covectors, es calcula aquesta funció com $R^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_\ell}\, X_1^{j_1} \cdots X_\ell^{j_\ell} \theta_{1\,i_1} \cdots \theta_{k\,i_k}$.

Més particularment, les components de R en una carta es poden obtenir com

$$R^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_\ell} = R|_U\Big(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{j_\ell}},\mathrm{d}x^{i_1},\ldots,\mathrm{d}x^{i_k}\Big)\,.$$

(6.1.10) Sigui R un camp tensorial de tipus (k,ℓ). R és diferenciable sii l'aplicació anterior $\widetilde{R}$ transforma camps de vectors i covectors diferenciables qualssevol en una funció diferenciable.

(6.1.11) Sigui $L\colon \mathfrak{X}(M)\times \overset{\ell}{\ldots} \times\mathfrak{X}(M) \times \Omega^1(M)\times \overset{k}{\ldots} \times\Omega^1(M) \to \mathrm{C}^\infty(M)$ una aplicació $\mathrm{C}^\infty(M)$-multilineal. Llavors L és l'aplicació $\widetilde{R}$ definida per un cert camp tensorial diferenciable $R \in \mathcal{T}^k_\ell(M)$.

Això es podria expressar dient que el $\mathrm{C}^\infty(M)$-mòdul $\mathcal{T}^k_\ell(M)$ és el dual de $\mathcal{T}^\ell_k(M)$.

(6.1.12) *Canvi de coordenades*

Siguin (x^i), (y^α) dos sistemes de coordenades. Podem escriure $\dfrac{\partial}{\partial x^i} = \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}$ i $\mathrm{d}x^j = \dfrac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\mathrm{d}y^\beta$. Suposem que R s'expressa en ambdues cartes com

$$R^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_\ell}\,\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\dots\otimes\mathrm{d}x^{j_\ell}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\,,$$
$$\bar{R}^{\alpha_1\dots\alpha_k}_{\beta_1\dots\beta_\ell}\,\mathrm{d}y^{\beta_1}\otimes\dots\otimes\mathrm{d}y^{\beta_\ell}\otimes\frac{\partial}{\partial y^{\alpha_1}}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial y^{\alpha_k}}\,,$$

respectivament. Aleshores les components es relacionen per

$$\bar{R}^{\alpha_1\dots\alpha_k}_{\beta_1\dots\beta_\ell} = R^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_\ell}\,\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_\ell}}{\partial y^{\beta_\ell}}\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{i_k}}\,.$$

6.2 Operacions amb camps tensorials

Per simplicitat, en la resta del tema només considerarem camps tensorials diferenciables, encara que moltes de les operacions i resultats que descriurem són vàlids amb grau de diferenciabilitat finit.

(6.2.1) Les operacions amb tensors en un punt, i més particularment la suma i el producte per escalars, donen lloc a operacions amb els camps tensorials. Així, si $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, $R, R' \in \mathcal{T}^k_\ell(M)$, tenim que el producte fR i la suma $R + R'$ són de $\mathcal{T}^k_\ell(M)$. Amb aquestes operacions $\mathcal{T}^k_\ell(M)$ és un $\mathrm{C}^\infty(M)$-mòdul.

(6.2.2) De la mateixa manera, si $R \in \mathcal{T}^k_\ell(M)$ i $S \in \mathcal{T}^{k'}_{\ell'}(M)$, podem definir el producte tensorial $R \otimes S \in \mathcal{T}^{k+k'}_{\ell+\ell'}(M)$ a partir del producte en cada punt: $(R\otimes S)_p = R_p \otimes S_p$.

El producte tensorial de camps tensorials es pot expressar

$$(\theta_1\otimes\dots\otimes\theta_\ell\otimes X_1\otimes\dots\otimes X_k)\otimes(\theta_{\ell+1}\otimes\dots\otimes\theta_{\ell+\ell'}\otimes X_{k+1}\otimes\dots\otimes X_{k+k'}) = \\ = \theta_1\otimes\dots\otimes\theta_{\ell+\ell'}\otimes X_1\otimes\dots\otimes X_{k+k'}\,.$$

També podem definir-lo per la seva acció sobre camps de vectors i covectors:

$$(R\otimes S)(Y_1,\dots,Y_{\ell+\ell'},\omega_1,\dots,\omega_{k+k'}) = \\ = R(Y_1,\dots,Y_\ell,\omega_1,\dots,\omega_k)\,S(Y_{\ell+1},\dots,Y_{\ell+\ell'},\omega_{k+1},\dots,\omega_{k+k'})\,.$$

(6.2.3) Aquestes operacions doten d'estructures de $\mathrm{C}^\infty(M)$-àlgebra graduada associativa unitària els conjunts següents:

- $\mathcal{T}^\bullet_\bullet(M) = \oplus_{k,\ell\in\mathbf{N}}\mathcal{T}^k_\ell(M)$, àlgebra dels camps tensorials (mixtos)
- $\mathcal{T}^\bullet(M) = \oplus_{k\in\mathbf{N}}\mathcal{T}^k(M)$, àlgebra dels camps tensorials contravariants
- $\mathcal{T}_\bullet(M) = \oplus_{\ell\in\mathbf{N}}\mathcal{T}_\ell(M)$, àlgebra dels camps tensorials covariants

(6.2.4) Quan U és un obert coordenat, el $\mathrm{C}^\infty(U)$-mòdul $\mathcal{T}^k_\ell(U)$ és lliure, amb base els camps tensorials

$$\mathrm{d}x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_\ell} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \,.$$

Anàlogament, els camps vectorials $\partial/\partial x^i$ generen l'àlgebra $\mathcal{T}^\bullet(U)$, etc.

(6.2.5) *Contracció interior de camps tensorials mixtos*

Si $R \in \mathcal{T}^k_\ell(M)$ és un camp tensorial mixt, en cada punt podem contreure l'i-èsim índex contravariant amb el j-èsim índex covariant; això dóna un camp tensorial $c^i_j(R) \in \mathcal{T}^{k-1}_{\ell-1}(M)$, definit per

$$c^i_j(\theta_1 \otimes \ldots \otimes \theta_\ell \otimes X_1 \otimes \ldots \otimes X_k) = \\ = \langle \theta_j, X_i \rangle\, \theta_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{\theta_j} \otimes \ldots \otimes \widehat{X_i} \otimes \ldots \otimes X_k \,,$$

on el barret denota l'absència del terme corresponent.

Per exemple, si $A \in \mathcal{T}^1_1(M)$ té expressió local $A|_U = a^i_{\ j}\, \mathrm{d}x^j \otimes \partial/\partial x^i$, llavors $\operatorname{tr} A = c^1_1(A)$ és, sobre U, la funció $a^i_{\ i}$.

(6.2.6) *Pull-back de camps tensorials covariants*

Siguin $F\colon M \to N$ una aplicació diferenciable, S un camp tensorial ℓ-covariant en N. Es pot definir un camp tensorial $F^*(S)$ del mateix tipus en M, anomenat imatge recíproca o pull-back de S per F:

$$F^*(S)_p = \otimes^{\ell}{}^t(\mathrm{T}_pF)\cdot S_{F(p)} \,;$$

en un punt la seva acció sobre ℓ vectors tangents $u_j \in \mathrm{T}_pM$ és

$$F^*(S)_p(u_1, \ldots, u_\ell) = S_{F(p)}(\mathrm{T}_pF\cdot u_1, \ldots, \mathrm{T}_pF\cdot u_\ell) \,.$$

També es pot descriure per

$$F^*(\theta_1 \otimes \ldots \otimes \theta_\ell) = F^*(\theta_1) \otimes \ldots \otimes F^*(\theta_\ell) \,,$$

on en el segon membre apareix el pull-back de 1-formes diferencials.

(6.2.7) El pull-back de camps tensorials covariants compleix les propietats següents:

- $F^*(gS) = F^*(g)\, F^*(S)$.
- $F^*(S_1 \otimes S_2) = F^*(S_1) \otimes F^*(S_2)$.
- $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.
- $\mathrm{Id}^*(S) = S$.

(6.2.8) En coordenades, el pull-back es pot calcular amb

$$F^*(S_{j_1\dots j_\ell}\, \mathrm{d}y^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathrm{d}y^{j_\ell}) = F^*(S_{j_1\dots j_\ell})\, \mathrm{d}F^*(y^{j_1}) \otimes \dots \otimes \mathrm{d}F^*(y^{j_\ell}).$$

(6.2.9) *Pull-back i push-forward per difeomorfismes*
Si $F\colon M \to N$ és un *difeomorfisme* es poden definir la imatge directa o push-forward, F_*, i la imatge recíproca o pull-back, F^*, de camps tensorials de qualsevol tipus per F. Ambdues operacions són mútuament recíproques.
Si $R \in \mathcal{T}^k_\ell(M)$, llavors $F_*(R)$ està definit per

$$F_*(R)(q) = \mathsf{Tens}^k_\ell(\mathrm{T}_{F^{-1}(q)}F)\cdot R(F^{-1}(q)) \quad \text{on } q \in N,$$

i anàlogament si $S \in \mathcal{T}^k_\ell(N)$

$$F^*(S)(p) = \mathsf{Tens}^k_\ell(\mathrm{T}_pF)^{-1}\cdot S(F(p)) \quad \text{on } p \in M.$$

Alternativament,

$$F_*(\theta_1 \otimes \dots \otimes \theta_\ell \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_k) =$$
$$F_*(\theta_1) \otimes \dots \otimes F_*(\theta_\ell) \otimes F_*(X_1) \otimes \dots \otimes F_*(X_k)$$

i anàlogament per a $F^*(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_\ell \otimes Y_1 \otimes \dots \otimes Y_k)$.

6.3 Formes diferencials

(6.3.1) És habitual identificar els elements de l'àlgebra exterior amb els tensors antisimètrics, cosa que farem en particular amb $\Lambda^k\mathrm{T}^*_pM \subset \mathsf{Tens}^k(\mathrm{T}^*_pM)$; els seus elements s'anomenen k-covectors en p.

La unió disjunta d'aquests espais, quan p recorre M, és un fibrat vectorial $\Lambda^k(\mathrm{T}^*M)$, que es pot dotar d'una estructura diferenciable i d'una projecció anàlogues a les del fibrat cotangent. De manera similar es pot definir $\Lambda^k(\mathrm{T}M)$.

(6.3.2) Una k-forma diferencial és una aplicació ω que assigna a cada punt $p \in M$ un k-vector cotangent $\omega(p) \equiv \omega_p \in \Lambda^k(\mathrm{T}^*_pM)$ (per tant, un tensor k-covariant antisimètric).

En altres termes, una k-forma diferencial és una secció del fibrat exterior $\Lambda^k\mathrm{T}^*M$.

(6.3.3) Una k-forma diferencial s'identifica a un camp tensorial k-covariant antisimètric.

(6.3.4) Denotarem per $\Omega^k(M)$ el conjunt de k-formes diferencials diferenciables.
Notem que $\Omega^0(M) = \mathrm{C}^\infty(M)$, i que, si $k > m$, aleshores $\Omega^k(M) = 0$.

(6.3.5) És el mateix donar una k-forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$ que donar una aplicació $\mathrm{C}^\infty(M)$-lineal alternada $L\colon \mathfrak{X}(M) \times \overset{k}{\dots} \times \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{C}^\infty(M)$.

(6.3.6) La suma de formes diferencials i el producte d'una forma diferencial per una funció estan definits com amb els camps tensorials, punt a punt. Amb aquestes operacions, $\Omega^k(M)$ és un $\mathrm{C}^\infty(M)$-mòdul.

(6.3.7) Igualment, el producte exterior definit en cada punt de M permet definir el producte exterior de formes diferencials. Si $\alpha \in \Omega^k(M)$, i $\beta \in \Omega^\ell(M)$, $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+\ell}(M)$.
Considerant α i β com a camps tensorials covariants, el seu producte exterior s'obté antisimetritzant el seu producte tensorial així:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon_\sigma \, \sigma(\alpha \otimes \beta)\,,$$

on ε_σ denota la signatura de la permutació σ.
Alternativament, la seva acció sobre $k+\ell$ camps vectorials ve donada per

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \ldots, X_{k+\ell}) = \\ = \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon_\sigma \, \alpha(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) \, \beta(X_{\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\sigma(k+\ell)})\,.$$

(6.3.8) Amb aquestes operacions, el conjunt

$$\Omega^\bullet(M) = \oplus_{k=0}^m \Omega^k(M)$$

té estructura de $\mathrm{C}^\infty(M)$-àlgebra graduada associativa unitària anticommutativa. És l'<u>àlgebra de les formes diferencials</u>.
Els seus elements són les seccions diferenciables de $\Lambda^\bullet(\mathrm{T}^*M) = \oplus_{k=0}^m \Lambda^k(\mathrm{T}^*M)$.

(6.3.9) L'anticommutativitat significa que, si α té grau k i β té grau ℓ, llavors

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha\,.$$

(6.3.10) En particular, el producte exterior de k 1-formes diferencials, considerat com a camp tensorial antisimètric, és

$$\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_k = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \, \theta_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \theta_{\sigma(k)}\,.$$

L'acció d'aquest producte sobre k camps vectorials és

$$(\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_k)(X_1, \ldots, X_k) = \det(\langle \theta_i, X_j \rangle)\,.$$

(6.3.11) Sigui (U, φ) una carta de M. Els $\binom{m}{k}$ elements $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}|_p$ (amb $i_1 < \ldots < i_k$) formen una base de $\Lambda^k(\mathrm{T}^*_pM)$.
Mitjançant aquesta base podem expressar una k-forma diferencial

$$\omega|_U = \sum{}' \omega_{i_1 \ldots i_k} \, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\,,$$

on el sumatori s'estén als multiíndexs tals que $i_1 < \ldots < i_k$. Les funcions components es poden obtenir com $\omega_{i_1 \ldots i_k} = \omega\left(\partial/\partial x^{i_1}, \ldots, \partial/\partial x^{i_k}\right)$.

(6.3.12) Els canvis de coordenades amb k-formes diferencials, escrites en la base de les $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$, es representen de manera similar als dels camps tensorials qualssevol, partint de les expressions corresponents de l'àlgebra multilineal.

Per exemple, per a formes diferencials de grau màxim m, i dos sistemes de coordenades (x^i), (y^j), tenim

$$\mathrm{d}y^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^m = \det\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right) \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m \,.$$

(6.3.13) *Pull-back de formes diferencials*

Siguin $F\colon M \to N$ una aplicació diferenciable. Si $\beta \in \Omega^k(N)$, la seva imatge recíproca és $F^*(\beta) \in \Omega^k(M)$.

A banda de la linealitat, es compleix $F^*(\beta_1 \wedge \beta_2) = F^*(\beta_1) \wedge F^*(\beta_2)$, de manera que $F^*\colon \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$ és un morfisme d'àlgebres.

En coordenades es calcula

$$F^*\left(\sum{}' \omega_{i_1 \ldots i_k} \, \mathrm{d}y^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^{i_k}\right) = \\ = \sum{}' F^*(\omega_{i_1 \ldots i_k}) \, \mathrm{d}F^*(y^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}F^*(y^{i_k}) \,.$$

(6.3.14) *Contracció interior d'una forma diferencial amb un camp vectorial*

Siguin $\omega \in \Omega^k(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$. La contracció de X amb ω és una $(k-1)$-forma diferencial, denotada per $i_X\omega \equiv i(X)\omega \equiv X \lrcorner\, \omega$, definida a partir de la contracció en cada punt: $(i_X\omega)_p = i_{X_p}\omega_p$.

L'acció de $i_X\omega$ sobre $k-1$ camps vectorials és doncs

$$i_X\omega(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{k-1}) \,.$$

Notem que, per a $\omega \in \Omega^1(M)$, $i_X\omega = \langle \omega, X \rangle$, i en particular $i_X \mathrm{d}f = \mathscr{L}_X f$. Si $\omega \in \Omega^0(M)$, convenim $i_X\omega = 0$.

(6.3.15) L'aplicació $i_X\colon \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ satisfà les propietats següents:

- És $\mathrm{C}^\infty(M)$-lineal.
- $i_X \circ i_X = 0$.
- $i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge (i_X\beta)$

És una antiderivació de grau -1 de l'àlgebra de les formes diferencials.

(6.3.16) La contracció interior també es pot expressar

$$i_X(\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \langle \theta_j, X \rangle\, \theta_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\theta_j} \wedge \ldots \wedge \theta_k \,.$$

(6.3.17) Altres propietats: $i_{fX} = f\, i_X$, $i_{X+Y} = i_X + i_Y$, $i_X \circ i_Y = -i_Y \circ i_X$.

6.4 La diferencial exterior

(6.4.1) *Teorema d'existència de la diferencial exterior*

Sigui M una varietat diferenciable. Existeix una única aplicació $\mathrm{d}\colon \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ que satisfà les propietats següents:

- És $\mathbf{R}$-lineal.
- d aplica $\Omega^k(M)$ en $\Omega^{k+1}(M)$.
- Si α és de grau k, $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$.
- Si $g \in \Omega^0(M)$, $\mathrm{d}g$ coincideix amb la diferencial de la funció g.
- Si $g \in \Omega^0(M)$, $\mathrm{d}(\mathrm{d}g) = 0$.

Aquesta aplicació és un operador local: si $V \subset M$ és obert i $\alpha|_V = \beta|_V$, llavors $\mathrm{d}\alpha|_V = \mathrm{d}\beta|_V$.

(6.4.2) L'operador d s'anomena diferencial exterior.

És una antiderivació de $\Omega^\bullet(M)$ de grau 1.

(6.4.3) A partir de la seva definició tenim

$$\mathrm{d}(f\, \mathrm{d}g_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}g_k) = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}g_k \,,$$

expressió que, atesa la localitat de d, permet calcular la diferencial exterior en coordenades: si $\alpha|_U = \sum{}' a_{i_1 \ldots i_k}\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$, llavors $\mathrm{d}\alpha|_U = \sum{}' \mathrm{d}a_{i_1 \ldots i_k} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$.

(6.4.4) Sigui $F\colon M \to N$ una aplicació diferenciable. Si $\beta \in \Omega^\bullet(N)$,

$$F^*(\mathrm{d}\beta) = \mathrm{d}F^*(\beta) \,.$$

(6.4.5) $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

(6.4.6) Una forma diferencial β es diu tancada si $\mathrm{d}\beta = 0$, i es diu exacta si existeix una forma diferencial α tal que $\beta = \mathrm{d}\alpha$.

La propietat $\mathrm{d}^2 = 0$ significa que β exacta $\Longrightarrow$ β tancada. L'enunciat recíproc és cert localment:

(6.4.7) *Lema de Poincaré*

Sigui M una varietat, $U \subset M$ un obert difeomorf a $\mathbf{R}^m$ (o a un obert estrellat de $\mathbf{R}^m$). Per a $k \geq 1$, si $\beta \in \Omega^k(U)$ és tancada, llavors existeix $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ tal que $\beta = \mathrm{d}\alpha$.

En altres paraules, tota k-forma diferencial tancada (amb $k \geq 1$) és localment exacta.

(6.4.8) Siguin

$$\mathrm{Z}^k(M) = \{\beta \in \Omega^k(M) \mid \beta \text{ tancada}\} = \Omega^k(M) \cap \operatorname{Ker} \mathrm{d}\,,$$

$$\mathrm{B}^k(M) = \{\beta \in \Omega^k(M) \mid \beta \text{ exacta}\} = \Omega^k(M) \cap \operatorname{Im} \mathrm{d}\,.$$

La mesura en què les formes tancades poden no ser exactes ve donada pels espais de cohomologia de de Rham $\mathrm{H}^k(M) = \mathrm{Z}^k(M)/\mathrm{B}^k(M)$, i l'àlgebra de cohomologia de de Rham $\mathrm{H}^\bullet(M) = \oplus_{k=0}^m \mathrm{H}^k(M)$.

(6.4.9) Siguin $X_0, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega \in \Omega^k(M)$.

$$\mathrm{d}\omega(X_0, \ldots, X_k) = \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i \mathscr{L}_{X_i} \omega(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_k) + \\ + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_k)\,.$$

(6.4.10) En particular, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\theta \in \Omega^1(M)$, llavors

$$\mathrm{d}\theta(X, Y) = \mathscr{L}_X \langle \theta, Y \rangle - \mathscr{L}_Y \langle \theta, X \rangle - \langle \theta, [X, Y] \rangle\,.$$

6.5 Derivada de Lie de camps tensorials

(6.5.1) Sigui $X \in \mathfrak{X}(M)$, i $\mathrm{F}\colon \mathcal{D} \to M$ el seu flux. Sigui $R \in \mathcal{T}^k_\ell(M)$ un camp tensorial. Generalitzant la definició de derivada de Lie de funcions i de camps vectorials, i amb les mateixes precaucions que en aquells casos, podem definir la derivada de Lie de R respecte a X, que és el camp tensorial $\mathscr{L}_X R \in \mathcal{T}^k_\ell(M)$ definit, en cada punt $p \in M$, per

$$\mathscr{L}_X R\,(p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{F}^{t*}(R)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{F}^{t*}(R)(p) - R(p)}{t} \in \mathsf{Tens}^k_\ell(\mathrm{T}_p M)\,.$$

També escriurem aquesta expressió, de manera poc correcta,

$$\mathscr{L}_X R = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{F}^{t*}(R)\,.$$

(6.5.2) En el cas particular de $\theta \in \mathcal{T}_1(M)$, la derivada de Lie $\mathscr{L}_X\theta$ està definida per

$$\langle \mathscr{L}_X\theta, Y\rangle = \mathscr{L}_X\langle \theta, Y\rangle - \langle \theta, \mathscr{L}_X Y\rangle \,,$$

i més particularment

$$\mathscr{L}_X \mathrm{d}f = \mathrm{d}\mathscr{L}_X f \,.$$

Es compleix que

$$\mathscr{L}_X(f\,\theta) = (\mathscr{L}_X f)\,\theta + f\,\mathscr{L}_X\theta \,.$$

En coordenades, si $\theta|_U = \theta_i \mathrm{d}x^i$ i $X|_U = X^i\partial/\partial x^i$, llavors es pot calcular $(\mathscr{L}_X\theta)|_U = \left(X^j \dfrac{\partial \theta_i}{\partial x^j} + \theta_j \dfrac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \mathrm{d}x^i$.

(6.5.3) Siguin $D^0_0\colon \mathrm{C}^\infty(M) \to \mathrm{C}^\infty(M)$, $D^1_0\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ aplicacions $\mathbf{R}$-lineals tals que D^0_0 sobre les funcions és una derivació, i $D^1_0(fY) = (D^0_0 f)Y + f(D^1_0 Y)$. Llavors D^0_0, D^1_0 s'estenen a una única aplicació $D\colon \mathcal{T}^\bullet_\bullet(M) \to \mathcal{T}^\bullet_\bullet(M)$ que compleix les propietats següents:

- És $\mathbf{R}$-lineal.
- $D(R \otimes S) = (DR) \otimes S + R \otimes (DS)$.
- D aplica $\mathcal{T}^k_\ell(M)$ en $\mathcal{T}^k_\ell(M)$.
- Per a qualsevol contracció interior c^i_j, $D\,c^i_j(R) = c^i_j(DR)$.

És a dir, D és una derivació de la $\mathbf{R}$-àlgebra $\mathcal{T}^\bullet_\bullet(M)$, de grau $(0,0)$, que commuta amb les contraccions interiors.

L'operador D obtingut d'aquesta manera és local.

La commutació amb les contraccions interiors dóna en particular $D\langle\theta, Y\rangle = \langle D\theta, Y\rangle + \langle \theta, DY\rangle$ si $\theta \in \Omega^1(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

(6.5.4) Aquestes propietats permeten calcular D sobre qualsevol camp tensorial, i per exemple es compleix

$$\begin{aligned}(DR)(\theta_1,\ldots,\theta_k,X_1,\ldots,X_\ell) \;=\; & D(R(\theta_1,\ldots,\theta_k,X_1,\ldots,X_\ell)) - \\ & - \sum_i R(\ldots,D\theta_i,\ldots) - \sum_j R(\ldots,DX_j,\ldots) \,.\end{aligned}$$

(6.5.5) El teorema anterior, aplicat a $D = \mathscr{L}_X$, derivada de Lie actuant sobre funcions i camps vectorials, permet obtenir una derivació $\mathscr{L}_X$ actuant sobre camps tensorials. Aquesta derivació coincideix amb la derivada de Lie $\mathscr{L}_X$ definida anteriorment, al principi d'aquesta secció, ja que aquesta compleix les hipòtesis del teorema anterior.

Hi ha altres casos d'aplicació, singularment a $D = \nabla_X$, la derivada covariant definida per una *connexió*.

(6.5.6) El coneixement de la derivada de Lie $\mathscr{L}_X$ actuant sobre funcions, camps vectorials, i 1-formes diferencials, juntament amb la propietat de derivació, permet calcular en coordenades la derivada de Lie $\mathscr{L}_X R$ d'un camp tensorial qualsevol.

Per exemple, si $X = X^i \partial/\partial x^i$, $R = R_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$, llavors

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X R &= (\mathscr{L}_X R_{ij})\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j + R_{ij}\,(\mathscr{L}_X \mathrm{d}x^i) \otimes \mathrm{d}x^j + R_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes (\mathscr{L}_X \mathrm{d}x^j) \\ &= (\mathscr{L}_X R_{ij})\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j + R_{ij}\,\mathrm{d}X^i \otimes \mathrm{d}x^j + R_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}X^j \\ &= \left(\frac{\partial R_{ij}}{\partial x^k} X^k + R_{kj} \frac{\partial X^k}{\partial x^i} + R_{ik} \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j .\end{aligned}$$

(6.5.7) $\mathscr{L}_{[X,Y]} = [\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y]$.

(6.5.8) Un camp tensorial R es diu invariant per un difeomorfisme $H\colon M \to M$ quan $H_*(R) = R$.

(6.5.9) Sigui X un camp vectorial en M. Un camp tensorial R en M és invariant per X si és invariant pel flux F^t_X de X, és a dir, ${\mathrm{F}^t_X}^*(R) = R$.

(6.5.10) $$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_\circ} \mathrm{F}^{t*}(R) = \mathrm{F}^{t_\circ *}(\mathscr{L}_X R) .$$

(6.5.11) R és invariant per X sii $\mathscr{L}_X R = 0$.

(6.5.12) Si $H\colon M \to N$ és un difeomorfisme,

$$H_*(\mathscr{L}_X R) = \mathscr{L}_{H_*(X)} H_*(R) .$$

6.6 Derivada de Lie de formes diferencials

(6.6.1) Considerant les formes diferencials com a camps covariants antisimètrics, la derivada de Lie $\mathscr{L}_X$ aplica formes diferencials en formes diferencials.

Es compleix a més que

$$\mathscr{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathscr{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathscr{L}_X \beta) .$$

Per tant l'aplicació $\mathscr{L}_X\colon \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ és una derivació de grau 0.

(6.6.2) Si α és una k-forma diferencial,

$$(\mathscr{L}_X \alpha)(X_1, \dots, X_k) = \mathscr{L}_X(\, \alpha(X_1, \dots, X_k)\,) - \sum_i \alpha(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k) .$$

(6.6.3) $\mathscr{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathscr{L}_X = i_{[X,Y]}$.

(6.6.4) $\mathrm{d} \circ \mathscr{L}_X = \mathscr{L}_X \circ d$.

(6.6.5) *Fórmula de Cartan*

$$\mathscr{L}_X = i_X \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ i_X \,.$$

(6.6.6) Si $D \colon \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ és una derivació de grau 0 que commuta amb d, llavors és la derivada de Lie $\mathscr{L}_X$ respecte a un camp vectorial.

7 Distribucions tangents

Per simplicitat, la teoria donada en aquesta secció només concerneix les distribucions tangents de classe C^∞.

Si M és una varietat diferenciable, anomenarem *camp vectorial local* en M un camp vectorial definit en un subconjunt obert de M. Representarem per $\mathfrak{X}_{\mathrm{loc}}(M)$ el conjunt dels camps vectorials locals diferenciables de M. Aquest conjunt té propietats anàlogues a les de $\mathfrak{X}(M)$, però cal tenir en compte que les operacions de suma o parèntesi de Lie de camps vectorials locals només es poden realitzar en el domini comú dels operands. Semblantment, la multiplicació d'un camp vectorial local X per una *funció local* $f \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(M)$ dóna un camp vectorial local fX definit en el seu domini comú.

L'àmbit teòric apropiat per a treballar amb objectes definits localment és la *teoria de feixos*. Tanmateix, per tal d'evitar un llenguatge excessivament tècnic, direm, per abús de llenguatge, que $\mathfrak{X}_{\mathrm{loc}}(M)$ és un $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(M)$-mòdul.

Si $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}_{\mathrm{loc}}(M)$ és un conjunt arbitrari de camps vectorials locals diferenciables, representarem per $\langle \mathcal{V} \rangle$ el $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(M)$-mòdul que generen. Els seus elements són les combinacions lineals finites $\sum_i f_i X_i$, amb $f_i \in \mathrm{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(M)$ i $X_i \in \mathfrak{X}_{\mathrm{loc}}(M)$.

Un advertiment final: la terminologia relativa a aquest tema pot variar sensiblement segons els textos consultats.

7.1 Distribucions tangents

En tota aquesta secció M és una varietat diferenciable (de dimensió m).

(7.1.1) Una distribució tangent (o simplement *distribució*[5]) en M és un subconjunt $D \subset \mathrm{T}M$ tal que, per a cada $p \in M$, $D_p = D \cap \mathrm{T}_p M$ és un subespai vectorial de l'espai tangent $\mathrm{T}_p M$. Podem escriure, doncs, $D = \coprod_{p \in M} D_p$.
La dimensió $\dim D_p$ s'anomena *rang* de D en p.

(7.1.2) Si $D \subset \mathrm{T}M$ és una distribució tangent i $U \subset M$ una subvarietat oberta, aleshores s'obté una distribució tangent en U posant $D|_U = D \cap \mathrm{T}U = \coprod_{p \in U} D_p \subset \mathrm{T}U$.

[5] En podem dir *distribució* sempre que no hi hagi perill de confusió amb el concepte homònim de l'anàlisi global: una *distribució* en una varietat M és una forma lineal contínua en l'espai $\mathcal{D}(M)$ de les funcions diferenciables amb suport compacte (dotat d'una topologia adequada).

(7.1.3) Sigui D una distribució tangent en M. Diem que un camp vectorial local Y és una secció local de la distribució (o, més informalment, que *pertany* a la distribució) quan $Y(p) \in D_p$ per a tot punt p (del domini de Y).

És a dir, quan Y és una secció local de la projecció $\tau \colon D \to M$ que a cada vector de D li assigna el seu punt base.

Representem per

$$\mathrm{Sec}_{\mathrm{loc}}(D) = \{Y \in \mathfrak{X}_{\mathrm{loc}}(M) \mid Y \text{ secció local diferenciable de } D\}\,.$$

el conjunt d'aquests camps vectorials que són *diferenciables.* És un $\mathrm{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(M)$-mòdul.

Notem en particular que $\mathrm{Sec}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{T}M) = \mathfrak{X}_{\mathrm{loc}}(M)$.

(7.1.4) Sigui $\mathcal{V}$ un conjunt arbitrari de camps vectorials locals en M. Genera una distribució tangent que denotarem $\mathrm{Dist}(\mathcal{V}) \subset \mathrm{T}M$: si $p \in M$,

$$\mathrm{Dist}(\mathcal{V})_p = \langle X(p) \mid X \in \mathcal{V} \rangle \subset \mathrm{T}_p M\,,$$

on el segon membre denota el subespai generat per tots els $X(p)$ (de fet, només pels corresponents als X que continguin el punt p en el seu domini).

$\mathrm{Dist}(\mathcal{V})$ és la distribució tangent generada per $\mathcal{V}$.

(7.1.5) Es compleixen les inclusions següents:

- $\mathrm{Dist}(\mathrm{Sec}_{\mathrm{loc}}(D)) \subset D$;
- Si els camps de $\mathcal{V}$ són diferenciables, $\mathcal{V} \subset \mathrm{Sec}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{Dist}(\mathcal{V}))$.

(7.1.6) Una distribució tangent D es diu diferenciable quan és la distribució $D = \mathrm{Dist}(\mathcal{V})$ generada per un cert conjunt de camps vectorials locals *diferenciables* $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}_{\mathrm{loc}}(M)$.

(7.1.7) Una distribució tangent D és diferenciable sii està generada pel seu conjunt de seccions locals *diferenciables* $\mathrm{Sec}_{\mathrm{loc}}(D)$.

Es pot provar que, si D és diferenciable, llavors és localment finitogenerada: per a cada punt $p_\circ \in M$ hi ha un veïnat obert U i un nombre *finit* de seccions diferenciables $X_1, \ldots, X_k$ (*generadors locals* de D) tals que

$$D|_U = \mathrm{Dist}(\{X_1, \ldots, X_k\})\,,$$

és a dir, que, per a tot $p \in U$, $D_p = \langle X_1(p), \ldots, X_k(p) \rangle$.

(7.1.8) Una distribució tangent es diu regular en un punt quan és diferenciable i de rang constant en un veïnat del punt. Es diu distribució regular quan ho és en tot punt.

(7.1.9) Una distribució tangent $D \subset \mathrm{T}M$ de rang r és regular sii es compleix la condició següent: per a cada $p_\circ \in M$ hi ha un conjunt obert $U \ni p_\circ$ i r camps vectorials diferenciables X_i definits en U, *linealment independents en cada punt*, tals que $D|_U = \mathrm{Dist}(\{X_1, \ldots, X_r\})$; és a dir, que, per a tot $p \in U$, $\{X_1(p), \ldots, X_r(p)\}$ és una base de D_p.

(7.1.10) Amb les mateixes hipòtesis, si $Z \in \mathrm{Sec}(D|_U)$ aleshores es pot escriure de manera única

$$Z = \sum_{i=1}^{r} \zeta^i X_i \,,$$

on les ζ^i són funcions diferenciables en U.
És a dir,

$$\mathrm{Sec}(D|_U) = \langle X_1, \ldots, X_r \rangle \,,$$

i de fet $\mathrm{Sec}(D|_U)$ és un $\mathrm{C}^\infty(U)$-mòdul lliure amb base $\{X_1, \ldots, X_r\}$. Direm que $(X_1, \ldots, X_r)$ és una referència local de D.

La propietat de ser regular significa que $D \subset \mathrm{T}M$ és un *subfibrat vectorial*, per la qual cosa una distribució tangent regular també s'anomena subfibrat tangent.

Qualsevol altra referència local (Y_j) de $D|_U$ està relacionada amb (X_i) per una matriu invertible amb coeficients funcions:

$$Y_j = a^i_{\ j} X_i \,.$$

7.2 Distribucions integrables i distribucions involutives

A partir d'ara totes les distribucions tangents seran suposades diferenciables.

(7.2.1) Sigui $D \subset \mathrm{T}M$ una distribució tangent. Una subvarietat immersa N de M es diu varietat integral de D quan, per a tot $p \in N$, es té

$$\mathrm{T}_p N = D_p \,.$$

(Recordem que, si $j \colon N \hookrightarrow M$ és la immersió injectiva que defineix l'estructura de subvarietat immersa, identifiquem $\mathrm{T}_p N$ amb el subespai imatge $\mathrm{T}_p j \cdot \mathrm{T}_p N \subset \mathrm{T}_{j(p)} M$.)

(7.2.2) Una distribució tangent D es diu integrable quan tot punt de M està contingut en alguna varietat integral de D.

(7.2.3) Les distribucions tangents de rang 0 i de rang m són trivialment integrables. Les seves varietats integrals són respectivament els subconjunts discrets i els subconjunts oberts de la varietat.

(7.2.4) Una distribució tangent diferenciable de rang 1 és sempre integrable. Això és conseqüència del teorema d'existència de solucions d'equacions diferencials.

(7.2.5) Si $\pi\colon M \to B$ és una submersió, llavors $\operatorname{Ker} \mathrm{T}\pi \subset \mathrm{T}M$ és una distribució tangent integrable, i les seves fibres $\pi^{-1}(b) \subset M$ en són varietats integrals.

(7.2.6) Una distribució tangent D es diu involutiva quan ho és el seu conjunt de seccions locals diferenciables, és a dir:

$$X, Y \in \mathrm{Sec}_{\mathrm{loc}}(D) \Longrightarrow [X, Y] \in \mathrm{Sec}_{\mathrm{loc}}(D)\,.$$

Això equival a afirmar que $\mathrm{Sec}_{\mathrm{loc}}(D)$ és una àlgebra de Lie.

(7.2.7) Una distribució tangent integrable és sempre involutiva.

El principal objectiu d'aquest tema és donar, sota certes hipòtesis addicionals, un enunciat recíproc d'aquest.

(7.2.8) La involutivitat d'una distribució *regular* es pot determinar fàcilment. Suposem, per exemple, que $D = \mathrm{Dist}(\{X_1, \ldots, X_r\})$, amb (X_i) referència global de D. Aleshores D és involutiva sii, per a qualssevol índexs i, j,

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k\,,$$

per a certes funcions c_{ij}^k.

7.3 Teorema de Frobenius

En tota aquesta secció M és una varietat diferenciable de dimensió m i $D \subset \mathrm{T}M$ una distribució regular de rang r. Si $(X_1, \ldots, X_r)$ és una referència local de D sobre un conjunt obert $U \subset M$, escriurem, per abús de notació, $D|_U = \langle X_1, \ldots, X_r \rangle$.

(7.3.1) *Teorema de Frobenius*

Una distribució tangent *regular* és integrable sii és involutiva.

La implicació recíproca és conseqüència dels tres resultats següents.

(7.3.2) *Abelianització d'una referència local involutiva*

Si D és un involutiva, llavors pot generar-se localment per camps vectorials que commuten; és a dir, sobre conjunts oberts prou petits, $D|_U = \langle X_1, \ldots X_r \rangle$, amb $[X_i, X_j] = 0$.

(7.3.3) El procediment per a abelianitzar és el següent.

Suposant que es parteix de $D|_U = \langle Y_1, \ldots Y_r \rangle$ amb $Y_k = B^i_k \, \partial/\partial x^i$, podem suposar, en un obert potser més petit, que la submatriu de B formada per les primeres r files és invertible; llavors es pot escriure $D|_U = \langle X_1, \ldots X_r \rangle$ amb una combinació lineal adequada $X_k = C^\ell_k \, Y_\ell$ que dóna $X_k = \partial/\partial x^k + \sum_{i=r+1}^m A^i_k \, \partial/\partial x^i$; camps vectorials que commuten.

(7.3.4) *Redreçament simultani de camps vectorials que commuten*

Si r camps vectorials $X_1, \ldots, X_r$ linealment independents arreu commuten, llavors localment es poden redreçar simultàniament; és a dir, al voltant de cada punt hi ha coordenades $(x^1, \ldots, x^m)$ tals que, en un conjunt obert prou petit, $X_1 = \partial/\partial x^1$, ..., $X_r = \partial/\partial x^r$.

(7.3.5) El procediment per a redreçar els X_i en p es pot resumir així.

Existeix un interval obert $I \ni 0$ i un conjunt obert $V \ni p$ prou petits tals que està definida l'aplicació

$$\psi\colon I^r \times V \to M \, , \; \psi(t^1, \ldots, t^r, q) = \mathrm{F}^{t^r}_{X_r} \circ \ldots \circ \mathrm{F}^{t^1}_{X_1}(q) \, ,$$

on F^t_X és el flux de X a temps t. Sigui $M_\circ \subset V$ una subvarietat de dimensió $m-r$ que contingui p, i tal que $\mathrm{T}_pM = \langle X_1(p), \ldots, X_r(p) \rangle \oplus \mathrm{T}_pM_\circ$. Aleshores la restricció $\psi_\circ\colon I^r \times M_\circ \to M$ és un difeomorfisme local en el punt $(0, \ldots, 0; p)$, tal que $\partial/\partial t^i$ està $\psi_\circ$-relacionat amb X_i.

Restringint-la a subconjunts oberts més petits, s'obté un difeomorfisme $\psi_\circ$ tal que ${\psi_\circ}_*(\partial/\partial t^i) = X_i$.

Les coordenades t^i, juntament amb unes coordenades qualssevol en $M_\circ$, donen, a través d'aquest $\psi_\circ$, les coordenades desitjades en M.

(7.3.6) *Llesques integrals d'un conjunt de camps vectorials redreçats*

Sigui D una distribució tangent tal que $D|_U = \left\langle \partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^r \right\rangle$ en unes coordenades $(x^1, \ldots, x^m)$. Aleshores, donades constants qualssevol $c^{r+1}, \ldots, c^m \in \mathbf{R}$, les equacions

$$x^{r+1} = c^{r+1}, \; \ldots \; , x^m = c^m$$

defineixen varietats integrals de D.

(7.3.7) El resultat final no només prova l'existència de varietats integrals per a un subfibrat tangent involutiu, sinó que també permet donar una descripció conjunta de totes les que tallen un obert prou petit: en un sistema de *coordenades distingides* per a D les varietats integrals es poden redreçar simultàniament.

També prova que, fixat un punt, hi ha localment una *única* varietat integral que el conté.

Observem, d'altra banda (i suposant M paracompacta), que si $N \subset M$ és una varietat integral *connexa* de D, llavors $N \cap U$ és en general la unió disjunta d'un conjunt numerable d'oberts de les llesques r-dimensionals anteriors.

(7.3.8) Per a una distribució tangent diferenciable de rang no constant la involutibitat no implica integrabilitat. Tanmateix, es poden donar altres condicions suficients d'integrabilitat (teoremes de Hermann, Nagano, Lobry, Matsuda i Sussmann).

(7.3.9) Per a una distribució tangent integrable D en M es pot definir un concepte anàleg al de corba integral maximal d'un camp vectorial.
Per cada $p \in M$ passa una única varietat integral *connexa* de D que és *maximal*, en el sentit que qualsevol altra està continguda en aquesta. Tals varietats integrals s'anomenen varietats integrals maximals de D, i en general no són subvarietats regulars, sinó subvarietats immerses.

(7.3.10) M és la unió disjunta de totes les varietats integrals maximals de D, les quals son les *fulles* d'una foliació de M.

Es pot dotar el conjunt M d'una topologia més fina, i d'una estructura diferenciable, on les fulles són subvarietats obertes. La varietat resultant, M_D, té en general una infinitat no numerable de components connexos, i l'aplicació identitat $M_D \to M$ és una immersió bijectiva.

Quan la distribució tangent és regular es diu que la foliació és regular: totes les fulles tenen la mateixa dimensió.

7.4 Aplicació: equacions en derivades parcials de primer ordre

(7.4.1) Sigui X un camp vectorial en M. Considerem l'equació en derivades parcials

$$\mathscr{L}_X u = 0\,,$$

on la incògnita és una funció definida en un obert de M. En un veïnat d'un *punt regular* de X existeix una carta (x^i) on X és un camp vectorial coordenat, $X = \partial/\partial x^1$. En aquest obert, les solucions de l'equació són les funcions qualssevol de la forma

$$u = f(x^2, \ldots, x^m)\,.$$

(7.4.2) Sigui ara $h\colon M \to \mathbf{R}$ una funció, i considerem l'equació lineal no homogènia

$$\mathscr{L}_X u = h\,.$$

Amb les mateixes hipòtesis que abans, un cop redreçat X una solució particular s'obté, en coordenades, integrant $u_\circ = \int \mathrm{d}x^1\, h(x^1, \ldots, x^m)$; totes les altres solucions s'obtenen sumant-hi les solucions de l'equació homogènia associada $\mathscr{L}_X u = 0$.

(7.4.3) Considerem un sistema d'equacions en derivades parcials

$$\mathscr{L}_{X_i} u = 0\,,$$

on $X_1, \ldots, X_r$ són camps vectorials en M, linealment independents en cada punt.

Si $\langle X_1, \ldots, X_r \rangle$ és una distribució involutiva llavors al voltant de tot punt hi ha coordenades locals $(y^1, \ldots, y^m)$ tals que $\langle X_1, \ldots, X_r \rangle = \langle Y_1, \ldots, Y_r \rangle$ on $Y_j = \partial/\partial y^j$. Per tant les solucions locals del sistema són les funcions de la forma

$$u = f(y^{r+1}, \ldots, y^m)\,.$$

Recíprocament, si al voltant de cada punt el sistema té $m - r$ solucions $g^{r+1}, \ldots, g^m$ amb diferencials linealment independents aleshores $\langle X_1, \ldots, X_r \rangle$ és involutiva.

(7.4.4) Amb hipòtesis similars es pot analitzar el sistema no homogeni

$$\mathscr{L}_{X_i} u = h_i\,.$$

Suposant que els X_i generen una distribució regular involutiva, amb un canvi de base $Y_j = a^i_{\ j} X_i$ on els Y_j siguin camps vectorials coordenats s'obté el sistema $\mathscr{L}_{Y_j} u = h_i a^i_{\ j}$, que s'integra fàcilment com en el cas d'un sol camp vectorial.

(7.4.5) Considerem ara un sistema d'equacions en derivades parcials de la forma

$$\frac{\partial u^a}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^d) = A^a_i(x^1, \ldots, x^d, u^1, \ldots, u^n)\,.$$

Ens demanem per l'existència d'una solució $u = f(x)$ definida en un veïnat obert de $x_\circ \in \mathbf{R}^d$ que prengui el valor $u_\circ = f(x_\circ) \in \mathbf{R}^n$.

Si existeix tal solució, com que les seves components f^a satisfan el teorema de Schwarz, l'ús de la regla de la cadena implica que s'ha de satisfer la *condició d'integrabilitat*

$$\frac{\partial A^a_i}{\partial x^j} + \frac{\partial A^a_i}{\partial u^b} A^b_j = \frac{\partial A^a_j}{\partial x^i} + \frac{\partial A^a_j}{\partial u^b} A^b_i \qquad (i, j = 1 \ldots d,\ a = 1 \ldots n)$$

en un veïnat de $(x_\circ, u_\circ)$.

Recíprocament, si es compleix aquesta condició llavors en un veïnat de

$x_\circ$ existeix una única solució f de l'equació en derivades parcials satisfent $f(x_\circ) = u_\circ$.

El graf d'aquesta solució és precisament la varietat integral que conté el punt $(x_\circ, u_\circ)$ de la distribució tangent en $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^n$ generada pels d camps vectorials $\dfrac{\partial}{\partial x^i} + A_i^a \dfrac{\partial}{\partial u^a}$. La seva integrabilitat equival justament a la condició d'integrabilitat anterior.

7.5 Sistemes de Pfaff

Hi ha una caracterització «dual» dels subfibrats tangents involutius, i per tant un enunciat «dual» del teorema de Frobenius.

(7.5.1) Anomenem codistribució en M un subconjunt $C \subset \mathrm{T}^*M$ tal que, per a cada $p \in M$, $C_p = C \cap \mathrm{T}_p^*M$ és un subespai vectorial de l'espai cotangent T_p^*M. La dimensió $\dim C_p$ s'anomena *rang* de C en p.

Podem definir també el concepte de codistribució regular com aquella que és diferenciable i de rang constant.

(7.5.2) Si $D \subset \mathrm{T}M$ és una distribució tangent, prenent el subespai *anihilador* (o anul·lador) en cada punt obtenim una codistribució $C = D^\circ \subset \mathrm{T}^*M$, on

$$D_p^\circ = \{\alpha_p \in \mathrm{T}_p^*M \mid (\forall u_p \in D_p)\, \langle \alpha_p, u_p \rangle = 0\}\,.$$

(7.5.3) Si D és regular llavors D° també ho és. Si $\mathrm{rang}(D) = r$, $\mathrm{rang}(D^\circ) = m - r$. Suposant $D|_U = \langle X_1, \dots X_r \rangle$, llavors $D^\circ|_{U'} = \langle \alpha^{r+1}, \dots \alpha^m \rangle$, on les α^j són 1-formes diferencials diferenciables en un obert eventualment més petit, linealment independents en cada punt, i tals que $\langle \alpha_j, X_i \rangle = 0$.

Això es pot expressar d'una altra manera: si $D \subset \mathrm{T}M$ és un subfibrat vectorial, llavors $D^\circ \subset \mathrm{T}^*M$ també ho és.

(7.5.4) En les mateixes condicions, afirmar que $\beta \in \mathrm{Sec}_{\mathrm{loc}}(D^\circ)$ equival a afirmar que $\langle \beta, X \rangle = 0$ per a tot $X \in \mathrm{Sec}_{\mathrm{loc}}(D)$. Afirmar que $Y \in \mathrm{Sec}_{\mathrm{loc}}(D)$ equival a afirmar que $\langle \alpha, Y \rangle = 0$ per a tot $\alpha \in \mathrm{Sec}_{\mathrm{loc}}(D^\circ)$.

(7.5.5) Afirmar que $j\colon N \hookrightarrow M$ és una varietat integral d'una distribució tangent regular D de rang r, equival a afirmar que $\dim N = r$ i

$$j^*(\alpha) = 0$$

per a cada $\alpha \in \mathrm{Sec}_{\mathrm{loc}}(D^\circ)$. Aquesta expressió s'anomena sistema de Pfaff. Donada una base local $D^\circ|_U = \langle \alpha^{r+1}, \dots \alpha^m \rangle$, el sistema s'expressa de forma equivalent com $j^*(\alpha^k) = 0$ $(r+1 \leq k \leq m)$.

(7.5.6) Una distribució tangent regular D és involutiva sii se satisfà la condició següent:

$$\alpha \in \Omega^1_{\mathrm{loc}}(M) \text{ anihila } D \implies \mathrm{d}\alpha \in \Omega^2_{\mathrm{loc}}(M) \text{ anihila } D$$

(diem que $\omega \in \Omega^2_{\mathrm{loc}}(M)$ anihila el subfibrat tangent D quan $\omega(X,Y) = 0$ per a $X, Y \in \mathrm{Sec}_{\mathrm{loc}}(D)$).

(7.5.7) Hi ha una interpretació algebraica d'aquest resultat. Si $\mathcal{I} \subset \Omega^\bullet(M)$ és l'ideal generat per $\mathrm{Sec}(D^\circ)$, llavors D és involutiva sii $\mathcal{I}$ és un *ideal diferencial*, és a dir, $\mathrm{d}\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$.

(7.5.8) Suposem que D és una distribució tangent regular, amb $D^\circ|_U = \langle \alpha^{r+1}, \ldots, \alpha^m \rangle$. Llavors D és involutiva (en U) sii es compleix el següent: al voltant de cada punt existeixen 1-formes diferencials β^k_ℓ tals que, per a cada k,

$$\mathrm{d}\alpha^k = \sum_\ell \alpha^\ell \wedge \beta^k_\ell \,.$$

(7.5.9) Amb les mateixes hipòtesis, D és involutiva (en U) sii, per a cada índex k,

$$\mathrm{d}\alpha^k \wedge \alpha^{r+1} \wedge \ldots \wedge \alpha^m = 0 \,.$$

(7.5.10) Notem que si D és involutiva i usem coordenades $(x^1, \ldots, x^m)$ tals que $D|_U = \big\langle \partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^r \big\rangle$, llavors $D^\circ|_U = \langle \mathrm{d}x^{r+1}, \ldots, \mathrm{d}x^m \rangle$, la qual cosa evidencia que les varietats integrals de D (previstes pel teorema de Frobenius) s'expressen implícitament com $x^{r+1} = c^{r+1}$, …, $x^m = c^m$.

(7.5.11) En vista de la caracterització de les varietats integrals (7.5.5) es pot generalitzar el problema d'integració de la manera següent. Un *sistema diferencial exterior* ve donat per un ideal $\mathcal{I} \subset \Omega^\bullet(M)$. Una varietat integral del sistema és una varietat immersa $j \colon N \hookrightarrow M$ tal que $j^*(\alpha) = 0$ per a cada $\alpha \in \mathcal{I}$. El sistema es diu *sistema de Pfaff* si $\mathcal{I}$ està generat per 1-formes diferencials.

D'acord amb el teorema de Frobenius, un sistema de Pfaff $\mathcal{I}$ en M generat localment per $m-r$ 1-formes diferencials linealment independents té varietats integrals de dimensió r per qualsevol punt sii $\mathcal{I}$ és un *ideal diferencial*, és a dir, $\mathrm{d}\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$.

El cas general donat per un ideal diferencial $\mathcal{I}$ qualsevol és força més complicat.

7.6 Distribucions tangents no integrables

Les distribucions no integrables tenen una gran importància en algunes aplicacions, com ara la teoria de control.

(7.6.1) Considerem per exemple una família arbitrària $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}_{\mathrm{loc}}(M)$ de camps vectorials diferenciables en una varietat M. Donat un punt $p \in M$, anomenem *òrbita* de p respecte a $\mathcal{V}$ el conjunt dels punts assolits aplicant els fluxos dels $X \in \mathcal{V}$ a p:

$$\mathcal{O}_p = \{\mathrm{F}^{t_k}_{X_k} \circ \ldots \circ \mathrm{F}^{t_1}_{X_1}(p) \mid k \in \mathbf{N}^*, t_i \in \mathbf{R}, X_i \in \mathcal{V}\},$$

en el benentès que els fluxos estiguin definits en els punts on s'apliquen.

(7.6.2) El *teorema de l'òrbita* assegura, sense més hipòtesis, que, de forma natural, aquest conjunt és sempre una subvarietat immersa connexa. També en dóna una descripció de l'espai tangent en un punt q: és l'espai vectorial generat per tots els $\Phi_*(X)_q$ on els $X \in \mathcal{V}$ i els Φ són tots els difeomorfismes que apareixen dins la definició de $\mathcal{O}_p$.

Les òrbites fan una partició de M, però notem que poden tenir dimensions variades i més grans que la dimensió de la distribució associada a $\mathcal{V}$.

(7.6.3) A partir del teorema de l'òrbita es pot provar el *teorema de Chow–Rashevski*: en una varietat connexa, si els parèntesis de Lie successius dels camps vectorials de $\mathcal{V}$ generen en cada punt tot l'espai tangent, llavors existeix una sola òrbita, a saber, tota la varietat.

8 Connexions

Moltes de les operacions considerades en aquest tema es poden efectuar amb graus de diferenciabilitat finits, però per simplicitat la teoria s'exposarà amb aplicacions de classe C^∞.

8.1 Connexions en una varietat

Hi ha un nombre sorprenentment elevat de maneres de definir una connexió. Ho farem en termes de la derivació covariant.

(8.1.1) Sigui M una varietat diferenciable, $\mathfrak{X}(M)$ el $\mathrm{C}^\infty(M)$-mòdul dels seus camps vectorials diferenciables. Una connexió[6] (o, més pròpiament, una derivació covariant) en M és una aplicació

$$\nabla \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

que satisfà les propietats següents:

i) $\nabla_X Y$ és $\mathbf{R}$-lineal en Y,

ii) $\nabla_X Y$ és $\mathrm{C}^\infty(M)$-lineal en X,

iii) donada $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, $\nabla_X (fY) = (\mathscr{L}_X f) Y + f (\nabla_X Y)$.

Es diu que $\nabla_X Y$ és la derivada covariant de Y respecte a X.

(8.1.2) $(\nabla_X Y)(p)$ només depèn de:

- el valor de X en p;
- el valor de Y en un veïnat qualsevol de p.

D'acord amb la primera d'elles, està ben definit $\nabla_u Y$ per a $u \in \mathrm{T}M$ un vector tangent qualsevol.

(8.1.3) Sigui ∇ una connexió en M, i sigui $U \subset M$ un conjunt obert. Existeix una connexió ∇^U en U definida per la propietat següent: si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, ${\nabla^U}_{X|_U} Y|_U = (\nabla_X Y)|_U$.

La definició es pot fer així. Donats camps vectorials X', Y' en U i un punt $p \in U$, siguin X, Y camps vectorials en M que coincideixen amb X', Y' en un veïnat de p. Llavors es defineix $({\nabla^U}_{X'} Y')(p) = (\nabla_X Y)(p)$.

Sovint ometrem el superíndex i escriurem simplement $\nabla_{X'} Y'$.

[6] O connexió afí, per a distingir-ho d'altres conceptes de connexió.

(8.1.4) Sigui (U, φ) una carta de M. Els camps vectorials coordenats $\partial/\partial x^i$ defineixen una base de $\mathfrak{X}(U)$, i per tant es pot escriure

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Les funcions $\Gamma^k_{ij} \in \mathrm{C}^\infty(U)$ s'anomenen <u>símbols de Christoffel</u> de la connexió ∇ relatius a la base $\partial/\partial x^i$ (o a la carta (U, φ)).

Més generalment, sigui U un conjunt obert tal que el mòdul $\mathfrak{X}(U)$ té una base de camps vectorials (E_i), no necessàriament camps coordenats. Llavors també es pot escriure

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma^k_{ij} E_k,$$

per a certes funcions Γ^k_{ij} que també anomenarem símbols de Christoffel.

(8.1.5) Sigui M una varietat paral·lelitzable, de manera que el mòdul $\mathfrak{X}(M)$ té una base de camps vectorials (E_i). Fixada aquesta base, hi ha una bijecció entre el conjunt de les connexions ∇ en M i el conjunt de les famílies de funcions diferenciables (Γ^k_{ij}): una connexió té associats els símbols de Christoffel, i, recíprocament, donades unes funcions (Γ^k_{ij}) la fórmula

$$\nabla_X Y = \left(\mathscr{L}_X g^k + \Gamma^k_{ij} f^i g^j \right) E_k$$

per a $X = f^i E_i$ i $Y = g^j E_j$ camps vectorials diferenciables en M, defineix una connexió.

Dit altrament, els símbols de Christoffel determinen la connexió, en el sentit que permeten calcular la derivada covariant en l'obert on estan definits.

(8.1.6) *La connexió estàndard de* $\mathbf{R}^n$

La <u>connexió estàndard</u> de $\mathbf{R}^n$ és aquella on els símbols de Christoffel en el sistema de coordenades canònic valen zero, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0$.

(8.1.7) Sigui M una varietat i ∇ una connexió en M. Siguin (x^i), $(\bar{x}^\alpha)$ dos sistemes de coordenades sobre un conjunt obert de M, i siguin Γ^k_{ij}, $\bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$ els respectius símbols de Christoffel. Llavors

$$\Gamma^k_{ij} = \bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\gamma} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\delta}{\partial x^i \, \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\delta}.$$

(8.1.8) Una connexió *no* equival a un camp tensorial, els símbols de Christoffel *no* són els components d'un camp tensorial, i no té sentit dir que una connexió és nul·la. Les connexions formen un espai afí, no pas un espai vectorial.

(8.1.9) Siguin ∇^α connexions en una varietat, λ_α una família de funcions diferenciables tals que els seus suports formen un conjunt localment finit. Llavors $\nabla = \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla^\alpha$, entesa com $\nabla_X Y = \sum_\alpha \lambda_\alpha {\nabla^\alpha}_X Y$, és una connexió sii $\sum \lambda_\alpha = 1$.

(8.1.10) Tota varietat diferenciable paracompacta[7] té una connexió.

Recíprocament, es pot provar que l'existència d'una connexió implica que la varietat és paracompacta.

8.2 Derivació covariant de camps tensorials

En aquest apartat M és una varietat diferenciable i ∇ una connexió en M.

(8.2.1) Sigui X un camp vectorial diferenciable en M. Existeix una única aplicació $\nabla_X \colon \mathcal{T}^\bullet_\bullet(M) \to \mathcal{T}^\bullet_\bullet(M)$ de l'àlgebra dels camps tensorials diferenciables en ella mateixa tal que sobre funcions coincideix amb $\mathscr{L}_X$, sobre camps vectorials coincideix amb ∇_X, i satisfà les propietats següents:

i) És $\mathbf{R}$-lineal.
ii) Aplica $\mathcal{T}^k_\ell(M)$ en $\mathcal{T}^k_\ell(M)$.
iii) $\nabla_X(S \otimes T) = (\nabla_X S) \otimes T + S \otimes (\nabla_X T)$.
iv) Commuta amb les contraccions interiors

Aquestes propietats signifiquen que ∇_X és una derivació de la $\mathbf{R}$-àlgebra $\mathcal{T}^\bullet_\bullet(M)$, de grau $(0,0)$, que commuta amb les contraccions interiors.

(8.2.2) Es diu que $\nabla_X \colon \mathcal{T}^\bullet_\bullet(M) \to \mathcal{T}^\bullet_\bullet(M)$ és la <u>derivació covariant</u> definida per la connexió.

(8.2.3) El valor de $(\nabla_X T)(p)$ només depèn de $X(p)$ i del valor de T en un veïnat de p. Per tant, la derivació covariant també es pot aplicar a camps tensorials definits en un conjunt obert $U \subset M$.

(8.2.4) Les propietats anteriors permeten calcular ∇_X sobre qualsevol camp tensorial diferenciable a partir del seu coneixement sobre funcions i camps vectorials, i per exemple si $\alpha \in \mathcal{T}_1(M) = \Omega^1(M)$

$$\langle \nabla_X \alpha, Y \rangle = \nabla_X \langle \alpha, Y \rangle - \langle \alpha, \nabla_X Y \rangle.$$

[7] Això equival a afirmar que per a qualsevol recobriment obert de M hi ha una partició de la unitat subordinada, a que M és metritzable, i també a que tot component connex de M té base numerable d'oberts.

Més particularment,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathrm{d}x^j = -\Gamma^j_{ik} \mathrm{d}x^k.$$

(8.2.5) En coordenades, suposem que s'escriu

$$Y = Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad T = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_s} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}.$$

Llavors $\nabla_Y T = S^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_s} \otimes \partial/\partial x^{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial/\partial x^{i_r}$, essent $S^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = Y^k \left(\partial_k T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} + \sum_{n=1}^r T^{i_1 \ldots \ell \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \Gamma^{i_n}_{k\ell} - \sum_{n=1}^s T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots \ell \ldots j_s} \Gamma^{\ell}_{kj_n} \right)$.

(8.2.6) Donat un camp tensorial $T \in \mathcal{T}^r_s(M)$, l'aplicació ∇T definida per

$$(\nabla T)(X_1, \ldots, X_s, Y, \omega^1, \ldots, \omega^r) = (\nabla_Y T)(X_1, \ldots, X_s, \omega^1, \ldots, \omega^r).$$

defineix un camp tensorial $\nabla T \in \mathcal{T}^r_{s+1}(M)$, anomenat diferencial covariant de T. És habitual expressar ∇T en components com

$$\nabla T = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s ; k} \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_s} \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}},$$

essent $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s ; k} = \partial_k T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} + \sum_{n=1}^r T^{i_1 \ldots \ell \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \Gamma^{i_n}_{k\ell} - \sum_{n=1}^s T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots \ell \ldots j_s} \Gamma^{\ell}_{kj_n}$.
Si f és una funció, $\nabla f = \mathrm{d}f$.

8.3 Derivació covariant al llarg de camins

En aquest apartat M és una varietat diferenciable i ∇ una connexió en M.

(8.3.1) Recordem que un camp vectorial al llarg d'una aplicació $F \colon N \to M$ és una aplicació $Z \colon N \to \mathrm{T}M$ tal que, per a tot $q \in N$, $Z(q) \in \mathrm{T}_{F(q)}M$. És a dir, $\tau_M \circ Z = F$.

Els camps vectorials al llarg de F diferenciables constitueixen un $\mathrm{C}^\infty(N)$-mòdul que podem denotar per $\mathfrak{X}(F)$.

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, llavors $Z = X \circ F$ és un camp vectorial al llarg de F; però en general no tot camp vectorial al llarg de F es pot definir així.

Ens interessarà particularment el cas d'un camí diferenciable $\gamma \colon I \to M$ i el $\mathrm{C}^\infty(I)$-mòdul dels camps vectorials diferenciables al llarg de γ, $\mathfrak{X}(\gamma)$. Un dels seus elements destacats és la velocitat del camí, $\gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

(8.3.2) Donats camps vectorials $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, el valor de $(\nabla_X Y)(p)$ en un punt p depèn de $X(p)$ i del valor de Y en un veïnat de p. Però en realitat basta conèixer el valor de Y al llarg d'un camí γ tal que $\gamma'(0) = X(p)$. Efectivament, si $X = f^i \partial/\partial x^i$ i $Y = g^j \partial/\partial x^j$, hem calculat $\nabla_X Y =$

$\big(\mathscr{L}_X g^k + \Gamma^k_{ij} f^i g^j\big)\, \partial/\partial x^k$, i això en el punt p requereix simplement conèixer $(\mathscr{L}_X g^k)(p) = \mathrm{D}(g^k \circ \gamma)(0)$. Podem escriure doncs

$$\nabla_{\gamma'(t)} Y = \big(\mathrm{D}(g^k \circ \gamma)(t) + \Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\, \mathrm{D}\tilde{\gamma}^i(t)\, (g^j \circ \gamma)(t)\big)\, \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{\gamma(t)},$$

essent $\tilde{\gamma}$ l'expressió local de γ.

(8.3.3) Sigui $\gamma\colon I \to M$ un camí diferenciable. Aleshores existeix una única aplicació $\nabla_t\colon \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$ que compleix les propietats següents:

i) És $\mathbf{R}$-lineal.

ii) Si $f \in \mathrm{C}^\infty(I)$, $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$, llavors

$$\nabla_t(f\mathbf{w}) = \mathrm{D}f\, \mathbf{w} + f\, \nabla_t \mathbf{w}.$$

iii) Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_t(Y \circ \gamma)(t) = \nabla_{\gamma'(t)} Y.$$

(8.3.4) Diem que $\nabla_t \mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$ és la <u>derivada covariant</u> de $\mathbf{w}$ <u>al llarg</u> de γ.

Altres possibles notacions: $\nabla_t \mathbf{w} = \nabla^\gamma_t \mathbf{w} = \nabla_{\gamma'(t)} \mathbf{w} = \nabla_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} \mathbf{w} = \dfrac{\nabla}{\mathrm{d}t}\mathbf{w}$.

(8.3.5) Considerem una carta (U, φ) en M, tal que $\gamma(I) \subset U$. Llavors una base de $\mathfrak{X}(\gamma)$ està formada pels camps vectorials al llarg de γ definits pels camps vectorials coordenats: $\partial/\partial x^i \circ \gamma$.

Sigui $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Es pot expressar $\mathbf{w} = w^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma$, on $w^i\colon I \to \mathbf{R}$. Escrivim també $\gamma' = \dot{q}^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma$ (essent $(q^i(t))$ l'expressió local de $\gamma(t)$). Llavors

$$\nabla_t \mathbf{w} = \left(\dot{w}^k + (\Gamma^k_{ij} \circ \gamma)\, \dot{q}^i\, w^j\right) \frac{\partial}{\partial x^k} \circ \gamma.$$

(8.3.6) De manera anàloga al concepte de camp vectorial al llarg d'una aplicació, es defineix <u>camp tensorial de tipus (r, s) al llarg d'una aplicació</u> $F\colon N \to M$ com una aplicació $Z\colon N \to \mathsf{Tens}^r_s(\mathrm{T}M)$ tal que, per a tot $q \in N$, $Z(q) \in \mathsf{Tens}^r_s(\mathrm{T}_{F(q)}M)$

Els camps tensorials al llarg de F de tipus (r, s) diferenciables constitueixen un $\mathrm{C}^\infty(N)$-mòdul que denotarem per $\mathcal{T}^r_s(F)$.

En una base coordenada apropiada $Z \in \mathcal{T}^r_s(F)$ s'expressa

$$Z|_V =$$
$$= Z^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}\, (\mathrm{d}x^{j_1} \circ F) \otimes \ldots \otimes (\mathrm{d}x^{j_s} \circ F) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \circ F\right) \otimes \ldots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \circ F\right),$$

essent $Z^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}\colon V \to \mathbf{R}$ funcions diferenciables en un conjunt obert $V \subset N$.

Ens interessarà particularment el cas d'un camí diferenciable $\gamma\colon I \to M$ i els $\mathrm{C}^\infty(I)$-mòduls dels camps tensorials diferenciables al llarg de γ, $\mathcal{T}^r_s(\gamma)$.

(8.3.7) La derivació covariant de camps tensorials diferenciables al llarg d'un camí $\gamma\colon I \to M$ es defineix tal com amb camps tensorials en M, i dóna lloc a una derivació $\nabla_t\colon \mathcal{T}^\bullet_\bullet(\gamma) \to \mathcal{T}^\bullet_\bullet(\gamma)$ de la $\mathbf{R}$-àlgebra $\mathcal{T}^\bullet_\bullet(\gamma)$, de grau $(0,0)$, que commuta amb les contraccions interiors, i que estén la derivació ordinària de $f \in \mathrm{C}^\infty(I)$ i la derivació covariant de $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

Si $Z \in \mathcal{T}^\bullet_\bullet(\gamma)$, llavors $\nabla_t Z \in \mathcal{T}^\bullet_\bullet(\gamma)$ s'anomena derivada covariant de Z al llarg de γ.

(8.3.8) Les propietats donades permeten calcular la derivada covariant de qualsevol camp tensorial al llarg de γ.

Per exemple, si $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^1(\gamma)$ és una 1-forma diferencial al llarg de γ, i $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$, llavors

$$\mathrm{D}\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w} \rangle = \langle \nabla_t \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w} \rangle + \langle \boldsymbol{\alpha}, \nabla_t \mathbf{w} \rangle.$$

En coordenades, si $\boldsymbol{\alpha} = A_i \,\mathrm{d}x^i \circ \gamma$,

$$\nabla_t \boldsymbol{\alpha} = \left(\dot{A}_j - (\Gamma^k_{ij} \circ \gamma)\, \dot{q}^i A_k \right) \mathrm{d}x^j \circ \gamma\,.$$

8.4 Transport paral·lel i geodèsiques

En aquest apartat M és una varietat diferenciable i ∇ una connexió en M.

(8.4.1) Sigui $\gamma\colon I \to M$ un camí diferenciable. Un camp vectorial al llarg de γ diferenciable, $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$, es diu paral·lel si la seva derivada covariant al llarg de γ és nul·la,

$$\nabla_t \mathbf{w} = 0\,.$$

(8.4.2) Siguin M, ∇, $\gamma\colon I \to M$ com abans. Donats $t_\circ \in I$ i $\mathbf{w}_\circ \in \mathrm{T}_{\gamma(t_\circ)}M$, existeix un únic $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$ paral·lel tal que $\mathbf{w}(t_\circ) = \mathbf{w}_\circ$.

(8.4.3) Es diu que $\mathbf{w}$ és el transport paral·lel del vector $\mathbf{w}_\circ$ al llarg de γ (respecte a la connexió ∇).

(8.4.4) Amb les mateixes notacions, l'aplicació $\mathrm{T}_{\gamma(t_\circ)}M \to \mathfrak{X}(\gamma)$ definida per $\mathbf{w}_\circ \mapsto \mathbf{w}$ és lineal.

Si $(\mathbf{e}_i)$ és una base de $\mathrm{T}_{\gamma(t_\circ)}M$ i $\mathbf{w}_i$ són els corresponents transports paral·lels, llavors:

- Per a tot $t \in I$, $(\mathbf{w}_i(t))$ és una base de $\mathrm{T}_{\gamma(t)}M$.
- $(\mathbf{w}_i)$ és una base del $\mathrm{C}^\infty(I)$-mòdul $\mathfrak{X}(\gamma)$.

(8.4.5) Sigui $P_{t_\circ t}\colon \mathrm{T}_{\gamma(t_\circ)}M \to \mathrm{T}_{\gamma(t)}M$ l'operador de transport paral·lel al llarg de γ. Donat qualsevol $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$,

$$\nabla_t \mathbf{w}(t_\circ) = \lim_{t \to t_\circ} \frac{P_{t_\circ t}^{-1} \cdot \mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(t_\circ)}{t - t_\circ},$$

de manera que el transport paral·lel determina la derivada covariant al llarg de γ.

(8.4.6) Un camí diferenciable $\gamma\colon I \to M$ es diu <u>geodèsica</u> de la connexió ∇ si γ' és paral·lel al llarg de γ:

$$\nabla_t \gamma' = 0.$$

Si en coordenades γ s'expressa $(q^i(t))$, llavors γ és una geodèsica sii se satisfà l'equació diferencial de segon ordre

$$\ddot{q}^k + (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma)\, \dot{q}^i\, \dot{q}^j = 0.$$

(8.4.7) Donat un punt $v_p \in \mathrm{T}_pM$, hi ha una única geodèsica maximal amb condició inicial v_p.

(8.4.8) Més endavant es veurà que les geodèsiques de ∇ es corresponen amb les corbes integrals d'un cert camp vectorial S en $\mathrm{T}M$, l'*esprai geodèsic* de ∇.

(8.4.9) Sigui $\gamma\colon I \to M$ una geodèsica, i $\varphi\colon J \to I$ un difeomorfisme entre intervals oberts de $\mathbf{R}$. El camí reparametritzat $\gamma \circ \varphi$ és una geodèsica sii φ és una afinitat.

(8.4.10) Un camp vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es diu <u>paral·lel</u> si és paral·lel al llarg de qualsevol camí diferenciable.
És el mateix dir que $\nabla_v Y = 0$ per a tot vector v, que $\nabla_X Y = 0$ per a tot camp vectorial X, o que $\nabla Y = 0$.

(8.4.11) Es defineix igualment el concepte de <u>camp tensorial paral·lel</u> al llarg d'un camí: $\nabla_t Z = 0$.
Anàlogament es defineix el concepte de camp tensorial $T \in \mathcal{T}^\bullet_\bullet(M)$ paral·lel: $\nabla_v T = 0$ per a tot $v \in \mathrm{T}M$, $\nabla_X T = 0$ per a tot camp vectorial X, o simplement $\nabla T = 0$.

8.5 Torsió i curvatura d'una connexió

En aquest apartat M és una varietat diferenciable i ∇ una connexió en M.

(8.5.1) L'aplicació $T\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definida per

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

és $\mathrm{C}^\infty(M)$-bilineal (i antisimètrica), per tant equival a un camp tensorial $T \in \mathcal{T}^1_2(M)$, anomenat tensor de torsió de la connexió.

(8.5.2) Una connexió es diu simètrica (o sense torsió) quan la seva torsió és nul·la.

(8.5.3) Considerem una referència local (E_i) de camps vectorials diferenciables, i sigui (E^i) la referència dual. Si Γ^k_{ij} són els corresponents símbols de Christoffel, i $[E_i, E_j] = c^k_{ij} E_k$, llavors

$$T = T^k_{ij}\, E^i \otimes E^j \otimes E_k \,, \quad \text{amb } T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} - c^k_{ij} \,.$$

Per tant ∇ és simètrica sii en una referència *coordenada* els Γ^k_{ij} són simètrics en (i,j).

(8.5.4) Dues connexions en M són iguals sii tenen les mateixes geodèsiques i la mateixa torsió.

Donada una connexió en M n'hi ha una altra, única, que té les mateixes geodèsiques i torsió nul·la.

(8.5.5) L'aplicació $R\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definida per

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

és $\mathrm{C}^\infty(M)$-trilineal (i antisimètrica en (X,Y)), per tant equival a un camp tensorial $R \in \mathcal{T}^1_3(M)$, anomenat tensor de curvatura de la connexió.

(8.5.6) Considerem una referència local (E_i) de camps vectorials. Si Γ^k_{ij} són els corresponents símbols de Christoffel, i $[E_i, E_j] = c^k_{ij} E_k$, llavors

$$R = R^\ell_{ijk} E^i \otimes E^j \otimes E^k \otimes E_\ell \,,$$

$$\text{amb } R^\ell_{ijk} = \Gamma^\ell_{jk,i} - \Gamma^\ell_{ik,j} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^\ell_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^\ell_{jm} - c^m_{ij}\Gamma^\ell_{mk} \,.$$

(8.5.7) Si la torsió de ∇ és nul·la, llavors $R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$ (identitat de Bianchi algebraica).

(8.5.8) Una connexió es diu plana si el seu tensor de curvatura és nul.

(8.5.9) Sigui una varietat dotada d'una connexió. Les condicions següents són equivalents:

- La connexió és plana.
- Al voltant de qualsevol punt hi ha una base de camps vectorials coordenats paral·lels.

- El transport paral·lel entre dos punts al llarg d'un camí que els uneixi dins un conjunt obert difeomorf a una bola no depèn del camí triat.

9 Varietats pseudoriemannianes

D'ara endavant, llevat d'indicació contrària, suposarem que totes les aplicacions són de classe C^∞. Tanmateix, moltes de les operacions considerades es poden efectuar amb graus de diferenciabilitat finits.

9.1 Varietats pseudoriemannianes

(9.1.1) Sigui M una varietat diferenciable. Una mètrica pseudoriemanniana (o semiriemanniana) en M és un camp tensorial $g \in \mathcal{T}_2(M)$ 2-covariant, simètric i no-degenerat.

Aquestes dues darreres propietats signifiquen que, en cada $p \in M$, $g_p \in \mathrm{T}_p^*M \otimes \mathrm{T}_p^*M$ defineix una mètrica en l'espai tangent T_pM, és a dir, una forma bilineal simètrica no-degenerada. $g_p \colon \mathrm{T}_pM \times \mathrm{T}_pM \to \mathbf{R}$.

(9.1.2) Es diu mètrica riemanniana si g és definit positiu. És a dir, si en cada punt g_p és un producte escalar en T_pM.

(9.1.3) Una mètrica lorentziana és una mètrica de signatura $(1, m-1)$ (o $(m-1, 1)$).

(9.1.4) Una varietat pseudoriemanniana [riemanniana, lorentziana] és una varietat dotada d'una mètrica pseudoriemanniana [riemanniana, lorentziana].

(9.1.5) Algunes notacions:

- $(u_p|v_p) = g_p(u_p, v_p)$, essent $u_p, v_p \in \mathrm{T}_pM$.
- $\|v_p\| = \sqrt{(v_p|v_p)}$ si $(v_p|v_p) \geq 0$.
- $(X|Y) = g(X, Y) \colon M \to \mathbf{R}$, essent $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Dos vectors $u, v \in \mathrm{T}_pM$ són ortogonals si $(u|v) = 0$.

Dos camps vectorials X, Y són ortogonals si ho són en tot punt, és a dir, si $(X|Y) = 0$.

En el cas riemannià també podem parlar de l'angle entre dos vectors no nuls $u, v \in \mathrm{T}_pM$: és un nombre θ tal que $\cos\theta = (u|v)/\|u\|\|v\|$.

(9.1.6) Expressió local en una carta (U, φ). Si $g_{ij} = (\partial/\partial x^i|\partial/\partial x^j)$, llavors $g|_U = g_{ij}\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$. La matriu (g_{ij}) és en tot $p \in U$ simètrica no-degenerada (i definida positiva en el cas riemannià).

Més generalment, sigui (E_i) una base de camps vectorials en un obert U. Llavors $g|_U = g_{ij}\, E^i \otimes E^j$, essent $g_{ij} = (E_i|E_j)$, i (E^i) la base dual de (E_i).

(9.1.7) *La mètrica estàndard de* $\mathbf{R}^n$

La mètrica riemanniana estàndard de $\mathbf{R}^n$ és $g = \delta_{ij}\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ en el sistema de coordenades canònic.

(9.1.8) *L'espai de Minkowski*

L'espai de Minkowski és la varietat lorentziana donada per l'espai $\mathbf{R}^n$ i la mètrica de Minkowski: $g = \eta_{ij}\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$, on $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1)$ (o amb el signe oposat).

(9.1.9) Si $j \colon N \hookrightarrow M$ és una subvarietat immersa d'una varietat riemanniana amb mètrica g, llavors $j^*(g)$ és una mètrica riemanniana en N.

Aquest resultat pot ser fals si g és pseudoriemanniana.

(9.1.10) Una isometria [isometria local] entre dues varietats pseudoriemannianes (M_1, g_1) i (M_2, g_2) és un difeomorfisme [difeomorfisme local] $F \colon M_1 \to M_2$ tal que $F^*(g_2) = g_1$.

(9.1.11) Una isometria d'una varietat pseudoriemanniana (M, g) és un difeomorfisme de M en ella mateixa que deixa la mètrica invariant.

Una isometria infinitesimal o camp de Killing és un camp vectorial X en M tal que els difeomorfismes F^t definits pel seu flux són isometries.

(9.1.12) X és una isometria infinitesimal de (M, g) sii $\mathscr{L}_X g = 0$.

(9.1.13) Tota varietat diferenciable paracompacta admet una mètrica riemanniana.

(9.1.14) Es pot provar que una varietat paracompacta M admet una mètrica lorentziana sii hi existeix un camp vectorial diferenciable sense punts crítics. Suposant M connexa, això es compleix sii M és no compacta o bé té característica d'Euler–Poincaré nul·la.

9.2 Algunes construccions en varietats pseudoriemannianes

En aquest apartat (M, g) és una varietat pseudoriemanniana.

(9.2.1) La mètrica en cada punt $p \in M$ defineix un isomorfisme d'espais vectorials

$$\hat{g}_p \colon \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}^*_p M, \quad \langle \hat{g}_p(u_p), v_p \rangle = g(u_p, v_p).$$

Globalment això defineix un difeomorfisme

$$\hat{g} \colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^* M\,,$$

que de fet és un isomorfisme de fibrats vectorials.

Aquest isomorfisme es trasllada als mòduls de seccions: l'aplicació

$$\mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M), \quad X \mapsto \hat{g} \circ X \equiv X^\flat$$

és un isomorfisme, amb invers $\theta \mapsto \hat{g}^{-1} \circ \theta \equiv \theta^\sharp$.

(9.2.2) En coordenades l'isomorfisme $\hat{g}\colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^*M$ s'expressa $(x^i, v^i) \mapsto (x^i, v^i g_{ij}(x))$, i el seu invers $(x^i, \alpha_i) \mapsto (x^i, \alpha_i g^{ij}(x))$, essent (g^{ij}) la matriu inversa de (g_{ij}): $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$.

És freqüent escriure per exemple $v_j = v^i g_{ij}$, etc. Aquest fet d'abaixar i apujar els índexs justifica la notació $v^\flat$, $\alpha^\sharp$, i que aquests isomorfismes s'anomenin *isomorfismes musicals.*

(9.2.3) Més generalment, els isomorfismes musicals definits per una mètrica permeten abaixar o apujar índexs qualssevol en un camp tensorial. Els camps tensorials obtinguts d'aquesta manera a vegades són dits geomètricament equivalents.

(9.2.4) Donada una funció $f\colon M \to \mathbf{R}$, el gradient de f és el camp vectorial

$$\operatorname{grad} f = \hat{g}^{-1} \circ \mathrm{d}f.$$

Per tant, $(\operatorname{grad} f | X) = \langle \mathrm{d}f, X \rangle$.

En coordenades, $\operatorname{grad} f = g^{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x^i} \dfrac{\partial}{\partial x^j}$.

(9.2.5) En una varietat pseudoriemanniana (M, g) existeix una mesura canònica v_g, anomenada volum riemannià.

En el domini d'una carta (U, φ), la integral d'una funció $f\colon U \to \mathbf{R}$ ve donada en termes de la seva expressió local per

$$\int_U f \, \mathrm{d}v_g = \int_{\varphi(U)} \widetilde{f}(x^1, \ldots, x^m) \sqrt{|\det(g_{ij})|} \, \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^m,$$

on (g_{ij}) és la matriu de g en la carta donada.

(9.2.6) En el cas de ser M *orientada* aquesta mesura ve induïda per una forma de volum canònica Ω_g, també anomenada forma de volum riemannià. En una carta corresponent a l'orientació de M s'expressa

$$\Omega_g = \sqrt{|\det(g_{ij})|} \, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m.$$

9.3 La connexió de Levi-Civita

En aquest apartat (M, g) és una varietat pseudoriemanniana.

(9.3.1) Una connexió ∇ en M es diu riemanniana si la mètrica és un camp tensorial paral·lel, és a dir, $\nabla g = 0$.
Això també es pot expressar dient que $\nabla_X g = 0$ per a tot camp vectorial X, i també de la manera següent: per a qualssevol $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\mathscr{L}_X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

(9.3.2) Que una connexió ∇ sigui riemanniana també equival al següent: donats un camí $\gamma\colon I \to M$ i $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$ qualssevol, es compleix

$$\mathrm{D}(\mathbf{v}|\mathbf{w}) = (\nabla_t \mathbf{v}|\mathbf{w}) + (\mathbf{v}|\nabla_t \mathbf{w}).$$

En aquestes condicions, si $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ són paral·lels llavors $(\mathbf{v}|\mathbf{w})$ és constant, i doncs el transport paral·lel és una isometria.
En particular, si γ és una geodèsica llavors $(\gamma'|\gamma')$ és constant.

(9.3.3) *Teorema fonamental de la geometria riemanniana*
En una varietat pseudoriemanniana existeix una única connexió riemanniana sense torsió.
Aquesta connexió està definida per la fórmula de Koszul:

$$2(\nabla_X Y|Z) = \mathscr{L}_X(Y|Z) + \mathscr{L}_Y(X|Z) - \mathscr{L}_Z(X|Y) + \\ + ([X,Y]|Z) + ([Z,X]|Y) + ([Z,Y]|X)\,.$$

(9.3.4) La connexió definida s'anomena connexió de Levi-Civita de (M, g). Si no es diu el contrari, sempre que tinguem una varietat pseudoriemanniana la considerarem dotada de la connexió de Levi-Civita.

(9.3.5) Donada una carta de M, en la corresponent base de camps vectorials coordenats, els símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita són

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right).$$

També s'escriuen $\Gamma^k_{ij} = g^{k\ell}[ij,\ell]$, on els $[ij,\ell] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right)$ s'anomenen *símbols de Christoffel de primera espècie.*

9.4 Subvarietats d'una varietat riemanniana

(9.4.1) Sigui $j\colon M \hookrightarrow \widetilde{M}$ una subvarietat immersa d'una varietat riemanniana amb mètrica $\tilde{g}$ i connexió de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$. Llavors $g = j^*(\tilde{g})$ és una mètrica riemanniana en M.

(9.4.2) La inclusió permet identificar T_pM com a subespai de $\mathrm{T}_{j(p)}\widetilde{M}$ per a tot $p \in M$. Tenim una descomposició

$$\mathrm{T}_{j(p)}\widetilde{M} = \mathrm{T}_pM \oplus (\mathrm{T}_pM)^\perp$$

en suma directa de subespais ortogonals. Amb ella doncs tot vector $w \in \mathrm{T}_{j(p)}\widetilde{M}$ es descompon en suma $w = w^\top + w^\perp$ de part tangent més part normal.

(9.4.3) Considerem dos camps vectorials X, Y en M. En un veïnat de cada punt $p \in M$ els podem estendre a camps vectorials definits en un obert de $\widetilde{M}$, i usar la connexió de $\widetilde{M}$ per a calcular $\widetilde{\nabla}_X Y$; podem usar aquesta notació ja que el valor d'aquesta expressió en cada punt de M no depèn de les extensions usades. Tenim doncs un camp vectorial $\widetilde{\nabla}_X Y \colon M \to \widetilde{M}$ al llarg de la inclusió. Podem descompondre'l com a suma d'un camp vectorial tangent a M i un camp vectorial normal a M:

$$\widetilde{\nabla}_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top + (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp .$$

(9.4.4) *La connexió de Levi-Civita d'una subvarietat*

L'expressió

$$\nabla_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top$$

defineix una connexió en M, que coincideix amb la connexió de Levi-Civita de g.

(9.4.5) L'expressió

$$I\!I(X,Y) = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp$$

és $\mathrm{C}^\infty(M)$-bilineal i simètrica.

Per a cada punt $p \in M$ l'aplicació $I\!I$ defineix doncs una aplicació bilineal simètrica $\mathrm{T}_pM \times \mathrm{T}_pM \to (\mathrm{T}_pM)^\perp$ anomenada segona forma fonamental de M.

Per definició tenim doncs la *fórmula de Gauss*:

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + I\!I(X,Y) .$$

Si N és un camp vectorial normal a M es compleix l'*equació de Weingarten*

$$(\widetilde{\nabla}_X N | Y) = -(N | I\!I(X,Y)) .$$

(9.4.6) Suposem ara que M i $\widetilde{M}$ són varietats orientades i que M és una hipersuperfície en $\widetilde{M}$. En aquest cas hi ha un únic camp vectorial normal unitari N en M tal que, si $(X_1, \ldots, X_m)$ és una base positiva de M, $(X_1, \ldots, X_m, N)$ és una base positiva de $\widetilde{M}$.

En aquestes condicions es pot reemplaçar la segona forma fonamental vectorial $I\!I$ per una segona forma fonamental escalar

$$h(X,Y) = (I\!I(X,Y)|N)\,,$$

és a dir, tal que $I\!I(X,Y) = h(X,Y)N$.

Hem definit doncs un camp tensorial 2-covariant simètric h en M. En cada punt, associat a la forma quadràtica h a través de la mètrica g, hi ha un endomorfisme simètric S de cada espai tangent T_pM, a vegades anomenat *aplicació de Weingarten*. Per definició, $(S(X)|Y) = h(X,Y)$. Els valors propis de S es diuen *curvatures principals*. El producte de totes elles s'anomena *curvatura gaussiana*: $K = \det(S)$.

La teoria de les superfícies de $\mathbf{R}^3$ es pot continuar desenvolupant seguint les línies esbossades ...

(9.4.7) Sigui M una varietat riemanniana i $C \subset M$ una corba connexa orientada. Es pot parametritzar C localment amb un camí $c\colon I \to M$ tal que $\|c'\| = 1$ (*paràmetre arc*) amb l'orientació de C. Sigui $\mathbf{t} = c' \in \mathfrak{X}(c)$ el vector tangent: per a cada $s \in I$ $\mathbf{t}(s)$ és una base positiva de $\mathrm{T}_{c(s)}C$. Suposem que els vectors $(\mathbf{t}, \nabla_s\mathbf{t}, \ldots, \nabla_s^{m-1}\mathbf{t})$ són linealment independents en un $s_\circ \in I$. Aplicant-hi el procediment d'otonormalització de Gram-Schmidt obtenim una base ortonormal $(\mathbf{f}_1(s), \ldots, \mathbf{f}_m(s))$ de $\mathrm{T}_{c(s)}M$ per a s en un veïnat de $s_\circ$. És la referència de Frenet. Les derivades covariants d'aquests vectors són combinacions lineals d'ells mateixos amb uns coeficients dits curvatures: són les fórmules de Frenet–Serret. Etc.

(9.4.8) *Teorema d'embedding de Nash*

Tota varietat riemanniana amb base numerable d'oberts és isomètrica a una subvarietat d'un $\mathbf{R}^N$.

9.5 Curvatura en una varietat pseudoriemanniana

En aquest apartat (M,g) és una varietat pseudoriemanniana.

(9.5.1) *El tensor de Riemann*

Sigui R el tensor de curvatura de la connexió de Levi-Civita de g. El tensor de curvatura de Riemann és el camp tensorial $\mathrm{Rie} \in \mathcal{T}_4(M)$ obtingut abaixant l'índex contravariant de R al darrer lloc:

$$\mathrm{Rie}(X,Y,Z,W) = (R(X,Y)Z|W).$$

En una base de camps vectorials, $\mathrm{Rie} = R_{ijk\ell}E^i \otimes \ldots \otimes E^\ell$, on $R_{ijk\ell} = R_{ijk}^n g_{n\ell}$.

Hi ha diversos convenis possibles en aquesta definició; per les simetries de Rie, el resultat final pot diferir en un signe.

(9.5.2) Una varietat riemanniana és plana si és localment isomètrica a l'espai euclidià.

(9.5.3) Una varietat riemanniana és plana sii la seva connexió de Levi-Civita és plana (és a dir, el seu tensor de curvatura és nul).

(9.5.4) *El tensor de Ricci*
El tensor de curvatura de Ricci és el camp tensorial $\mathrm{Ric} \in \mathcal{T}_2(M)$ obtingut fent la contracció interior del primer índex covariant de R amb el seu índex contravariant:

$$\mathrm{Ric} = c_1^1(R).$$

En una base de camps vectorials, $\mathrm{Ric} = R_{jk} E^j \otimes E^k$, on $R_{jk} = R^i_{ijk}$.
Aquí també hi ha diversos convenis possibles en la definició, que poden produir canvis de signe.

(9.5.5) *La curvatura escalar*
La curvatura escalar és la funció $S \in \mathrm{C}^\infty(M)$ obtinguda fent la traça del tensor de Ricci:

$$S = \mathrm{tr}_g(\mathrm{Ric}) = \mathrm{tr}(\mathrm{Ric}^\sharp).$$

En coordenades, $S = R^k_k = g^{kj} R_{jk}$.

(9.5.6) En el cas d'una superfície els tensors esmentats tenen un sol component independent que és, essencialment, la curvatura gaussiana de la superfície. De fet, el *theorema egregium* és conseqüència de la fórmula $K = \dfrac{\mathrm{Rie}(X,Y,Y,X)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - (X|Y)^2}$ per a (X,Y) una base arbitrària de l'espai tangent.

9.6 Distància en una varietat riemanniana

(9.6.1) Sigui M una varietat pseudoriemanniana, $\gamma\colon I \to M$ un camí de classe C^1 a trossos i tal que $(\gamma'|\gamma') \geq 0$. La longitud (o llargada) de γ és

$$\ell(\gamma) = \int_I \|\gamma'\|.$$

La longitud és invariant per reparametritzacions: si $\varphi\colon J \to I$ és un difeomorfisme entre intervals oberts de $\mathbf{R}$, $\ell(\gamma \circ \varphi) = \ell(\gamma)$.

(9.6.2) Sigui M una varietat riemanniana connexa. Donats $p, q \in M$, sigui

$$\mathrm{d}(p,q) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ camí } \mathrm{C}^1 \text{ a trossos de } p \text{ a } q\}$$

Aleshores d és una distància que defineix la topologia de M.

(9.6.3) Aquesta distància s'anomena la distància riemanniana de M.

(9.6.4) Sigui M una varietat diferenciable (separada) connexa, però no necessàriament paracompacta. Les condicions següents són equivalents:

- M admet una mètrica riemanniana.
- M és metritzable.
- M té base numerable d'oberts.
- M és paracompacta.

(9.6.5) Una varietat riemanniana connexa es diu geodèsicament completa si les seves geodèsiques estan definides en tot $\mathbf{R}$.

(9.6.6) *Teorema de Hopf–Rinow*

Sigui M una varietat riemanniana connexa, d la seva distància riemanniana. Les condicions següents són equivalents:

- Els conjunts tancats i fitats (per d) són compactes.
- L'espai mètric M és complet.
- M és geodèsicament completa.

En aquestes condicions, donats $p, q \in M$ existeix una geodèsica que els uneix, de longitud $\mathrm{d}(p,q)$.

10 Varietats simplèctiques

Totes les varietats i aplicacions se suposaran de classe C^∞.

10.1 Varietats simplèctiques. Teorema de Darboux

(10.1.1) Sigui M una varietat diferenciable. Una forma simplèctica en M és una 2-forma diferencial $\omega \in \Omega^2(M)$ tancada ($\mathrm{d}\omega = 0$) i no-degenerada.
Per a cada $p \in M$, $\omega_p \in \Lambda^2 \mathrm{T}_p^* M$ defineix una forma bilineal alternada en $\mathrm{T}_p M$, $\omega_p \colon \mathrm{T}_p M \times \mathrm{T}_p M \to \mathbf{R}$. Que sigui no-degenerada significa que l'aplicació lineal $\widehat{\omega}_p \colon \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_p^* M$ deduïda, $\widehat{\omega}_p(u_p) = \omega_p(u_p, \cdot)$, és un isomorfisme

(10.1.2) Una varietat simplèctica és una varietat dotada d'una forma simplèctica.

(10.1.3) Una forma simplèctica ω és localment exacta. Quan ho és globalment, es diu que la varietat simplèctica és exacta. Si $\omega = \mathrm{d}\theta$, es diu que θ és un potencial simplèctic de ω.

(10.1.4) Sigui (M, ω) una varietat simplèctica.

- $\dim M$ és parella, $m = 2n$.
- L'aplicació $\widehat{\omega} \colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^*M$, $v \mapsto i_v \omega$, és un isomorfisme de fibrats vectorials.
- L'aplicació $\mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$, $X \mapsto i_X \omega = \widehat{\omega} \circ X$, és un isomorfisme de $C^\infty(M)$-mòduls.
- M és orientable. Com a forma de volum es pot prendre $\Omega = \omega \wedge \overset{n}{\ldots} \wedge \omega$, $\Omega = \frac{1}{n!}\, \omega^{\wedge n}$, o també $\Omega = (-1)^{[n/2]} \frac{1}{n!}\, \omega^{\wedge n}$.

(10.1.5) $\mathbf{R}^{2n}$ té una forma simplèctica canònica,

$$\omega = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^{n+1} + \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^{n+2} + \ldots + \mathrm{d}x^n \wedge \mathrm{d}x^{2n} ,$$

o també $\omega = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4 + \ldots + \mathrm{d}x^{2n-1} \wedge \mathrm{d}x^{2n}$.

(10.1.6) Si N és una varietat diferenciable qualsevol, el seu fibrat cotangent T^*N està dotat d'una forma simplèctica canònica, $\omega_N = -\mathrm{d}\theta_N$.

(10.1.7) Sigui (U, φ) una carta de M, amb funcions coordenades $\varphi = (z^1, \ldots, z^m)$.
Si $\omega_{ij} = \omega(\partial/\partial z^i, \partial/\partial z^j)$, llavors $\omega|_U = \frac{1}{2}\, \omega_{ij}\, \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}z^j$. La matriu (ω_{ij}) és en tot punt antisimètrica i no-degenerada.
Si $X = f^i\, \partial/\partial z^i$, $i_X \omega = f^i \omega_{ij}\, \mathrm{d}z^j$

En les coordenades naturals corresponents dels fibrats tangent i cotangent, l'expressió local de $\widehat{\omega}$ és $\widehat{\omega}(z^i, u^i) = (z^i, u^i \omega_{ij})$.

(10.1.8) *Teorema de Darboux*
Sigui (M, ω) una varietat simplèctica de dimensió $2n$. Per a tot punt $p \in M$ existeix una carta $(U, (x^i, y_i))$ en p tal que

$$\omega|_U = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}y_i \,.$$

Una tal carta es diu carta simplèctica, i les coordenades es diuen simplèctiques, o de Darboux.

(10.1.9) Aquest teorema afirma que tota varietat simplèctica és localment isomorfa a $\mathbf{R}^{2n}$ amb la seva forma simplèctica canònica. Això implica que, a diferència de la geometria riemanniana, en la geometria simplèctica no hi ha invariants locals altres que la dimensió.

(10.1.10) No hi ha una caracterització simple de les varietats que admeten una estructura simplèctica. No tota varietat orientable de dimensió parella n'admet. Per exemple, si M és compacta, cal $\mathrm{H}^2_{\mathrm{dR}}(M) \neq 0$.

10.2 Camps vectorials hamiltonians

En aquest apartat (M, ω) és una varietat simplèctica.

(10.2.1) Considerem l'isomorfisme $\widehat{\omega} \colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^*M$. Donada una funció $h \colon M \to \mathbf{R}$ es defineix el camp hamiltonià o gradient simplèctic de h com el camp vectorial

$$X_h = \widehat{\omega}^{-1} \circ \mathrm{d}h \,.$$

En altres termes,

$$i_{X_h} \omega = \mathrm{d}h \,.$$

(10.2.2) Es diu que h és la funció hamiltoniana de X_h. Està determinada per X_h llevat d'una funció localment constant.

(10.2.3) Un camp vectorial X en M es diu hamiltonià si és el camp hamiltonià d'una funció.
Un camp vectorial es diu localment hamiltonià si cada punt té un veïnat obert sobre el qual X és hamiltonià.
Denotem per $\mathfrak{X}_{\mathrm{h}}(M) \subset \mathfrak{X}_{\mathrm{lh}}(M) \subset \mathfrak{X}(M)$ els subespais vectorials dels camps vectorials hamiltonians i localment hamiltonians.

(10.2.4) Sigui $X \in \mathfrak{X}(M)$. Les tres afirmacions següents són equivalents:

- X és localment hamiltonià.
- $i_X\omega$ és una 1-forma diferencial tancada.
- $\mathscr{L}_X\omega = 0$.

(10.2.5) *Teorema de Liouville*

La forma de volum simplèctica Ω és invariant pels camps vectorials localment hamiltonians.

(10.2.6) Per a cada $p \in M$, els valors dels camps vectorials hamiltonians en el punt p recorren tot T_pM.

(10.2.7) Si α és una forma diferencial, $\mathscr{L}_{fX}\alpha = f\mathscr{L}_X\alpha + \mathrm{d}f \wedge i_X\alpha$.

(10.2.8) *Teorema de Li Hua Zhong*

Sigui (M, ω) una varietat simplèctica connexa, $\alpha \in \Omega^k(M)$ una forma diferencial invariant per tots els camps hamiltonians.
Si k és imparell, $\alpha = 0$. Si k és parell, $\alpha = c\,\omega^{\wedge \frac{k}{2}}$, on $c \in \mathbf{R}$.

(10.2.9) Si X, Y són camps vectorials localment hamiltonians, aleshores $[X, Y]$ és una camp vectorial hamiltonià, amb hamiltoniana $\omega(Y, X)$.

(10.2.10) *Expressió local en coordenades de Darboux*

Sigui (x^i, y_i) un sistema de coordenades de Darboux: $\omega = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}y_i$. Llavors

$$\widehat{\omega}\left(A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + B_i \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = A^i \mathrm{d}y_i - B_i \mathrm{d}x^i \,.$$

L'expressió del camp hamiltonià X_h és

$$X_h = \frac{\partial h}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial h}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y_i} \,.$$

(10.2.11) Sigui N una varietat, $X \in \mathfrak{X}(N)$. La funció lineal $\widehat{X} \colon \mathrm{T}^*N \to \mathbf{R}$, definida per $\widehat{X}(p_q) = \langle p_q, X(q) \rangle$, és la hamiltoniana del camp vectorial $X^{\mathrm{T}^*} \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}^*N)$.

10.3 Claudàtor de Poisson

(10.3.1) Sigui M una varietat, i $\omega \in \Omega^2(M)$ una 2-forma diferencial no-degenerada, de la qual per ara no suposem que sigui tancada. Donada una funció f en M, podem definir-ne com abans el gradient respecte a ω per $X_f = \widehat{\omega}^{-1} \circ \mathrm{d}f$.

Donades dues funcions $f, g\colon M \to \mathbf{R}$, en definim el parèntesi de Poisson (o claudàtor de Poisson) com la funció

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = i_{X_g} i_{X_f} \omega = X_g \cdot f = -X_f \cdot g\,.$$

(10.3.2) Es compleix

$$\{f, g\} = -\{g, f\},$$
$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$$

(i anàlogament per la dreta).

(10.3.3) $i_{[X_f, X_g] + X_{\{f,g\}}} \omega = -i_{X_g} i_{X_f} \mathrm{d}\omega.$

(10.3.4) ω és tancada sii se satisfà

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}\,.$$

(10.3.5) $\mathrm{d}\omega(X_f, X_g, X_h) = \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{f, h\}\} + \{h, \{f, g\}\}.$

(10.3.6) ω és tancada sii el seu parèntesi de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ satisfà la identitat de Jacobi.

(10.3.7) Sigui (M, ω) una varietat simplèctica.
L'espai vectorial $\mathrm{C}^\infty(M)$, amb el parèntesi de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$, és una **R**-àlgebra de Lie.
L'aplicació $\mathrm{C}^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $f \mapsto X_f$, és un antihomomorfisme d'àlgebres de Lie.

El nucli d'aquest morfisme són les funcions localment constants; la imatge, els camps vectorials hamltonians.

(10.3.8) *Expressió local en coordenades de Darboux*
Sigui (x^i, y_i) un sistema de coordenades de Darboux per a ω. Llavors

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x^i}\,.$$

(10.3.9) Considerem coordenades (z^i) qualssevol en M. Llavors

$$\{f, g\} = \{z^i, z^j\} \frac{\partial f}{\partial z^i} \frac{\partial g}{\partial z^j}\,.$$

(10.3.10) Encara en coordenades qualssevol, escrivim $\omega = \frac{1}{2}\, a_{ij}\, \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}z^j$, on $a_{ij} = \omega(\partial/\partial z^i, \partial/\partial z^j)$; sigui $A = (a_{ij})$.
D'altra banda, escrivim $b^{ij} = \{z^i, z^j\}$; sigui $B = (b^{ij})$.
Ambdues matrius estan relacionades per $B = (A^\top)^{-1}$.

(10.3.11) Amb les mateixes notacions, les coordenades són de Darboux sii $A = J$, essent $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$.

(10.3.12) Sigui (M, ω) una varietat simplèctica.
Unes coordenades (x^i, y_i) són de Darboux sii satisfan

$$\{x^i, x^j\} = 0\,,\ \{y_i, y_j\} = 0\,,\ \{x^i, y_j\} = \delta^i_j$$

(«relacions de commutació canòniques»).

(10.3.13) *Teorema de Darboux generalitzat*
Sigui (M, ω) una varietat simplèctica de dimensió $2n$. Siguin f_1, …, f_r $(r \leq n)$ funcions definides en un veïnat obert de $p \in M$, amb diferencials linealment independents en p, i tals que

$$\{f_i, f_j\} = 0$$

(es diu que «estan en involució»). Llavors existeixen funcions $f_{r+1}, \dots, f_n$, $g_1, \dots, g_n$ tals que, en un veïnat de p, $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ és una carta simplèctica de M $(\omega = \sum_i \mathrm{d}f_i \wedge \mathrm{d}g_i)$.

10.4 Simplectomorfismes i transformacions canòniques

(10.4.1) Siguin (M_1, ω_1) i (M_2, ω_2) varietats simplèctiques. Una aplicació $\varphi\colon M_1 \to M_2$ es diu simplèctica si

$$\varphi^*(\omega_2) = \omega_1\,.$$

(10.4.2) Un difeomorfisme simplèctic s'anomena simplectomorfisme (o isomorfisme de varietats simplèctiques).
La composició de simplectomorfismes, o l'invers d'un simplectomorfisme, són simplectomorfismes.

(10.4.3) Sigui $\varphi\colon M_1 \to M_2$ un difeomorfisme entre varietats simplèctiques. Les afirmacions següents són equivalents.

- φ és un simplectomorfisme
- Per a tota $h \in \mathrm{C}^\infty(M_2)$, $\varphi^*(X_h) = X_{\varphi^*(h)}$.
- Per a totes $g, h \in \mathrm{C}^\infty(M_2)$, $\varphi^*\{g, h\} = \{\varphi^*(g), \varphi^*(h)\}$.

La darrera afirmació significa que $\varphi^*\colon \mathrm{C}^\infty(M_2) \to \mathrm{C}^\infty(M_1)$ és un isomorfisme d'àlgebres de Lie.

(10.4.4) Si $f\colon N_1 \to N_2$ és un difeomorfisme, llavors $\mathrm{T}^*f\colon \mathrm{T}^*N_1 \to \mathrm{T}^*N_2$ és un simplectomorfisme per a les estructures simplèctiques canòniques.

(10.4.5) Un simplectomorfisme o automorfisme d'una varietat simplèctica (M, ω) és un difeomorfisme $\varphi\colon M \to M$ tal que $\varphi^*(\omega) = \omega$.
Podem definir un simplectomorfisme infinitesimal de M com un camp vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que el seu flux deixa ω invariant, és a dir, que ω és invariant per X: $\mathscr{L}_X \omega = 0$. Això significa, doncs, que X és un camp vectorial localment hamiltonià.

(10.4.6) Siguin (M_1, ω_1) i (M_2, ω_2) varietats simplèctiques. Un difeomorfisme $\varphi\colon M_1 \to M_2$ es diu transformació canònica si aplica camps vectorials localment hamiltonians en camps vectorials localment hamiltonians.

(10.4.7) Sigui $\varphi\colon M_1 \to M_2$ un difeomorfisme entre varietats simplèctiques connexes. φ és una transformació canònica sii existeix un $c \in \mathbf{R}^*$ tal que

$$\varphi^*(\omega_2) = c\,\omega_1 .$$

A més, si $X_1 \in \mathfrak{X}_{\mathrm{lh}}(M_1)$ té hamiltoniana local h_1 i $\varphi_*(X_1) = X_2 \in \mathfrak{X}_{\mathrm{lh}}(M_2)$ té hamiltoniana local h_2, existeix un $k \in \mathbf{R}$ tal que, localment, $ch_1 = \varphi^*(h_2) + k$.

(10.4.8) Es compleix també que $\varphi^*\{g, h\} = \frac{1}{c}\{\varphi^*(g), \varphi^*(h)\}$.

(10.4.9) Es diu que c és la valència de la transformació canònica. Un simplectomorfisme és, doncs, una transformació canònica univalent.

(10.4.10) Sigui $\varphi\colon M_1 \to M_2$ una transformació canònica de valència c entre varietats simplèctiques exactes, amb formes simplèctiques $\omega_i = -\mathrm{d}\theta_i$.
Existeix localment una funció $F_1 \in \mathrm{C}^\infty(M_1)$ tal que

$$\varphi^*(\theta_2) - c\theta_1 = \mathrm{d}F_1 .$$

(10.4.11) Es diu que F_1 és la funció generatriu de la transformació canònica.

10.5 Varietats de Poisson

(10.5.1) Sigui M una varietat, $\mathrm{C}^\infty(M)$ la seva àlgebra de funcions diferenciables. Una estructura de Poisson en M és un producte (dit parèntesi de Poisson)

$$\mathrm{C}^\infty(M) \times \mathrm{C}^\infty(M) \to \mathrm{C}^\infty(M)\,, \quad (f, g) \mapsto \{f, g\}$$

R-bilineal que satisfà les propietats següents:

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (antisimetria)
- $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (identitat de Jacobi)
- $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ (regla de Leibniz)

M, dotada d'aquest producte, s'anomena varietat de Poisson.

(10.5.2) L'espai vectorial real $\mathrm{C}^\infty(M)$ està dotat, doncs, de dues estructures: és una àlgebra associativa commutativa amb el producte ordinari de funcions i una àlgebra de Lie amb el parèntesi de Poisson. Ambdues estructures estan relacionades per la regla de Leibniz, que significa que, per a tota f, $\{f, -\}$ és una derivació respecte al producte associatiu.
També ho és $\{-, f\}$, en virtut de l'antisimetria.
Una àlgebra associativa i commutativa dotada d'un producte de Lie que satisfà la regla de Leibniz es diu *àlgebra de Poisson*.

(10.5.3) Com que $\{-, h\}$ és una derivació de $\mathrm{C}^\infty(M)$, es correspon amb un camp vectorial diferenciable X_h, anomenat camp vectorial hamiltonià[8] de h. Per definició,

$$\{f, h\} = X_h \cdot f \,.$$

L'aplicació

$$\mathrm{C}^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)\,, \quad h \mapsto X_h$$

és un antihomomorfisme d'àlgebres de Lie:

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}} \,.$$

(10.5.4) El centre de $\mathrm{C}^\infty(M)$ respecte al parèntesi de Lie està format per les funcions f tals que $\{f, g\} = 0$ per a tota g; equivalentment, són les funcions f tals que $X_f = 0$. A vegades s'anomenen *funcions de Casimir*.

(10.5.5) Donat un parèntesi de Poisson existeix un camp de bivectors diferenciable $\Lambda \in \mathrm{Sec}(\bigwedge^2 \mathrm{T}M)$ tal que

$$\{f, g\} = \Lambda(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g) \,.$$

Λ és el tensor de Poisson de la varietat de Poisson.

(10.5.6) Recíprocament, donada una secció diferenciable Λ de $\bigwedge^2 \mathrm{T}M$, la fórmula anterior permet definir un parèntesi de funcions antisimètric i satisfent la regla de Leibniz; però la identitat de Jacobi se satisfà sii Λ satisfà una condició d'integrabilitat que es pot expressar com

$$[\Lambda, \Lambda] = 0 \,,$$

on $[-, -]$ denota el *parèntesi de Schouten* de camps de multivectors.

[8] Un altre conveni s'obtindria definint X_h com $\{h, -\}$.

(10.5.7) A partir del tensor de Poisson Λ es defineix un morfisme de fibrats vectorials

$$\widehat{\Lambda} \colon \mathrm{T}^*M \to \mathrm{T}M \,, \quad \alpha_x \mapsto \Lambda(\alpha_x, -) \,.$$

Notem que $\widehat{\Lambda} \circ \mathrm{d}h = X_h$.

(10.5.8) Si $U \subset M$ és un subconjunt obert d'una varietat de Poisson la restricció del tensor de Poisson la dota d'una estructura de varietat de Poisson.

(10.5.9) En particular, siguin (x^i) coordenades locals de M en un conjunt obert U. Es pot expressar $\Lambda|_U = \dfrac{1}{2}\Lambda^{ij}\dfrac{\partial}{\partial x^i} \wedge \dfrac{\partial}{\partial x^j}$. Donades $f, g \in \mathrm{C}^\infty(U)$, el seu parèntesi de Poisson és $\{f,g\} = \Lambda^{ij}\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\dfrac{\partial g}{\partial x^j}$. En particular, $\{x^i, x^j\} = \Lambda^{ij}$.

(10.5.10) El rang de l'estructura de Poisson en un punt $x \in M$ és el rang del seu tensor de Poisson en aquell punt, és a dir, $\operatorname{rang} \widehat{\Lambda}_x = \dim \operatorname{Im} \widehat{\Lambda}_x$, que és un nombre parell $\leq \dim M$.

(10.5.11) En qualsevol varietat el tensor de Poisson nul defineix una estructura de Poisson de rang 0.

(10.5.12) Una varietat simplèctica, dotada amb el seu parèntesi de Poisson, és una varietat de Poisson de rang màxim ($= \dim M$). La relació entre les dues estructures ve donada pel fet que $\widehat{\Lambda} = {}^t\widehat{\omega}^{-1}$.
Recíprocament, una varietat de Poisson correspon a una varietat simplèctica sii té rang màxim.

(10.5.13) *Estructura de Lie–Poisson en una àlgebra de Lie*

Sigui $\mathfrak{g}$ una $\mathbf{R}$-àlgebra de Lie de dimensió finita, $\mathfrak{g}^*$ el seu espai dual dotat de la seva estructura diferenciable canònica, $\mathrm{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ la seva àlgebra de funcions diferenciables. Si $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$, la seva derivada $\mathrm{D}f(x)$ en un punt $x \in \mathfrak{g}^*$ és una forma lineal en $\mathfrak{g}^*$, o sigui, un element de $\mathfrak{g}^{**} \cong \mathfrak{g}$. D'aquesta manera es defineix un producte de funcions

$$\{f,g\}(x) = \langle x, [\mathrm{D}f(x), \mathrm{D}g(x)] \rangle \,,$$

anomenat <u>parèntesi de Lie–Poisson</u> de $\mathfrak{g}^*$.

(10.5.14) *Morfismes de varietats de Poisson*

Siguin M, N varietats de Poisson. Un <u>morfisme de Poisson</u> és una aplicació diferenciable $\varphi \colon M \to N$ tal que preserva els parèntesis de Poisson respectius:

$$\varphi^*\{g_1, g_2\}_N = \{\varphi^*(g_1), \varphi^*(g_2)\}_M \,.$$

(10.5.15) *Teorema de descomposició de Weinstein*

Sigui (M, Λ) una varietat de Poisson de dimensió m, $p \in M$ un punt, $2r$ el rang de Λ_p. Existeix una carta local de M centrada en p, amb coordenades $(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_{m-2r})$, tal que, en un veïnat de p,

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{j<k} f_{jk}(z)\, \frac{\partial}{\partial z_j} \wedge \frac{\partial}{\partial z_k}\,,$$

amb f_{jk} funcions tals que $f(0) = 0$.

El primer sumand defineix una estructura simplèctica sobre la subvarietat $z = 0$, mentre que el segon és l'anomenada *estructura de Poisson transversa*.

(10.5.16) *Foliació simplèctica d'una varietat de Poisson*

Sigui (M, Λ) una varietat de Poisson. La distribució tangent $\operatorname{Im} \widehat{\Lambda} \subset \mathrm{T}M$ està generada pels camps vectorials hamiltonians i doncs és diferenciable. És integrable, de manera que les seves varietats integrals maximals defineixen una foliació, anomenada <u>foliació simplèctica</u> de M. Cada fulla d'aquesta foliació té una estructura simplèctica natural. Dos punts pertanyen a la mateixa fulla sii es poden unir per la juxtaposició d'un nombre finit de corbes integrals de camps vectorials hamiltonians.

A Complements

En aquesta secció s'apleguen alguns resultats rellevants que han anat apareixent al llarg del curs dins la llista de problemes o en exàmens.

A.1 Producte de varietats

Siguin M_i $(1 \leq i \leq k)$ varietats diferenciables. Hem definit la varietat producte $M_1 \times \ldots \times M_k$. Denotem les projeccions per $\mathrm{pr}_i \colon M_1 \times \ldots \times M_k \to M_i$. Són aplicacions diferenciables.

Per simplicitat, en tota l'exposició no considerarem més que el producte de dues varietats.

(A.1.1) Una aplicació $G\colon N \to M_1 \times M_2$ és de classe C^r sii ho són les seves components $G_i = \mathrm{pr}_i \circ G$ $(1 \leq i \leq 2)$.

(A.1.2) *L'espai tangent d'un producte*

Siguin $p_i \in M_i$, i escrivim per abreujar $p = (p_1, p_2)$. Considerem les aplicacions tangents $\mathrm{T}_p \,\mathrm{pr}_i \colon \mathrm{T}_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) \to \mathrm{T}_{p_i} M_i$. Llavors l'aplicació

$$(\mathrm{T}_p \,\mathrm{pr}_1, \mathrm{T}_p \,\mathrm{pr}_2) \colon \mathrm{T}_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) \to \mathrm{T}_{p_1} M_1 \times \mathrm{T}_{p_2} M_2$$

és un isomorfisme d'espais vectorials.

Eventualment, amb aquest isomorfisme podem identificar un espai $\mathrm{T}_{p_i} M_i$ amb un subespai de $\mathrm{T}_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2)$. També podem escriure $\mathrm{T}_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) = \mathrm{T}_{p_1} M_1 \oplus \mathrm{T}_{p_2} M_2$. Així un vector tangent del producte s'escriu $u_1 + u_2$, essent $u_1 \in \mathrm{T}_{p_1} M_1$ i $u_2 \in \mathrm{T}_{p_2} M_2$.

(A.1.3) Considerem una aplicació $G\colon N \to M_1 \times M_2$ de classe C^1. Mitjançant l'isomorfisme anterior, $\mathrm{T}_q G \colon \mathrm{T}_q N \to \mathrm{T}_{G(q)}(M_1 \times M_2)$ s'identifica amb l'aplicació $(\mathrm{T}_q G_1, \mathrm{T}_q G_2) \colon \mathrm{T}_q N \to \mathrm{T}_{G_1(q)} M_1 \times \mathrm{T}_{G_2(q)} M_2$. És a dir,

$$\mathrm{T}_q(G_1, G_2) = (\mathrm{T}_q G_1, \mathrm{T}_q G_2).$$

(A.1.4) Considerem ara, per simplicitat, una aplicació $F\colon M_1 \times M_2 \to N$, de classe C^1. Sigui $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$. Usem les identificacions anteriors. Sigui $u = (u_1, u_2) \in \mathrm{T}_p(M_1 \times M_2) \cong \mathrm{T}_{p_1} M_1 \times \mathrm{T}_{p_2} M_2$. Llavors

$$\mathrm{T}_p F \cdot u = \mathrm{T}_{p_1} F(\cdot, p_2) \cdot u_1 + \mathrm{T}_{p_2} F(p_1, \cdot) \cdot u_2.$$

(A.1.5) En particular, donada $f\colon M_1 \times M_2 \to \mathbf{R}$,

$$\langle \mathrm{d}_p f, u \rangle = \langle \mathrm{d}_{p_1} f(\cdot, p_2), u_1 \rangle + \langle \mathrm{d}_{p_2} f(p_1, \cdot), u_2 \rangle.$$

(A.1.6) *Teorema de la funció implícita*
Tornant a l'aplicació $F\colon M_1 \times M_2 \to N$ de classe C^1, posem $q = F(p_1, p_2)$ i suposem que $\mathrm{T}_{p_2}F(p_1, \cdot)\colon \mathrm{T}_{p_2}M_2 \to \mathrm{T}_q N$ és un isomorfisme.
El teorema de la funció implícita assegura l'existència local d'una única aplicació h, definida en un veïnat de p_1 i amb valors en un veïnat de p_2, tal que

$$F(x_1, x_2) = q \iff x_2 = h(x_1)\,.$$

Si F és de classe C^r llavors h també ho és, i

$$\mathrm{T}_{p_1}h = -(\mathrm{T}_{p_2}F(p_1, \cdot))^{-1} \circ \mathrm{T}_{p_1}F(\cdot, p_2).$$

(A.1.7) Globalment tenim un difeomorfisme

$$(\mathrm{T}\,\mathrm{pr}_1, \mathrm{T}\,\mathrm{pr}_2)\colon \mathrm{T}(M_1 \times M_2) \to \mathrm{T}M_1 \times \mathrm{T}M_2.$$

(A.1.8) Considerem per exemple un camp de vectors tangents Y en $M_1 \times M_2$. Amb la identificació donada pel difeomorfisme anterior es pot escriure $Y = (Y_1, Y_2)$, essent $Y_1\colon M_1 \times M_2 \to \mathrm{T}M_1$ i $Y_2\colon M_1 \times M_2 \to \mathrm{T}M_2$ (de fet són camps vectorials al llarg de les projeccions pr_1 i pr_2).
Amb la mateixa identificació, un camp vectorial X_1 en M_1 (per exemple) dóna lloc a un camp vectorial X en $M_1 \times M_2$: $X(p_1, p_2) = (X_1(p_1), 0)$.
Més particularment, el camp vectorial unitat $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ de $\mathbf{R}$ dóna lloc a un camp vectorial en la varietat producte $\mathbf{R} \times M$, que podem denotar per $\partial/\partial t$.

A.2 Grups de Lie

(A.2.1) Un grup de Lie és un conjunt G dotat d'estructures de grup i de varietat diferenciable, de manera que el producte i la inversió són aplicacions diferenciables:

$$\mu\colon G \times G \to G, \quad (x, y) \mapsto xy;$$
$$\iota\colon G \to G, \quad x \mapsto x^{-1}.$$

(A.2.2) Aquestes operacions són diferenciables sii ho és l'aplicació $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.

(A.2.3) Sigui G un grup de Lie, $g \in G$ un element fixat. La translació per l'esquerra

$$\mathrm{L}_g\colon G \to G, \quad \mathrm{L}_g(x) = gx$$

i la translació per la dreta

$$\mathrm{R}_g\colon G \to G, \quad \mathrm{R}_g(x) = xg$$

són difeomorfismes.

(A.2.4) Un subgrup de Lie (regular) d'un grup de Lie G és un subconjunt $H \subset G$ que és alhora subgrup i subvarietat (regular). Amb les estructures induïdes, H també és un grup de Lie.

Per a comprovar si un subgrup $H \subset G$ d'un grup de Lie és una subvarietat, n'hi ha prou amb veure-ho al voltant d'un punt (per exemple, l'element neutre e).

(A.2.5) Anàlogament, un *subgrup de Lie immers* és un grup de Lie que és alhora subgrup i subvarietat immersa.

(A.2.6) Dins els grups multiplicatius $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{H}^*$ dels cossos dels nombres reals, complexos i quaternions, els elements de mòdul 1 en formen subgrups de Lie: $\mathbf{S}_0$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_3$.

Dins el grup lineal real $\mathsf{GL}_n(\mathbf{R})$, el conjunt $\mathsf{SL}_n(\mathbf{R})$ de les matrius de determinant 1 n'és un subgrup de Lie. També ho és el conjunt $\mathsf{O}_n(\mathbf{R})$ de les matrius ortogonals, així com el de les matrius ortogonals de determinant 1, $\mathsf{SO}_n(\mathbf{R})$.

(A.2.7) Un morfisme de grups de Lie és una aplicació $f \colon G \to G'$ entre grups de Lie que és morfisme de grups i de varietats.

Un morfisme f sempre té rang constant.

(A.2.8) Si $f \colon G \to G'$ és un morfisme de grups de Lie, llavors $\operatorname{Ker} f \subset G$ és un subgrup de Lie (regular).

En canvi, la imatge $f(G)$ pot no ser una subvarietat regular de G'.

(A.2.9) Sigui G un grup de Lie. Un camp vectorial X en G es diu invariant per l'esquerra quan és invariant per les translacions per l'esquerra L_g $(g \in G)$:

$$\mathrm{T}(\mathrm{L}_g) \circ X = X \circ \mathrm{L}_g.$$

Denotem per $\mathfrak{X}_{\mathrm{L}}(G)$ el conjunt dels camps vectorials invariants per l'esquerra en G.

De manera anàloga es defineix el concepte de camp vectorial invariant per la dreta.

(A.2.10) D'acord amb la seva definició, un camp vectorial invariant per l'esquerra està determinat pel seu valor en el neutre. De fet, fixat un vector tangent $u \in \mathrm{T}_e G$, l'aplicació

$$X_u \colon G \to \mathrm{T}G, \quad g \mapsto \mathrm{T}_e(\mathrm{L}_g) \cdot u,$$

és un camp vectorial diferenciable, invariant per l'esquerra.

Considerem coordenades apropiades de G, en les quals l'expressió local de la multiplicació és $\widehat{\mu}$. Llavors l'expressió local de X_u és

$$\widehat{X_u}(x) = (x, \mathrm{D}_2\widehat{\mu}(x, \hat{e})\cdot\mathbf{u}),$$

essent $\mathbf{u}$ els components de u en les coordenades considerades.

(A.2.11) Doncs es conclou que l'aplicació

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{L}}(G) \to \mathrm{T}_e G, \quad X \mapsto X(e)$$

és un isomorfisme d'espais vectorials.

(A.2.12) Si (u_i) és una base de $\mathrm{T}_e G$, els camps vectorials invariants per l'esquerra X_i corresponents són una base del $\mathbf{R}$-espai vectorial $\mathfrak{X}_{\mathrm{L}}(G)$. Encara més, són linealment independents en cada punt, de manera que són una base del $\mathrm{C}^\infty(M)$-mòdul $\mathfrak{X}(G)$ dels camps vectorials diferenciables en G; doncs, tot grup de Lie és paral·lelitzable.

(A.2.13) El conjunt dels camps vectorials invariants per l'esquerra $\mathfrak{X}_{\mathrm{L}}(G)$ és una subàlgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$.

(A.2.14) L'isomorfisme anterior $\mathfrak{X}_{\mathrm{L}}(G) \cong \mathrm{T}_e G$ permet transportar l'estructura d'àlgebra de Lie dels camps vectorials invariants per l'esquerra als vectors tangents en el neutre.

L'<u>àlgebra de Lie</u> de G, usualment representada per $\mathfrak{g}$ o $\mathrm{Lie}(G)$, és qualsevol d'aquests dos conjunts, $\mathfrak{X}_{\mathrm{L}}(G)$ o $\mathrm{T}_e(G)$, amb aquesta estructura.

Es podrien fer construccions similars amb els camps vectorials invariants per la dreta.

(A.2.15) Donada una base (u_i) de $\mathfrak{g}$, podem escriure $[u_i, u_j] = c_{ij}^k u_k$. Els nombres $c_{ij}^k \in \mathbf{R}$ s'anomenen *constants d'estructura* de l'àlgebra de Lie (en la base donada).

(A.2.16) *El grup lineal*

El grup lineal $\mathsf{GL}_n(\mathbf{R})$ és un subconjunt obert de l'espai vectorial $\mathsf{M}_n(\mathbf{R})$. Per tant la seva àlgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})$ s'identifica amb l'espai vectorial $\mathrm{T}_I(\mathsf{GL}_n(\mathbf{R})) \cong \mathsf{M}_n(\mathbf{R})$.

Donat $u \in \mathsf{M}_n(\mathbf{R})$, sigui X_u el camp vectorial invariant per l'esquerra definit per u; amb la identificació $\mathrm{T}(\mathsf{GL}_n(\mathbf{R})) \cong \mathsf{GL}_n(\mathbf{R}) \times \mathsf{M}_n(\mathbf{R})$, aquest és $X_u(g) = (g, gu)$. Es comprova que $[X_u, X_v] = X_{[u,v]}$, essent $[u, v]$ el commutador de les matrius u, v. D'aquesta manera, l'àlgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})$ del grup lineal s'identifica amb l'àlgebra de Lie $\mathsf{M}_n(\mathbf{R})$.

(A.2.17) Sigui G un grup de Lie, X un camp vectorial invariant per l'esquerra. Sigui γ la corba integral maximal de X tal que $\gamma(0) = e$.

Donat $x \in G$, $\xi(t) = x\gamma(t)$ és la corba integral maximal de X amb condició inicial $\xi(0) = x$.

γ està definida en tot $\mathbf{R}$, de manera que X és complet.

De fet, $\gamma\colon \mathbf{R} \to G$ és un morfisme de grups de Lie.

Es diu que γ és un subgrup uniparamètric, i que $X(e) \in \mathfrak{g}$ és el seu generador infinitesimal. (Cal recordar que la imatge $\gamma(\mathbf{R}) \subset G$ pot no ser una subvarietat regular.)

A.3 Orientabilitat

(A.3.1) Una forma de volum en una varietat M és una forma diferencial de grau màxim $\Omega \in \Omega^m(M)$ que no s'anul·la enlloc. Llavors tota altra forma diferencial de grau m s'escriu $f\,\Omega$, amb f una funció qualsevol.

Si Ω és una forma de volum, en cada punt Ω_p defineix una orientació de l'espai vectorial T_pM.

(A.3.2) Si Ω és una forma de volum en M i X és un camp vectorial, llavors existeix una única funció $\operatorname{div} X$ tal que

$$\mathscr{L}_X \Omega = (\operatorname{div} X)\,\Omega.$$

S'anomena divergència de X (respecte a Ω).

(A.3.3) Una varietat M es diu orientable si té una forma de volum. Una orientació de M és una tria d'una classe de formes de volum ($\{f\Omega \mid f > 0\}$). Si M és connexa, llavors admet dues orientacions.

(A.3.4) Si una varietat és orientable llavors hi ha un atles de M tal que tots els canvis de coordenades tenen jacobians positius. El recíproc és cert si M és paracompacta.

A.4 Equacions diferencials de segon ordre

(A.4.1) Sigui $\xi\colon I \to \mathrm{T}M$ un camí en $\mathrm{T}M$. ξ és l'aixecament canònic (velocitat) d'un camí en M sii $\xi = \mathrm{T}(\tau_M) \circ \xi'$.

(A.4.2) Sigui Y un camp vectorial en $\mathrm{T}M$. Totes les corbes integrals de Y són aixecaments de camins en M sii

$$\mathrm{T}(\tau_M) \circ Y = \mathrm{Id}_{\mathrm{T}M} .$$

És a dir, a més de ser secció de $\tau_{\mathrm{T}M}$, Y és secció de $\mathrm{T}(\tau_M)$.

(A.4.3) D'un camp vectorial $Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}M)$ que satisfà la condició anterior es diu que satisfà la condició de segon ordre. Si $\gamma\colon I \to M$ és un camí, Y defineix una equació diferencial de segon ordre en M:

$$\gamma'' = Y \circ \gamma'.$$

(A.4.4) En coordenades naturals (x^i, u^i) de $\mathrm{T}M$, l'expressió d'un d'aquests camps vectorials és

$$Y = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + a^i(x,u) \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

i l'expressió local de l'equació diferencial de segon ordre corresponent és $\ddot{x} = a(x, \dot{x})$.

(A.4.5) *Esprais*

Sigui Z un camp vectorial en $\mathrm{T}M$ satisfent la condició de segon ordre. Les condicions següents són equivalents:

i) Per a qualsevol $c \in \mathbf{R}^*$ i qualsevol solució $\xi\colon I \to M$ de l'equació diferencial de segon ordre definida per Z, el camí $\eta(t) = \xi(ct)$ n'és també solució.

ii) Per a qualsevol $c \in \mathbf{R}$ i qualsevol $v_x \in \mathrm{T}M$, $Z(cv_x) = c\,\mathrm{T}(m_c) \cdot Z(v_x)$, on $m_c\colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}M$ és l'homotècia de raó c sobre les fibres.

iii) $[\Delta, Z] = Z$, on Δ és el camp de Liouville de $\mathrm{T}M$.

iv) En coordenades naturals (x^i, u^i) qualssevol de $\mathrm{T}M$ l'expressió de Z és

$$Z = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + a^i(x,u) \frac{\partial}{\partial u^i} ,$$

on les $a^i(x,u)$ són homogènies de grau 2 en u.

Un camp vectorial satisfent la condició de segon ordre i aquestes condicions equivalents es diu esprai.

Es pot provar que, si Z és de classe C^∞ en $\mathrm{T}M$ sencer, llavors la seva expressió en coordenades té la forma $Z(x,u) = u^k \dfrac{\partial}{\partial x^k} + h^k_{ij}(x) u^i u^j \dfrac{\partial}{\partial u^k}$, amb h^k_{ij} simètriques respecte als índexs inferiors.

(A.4.6) *L'esprai geodèsic d'una connexió*

Sigui ∇ una connexió en M. Existeix un camp vectorial $S \in \mathfrak{X}(\mathrm{T}M)$, satisfent la condició de segon ordre, caracteritzat per la propietat que les corbes integrals de S són les velocitats de les geodèsiques de ∇. S és un esprai; s'anomena l'esprai geodèsic de la connexió.

En coordenades naturals de $\mathrm{T}M$ s'expressa

$$S = u^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma^k_{ij} u^i u^j \frac{\partial}{\partial u^k}.$$

A.5 Les formes diferencials canòniques del fibrat cotangent

(A.5.1) Sobre T^*M existeix una 1-forma diferencial canònica θ_M, definida per

$$\theta_M(p) = {}^t(\mathrm{T}_p\pi_M)\cdot p \quad (p \in \mathrm{T}^*M).$$

La 2-forma diferencial

$$\omega_M = -\mathrm{d}\theta_M$$

és no-degenerada.

(A.5.2) θ_M, ω_M són les formes diferencials canòniques (o formes de Liouville) de T^*M.

(A.5.3) Considerem una carta de M, i siguin (x^i, p_i) les coordenades naturals corresponents de T^*M. L'expressió de les formes diferencials canòniques en aquestes cartes és

$$\theta_M = p_i\,\mathrm{d}x^i, \qquad \omega_M = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p_i.$$

(A.5.4) La contracció amb ω_M defineix un isomorfisme entre els fibrats vectorials tangent i cotagent:

$$\widehat{\omega_M}\colon \mathrm{T}(\mathrm{T}^*M) \to \mathrm{T}^*(\mathrm{T}^*M), \qquad \widehat{\omega_M}(w_p) = i_{w_p}\omega.$$

(A.5.5) En les corresponents coordenades naturals s'expressa $\widehat{\omega_M}(x,p;u,h) = (x,p;-h,u)$.

(A.5.6) L'aplicació

$$\mathfrak{X}(\mathrm{T}^*M) \to \mathfrak{X}^*(\mathrm{T}^*M), \qquad X \mapsto i_X\omega_M,$$

és un isomorfisme de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}^*M)$-mòduls.

(A.5.7) Existeix un difeomorfisme canònic $\mathrm{T}(\mathrm{T}^*M) \cong \mathrm{T}^*(\mathrm{T}^*M)$.

També es pot provar que hi ha un difeomorfisme canònic $\mathrm{T}(\mathrm{T}^*M) \cong \mathrm{T}^*(\mathrm{T}M)$. Tanmateix, no existeix cap difeomorfisme *canònic* entre aquestes varietats i $\mathrm{T}(\mathrm{T}M)$.

(A.5.8) Sobre T^*M existeix una forma de volum canònica.
Es pot prendre per exemple $\Omega_M = (-1)^{m(m-1)/2} \dfrac{1}{m!}\, \omega_M \wedge \ldots \wedge \omega_M$.
Llavors en coordenades naturals $\Omega_M = \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^m \wedge \mathrm{d}p_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}p_m$.

A.6 Fluxos dependents del temps

La formulació geomètrica més simple d'una equació diferencial en una varietat ve donada per un camp vectorial, que modelitza una equació diferencial ordinària, de primer ordre, autònoma, en forma explícita. La formulació geomètrica de casos més generals requereix l'ús d'estructures més complicades. En aquesta secció considerarem el cas d'una equació no autònoma, o dependent del temps, de la forma $x' = f(t,x)$. La situació més simple s'obté treballant en la varietat producte $\mathbf{R} \times M$.

(A.6.1) Un <u>camp vectorial dependent del temps</u> en M és una aplicació $X\colon W \to \mathrm{T}M$, definida en un subconjunt obert $W \subset \mathbf{R} \times M$, tal que, per a tot $(t,p) \in W$, $X(t,p) \in \mathrm{T}_pM$.
És a dir, X és un camp vectorial al llarg de la projecció $W \to M$.

(A.6.2) Aquest camp vectorial defineix una equació diferencial

$$x' = X(t,x)\,;$$

una solució d'aquesta equació és un camí $\gamma\colon I \to M$ tal que, per a tota t,

$$(t,\gamma(t)) \in W \quad \text{i} \quad \gamma'(t) = X(t,\gamma(t))\,.$$

Si $\gamma(t_\circ) = p_\circ$, es diu que γ satisfà la condició inicial $(t_\circ, p_\circ)$.

(A.6.3) Si X és de classe C^1, el teorema d'existència i unicitat permet demostrar l'existència de solucions maximals i del flux. Una manera d'obtenir aquests resultats és convertir l'equació diferencial en una equació autònoma equivalent.

(A.6.4) A partir de X es pot construir un camp vectorial $\tilde{X}$ en W, a vegades anomenat la <u>suspensió</u> de X:

$$\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial t} + X\,,$$

on estem utilitzant el camp vectorial unitat de $\mathbf{R}$, $\partial/\partial t$, i que l'espai tangent d'un producte és la suma directa dels espais tangents dels factors: $\mathrm{T}_{(t,p)}W = \mathrm{T}_{(t,p)}(\mathbf{R} \times M) = \mathrm{T}_t\mathbf{R} \oplus \mathrm{T}_pM$.

(A.6.5) Una corba integral de $\tilde{X}$ és un camí $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1): I \to W$ tal que

$$\mathrm{D}\tilde{\gamma}_0 = 1\,, \quad \tilde{\gamma}_1' = X \circ \tilde{\gamma}\,.$$

Observem que $\tilde{\gamma}_0(t) = t + \mathrm{const}$, de manera que només quan $\mathrm{const} = 0$ (cosa que es pot aconseguir aplicant una translació al paràmetre d'evolució) el camí γ_1 és solució de l'equació dependent del temps.

(A.6.6) El nou camp vectorial $\tilde{X}$ té solucions maximals $\tilde{\gamma}_{t_\circ,p}(t)$ i un flux maximal $\tilde{F}: \tilde{D} \to W$, amb domini $\tilde{D} \subset \mathbf{R} \times W \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times M$, i amb $\tilde{\gamma}_{t_\circ,p}(t) = \tilde{F}(t, t_\circ, p)$. Observem que $\tilde{\gamma}_{t_\circ,p}(0) = (t_\circ, p)$.

(A.6.7) Donat $(t_\circ, p) \in W$, sigui $t \mapsto \gamma_{t_\circ,p}(t)$ la solució maximal de $x' = X(t,x)$ amb condició inicial $\gamma_{t_\circ,p}(t_\circ) = p$. Sigui $F: D \to M$ l'aplicació, definida en un subconjunt $D \subset \mathbf{R} \times W$, per

$$F(t, t_\circ, p) = \gamma_{t_\circ,p}(t)\,.$$

És el <u>flux dependent del temps</u> de X.

(A.6.8) El subconjunt $D \subset \mathbf{R} \times W$ és obert, i, si X és de classe C^k $(k \geq 1)$, el flux $F: D \to M$ és de classe C^k.

Usant la suspensió de X es pot bastir una demostració senzilla a partir de la teoria independent del temps. Només cal notar que es pot definir F a partir del flux $\tilde{F}$ de $\tilde{X}$ i una translació: $\tilde{F}(t - t_\circ, t_\circ, p) = (t, F(t, t_\circ, p))$. Així doncs el domini D és el transformat de $\tilde{D}$ pel difeomorfisme $(s, t_\circ, p) \mapsto (s + t_\circ, t_\circ, p)$, i el grau de diferenciabilitat de F és el de $\tilde{F}$.

(A.6.9) Sigui F' la velocitat de F respecte a la primera variable real: $F' = \mathrm{T}F \circ \dfrac{\partial}{\partial t}$. Aleshores

$$F'(t, t_\circ, p) = X(t, F(t, t_\circ, p))\,.$$

(A.6.10) Sigui

$$F^{ts} = F(t, s, \cdot): M_{ts} \to M\,.$$

El seu domini és el conjunt obert $M_{ts} \subset M$ obtingut tallant D amb $\{t\} \times \{s\} \times M$.

Les aplicacions F^{ts} satisfan la *llei de grup*

$$F^{tt} = \mathrm{Id}_M\,,$$
$$F^{t''t'} \circ F^{t't} = F^{t''t}$$

(allà on es pugui calcular la composició).

$F^{ts}: M_{ts} \to M_{st}$ és un difeomorfisme, amb invers F^{st}.

(A.6.11) Si X és un camp vectorial *independent del temps* amb flux F, aleshores el seu flux dependent del temps ve donat per $F^{t't} = F^{t'-t}$.

Derivada de Lie

(A.6.12) Considerem una funció dependent del temps $f\colon W \to \mathbf{R}$, de classe C^1. Volem avaluar el canvi del valor de f al llarg de les corbes integrals de X, $f(t, F^{tt_\circ}(p))$. Podem escriure aquesta expressió com $(F^{tt_\circ})^*(f_t)(p)$; aquí, per a cada t, $f_t \equiv f(t, \cdot)$ és una funció definida en un conjunt obert de M.

(A.6.13) Es compleix que

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1} f(t, F^{tt_\circ}(p)) = (F^{t_1 t_\circ})^* \left(\left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{t=t_1} + \mathscr{L}_{X_{t_1}} f_{t_1} \right)(p)\,,$$

on hem utilitzat una notació similar per a $X_t \equiv X(t, \cdot)$; en particular,

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_\circ} f(t, F^{tt_\circ}(p)) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathscr{L}_X f \right)(t_\circ, p)\,,$$

on s'entén que $\mathscr{L}_X f(t,p) = (\mathscr{L}_{X_t} f_t)(p)$.

(A.6.14) Amb hipòtesis i notacions similars, es poden obtenir expressions anàlogues per a la derivada de Lie d'un camp tensorial dependent del temps R:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1} (F^{tt_\circ})^*(R_t) = (F^{t_1 t_\circ})^* \left.\left(\frac{\partial R}{\partial t} + \mathscr{L}_X R \right)\right|_{t=t_1},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_\circ} (F^{tt_\circ})^*(R_t) = \left.\left(\frac{\partial R}{\partial t} + \mathscr{L}_X R \right)\right|_{t=t_1}.$$

Índex terminològic

Índex de notacions

En aquesta llista recollim notacions usades, habitualment o esporàdicament, al llarg de l'assignatura, començant per algunes notacions d'àlgebra lineal, càlcul i alguns conjunts específics.

S'ha d'entendre que algunes notacions emprades són circumstancials i podrien ser canviades tranquil·lament per d'altres igual de raonables (exemple: hem escrit habitualment les expressions locals com $\widehat{F}$, però $\widetilde{F}$, o $F_{\psi\varphi}$, també serien bones opcions). Mentre que d'altres notacions han estat triades per designar construccions concretes de manera precisa, i a vegades amb la intenció d'evitar confusions (exemple: l'aplicació tangent $\mathrm{T}_p F$ és designada en alguns textos per $(F_*)_p$, $(dF)_p$, ... i a vegades sense especificar el punt).

En l'explicació de les notacions ometem especificar el grau de diferenciabilitat necessari per portar a terme les operacions que s'esmenten.

$\mathscr{L}in(E,F)$, $\mathrm{Hom}(E,F)$	espai de les aplicacions lineals entre dos espais vectorials
$E^* = \mathscr{L}in(E,K)$	espai dual d'un K-espai vectorial E
$\langle \alpha, u \rangle = \alpha \cdot u = \alpha(u)$	contracció d'un covector $\alpha \in E^*$ i un vector $u \in E$
${}^t T \colon F^* \to E^*$	aplicació transposada d'una aplicació lineal $T \colon E \to F$
$\mathrm{D}f(x) \colon E \to F$	derivada (o diferencial) en x d'una aplicació f entre oberts d'espais vectorials reals E i F
$\mathrm{D}_{x,\mathbf{u}} f$, $\mathrm{D}_{(x,\mathbf{u})} f$	derivada direccional de f en x segons el vector $\mathbf{u}$
$\mathrm{D}_i f$, $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$	derivada parcial de $f \colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ respecte a la i-èsima variable
$\mathrm{J}f(x) = (\mathrm{D}_i f^j)$	matriu jacobiana de $f \colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$
$\mathrm{D}f(t_\circ)$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right\|_{t_\circ} f$	derivada de $f \colon \mathbf{R} \to F$ en $t_\circ$ (considerada com a element de F)
$\mathbf{S}_n$	esfera n-dimensional
$\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$, $\mathbf{P}_n$	espai projectiu real n-dimensional
$\mathbf{T}^n$	tor n-dimensional

$\mathsf{M}_n(\mathbf{R})$	conjunt de les matrius quadrades d'ordre n amb coeficients reals
$\mathsf{GL}_n(\mathbf{R})$, $\mathsf{GL}(n,\mathbf{R})$	grup lineal (en n variables sobre $\mathbf{R}$)
$\mathsf{SL}_n(\mathbf{R})$, $\mathsf{SL}(n,\mathbf{R})$	grup lineal especial
$\mathsf{O}_n(\mathbf{R})$, $\mathsf{O}(n,\mathbf{R})$	grup ortogonal
$\mathsf{SO}_n(\mathbf{R})$, $\mathsf{SO}(n,\mathbf{R})$	grup ortogonal especial
	Tema 1
(U,φ)	carta d'una varietat
$\dim M$	dimensió d'una varietat M
$M \times N$	varietat producte de dues varietats
$\widehat{F}$	expressió local d'una aplicació $F\colon M \to N$ respecte a cartes de M i N
$\mathrm{C}^\infty(M,N)$	conjunt de les aplicacions diferenciables entre les varietats M i N
$\mathrm{C}^\infty(M)$, $\mathscr{F}(M)$	$\mathbf{R}$-àlgebra de les funcions reals diferenciables en M
$F^*(g)$	imatge recíproca o pull-back d'una funció $g\colon N \to \mathbf{R}$ per una aplicació $F\colon M \to N$
	Tema 2
$\mathscr{C}_{M,p}$	conjunt dels camins en M que passen per p a $t=0$
T_pM	espai tangent a la varietat M en un punt p
$\boldsymbol{\theta}_{\varphi,p}\colon \mathrm{T}_pM \to \mathbf{R}^m$	bijecció $[\gamma] \mapsto \mathrm{D}\hat{\gamma}(0)$ definida per una carta (U,φ) en p
T_pF	aplicació tangent d'una aplicació F en p
$\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\vert_p$, $\mathrm{E}_i^\varphi\vert_p$	vectors tangents coordenats en p associats a una carta φ amb funcions coordenades (x^i)
$\mathscr{L}_u f$, $u\cdot f$, $u(f)$	derivada d'una funció $f\colon M \to \mathbf{R}$ segons un vector tangent $u \in \mathrm{T}_pM$
$\lambda_p\colon V \to \mathrm{T}_pV$	isomorfisme canònic entre un espai vectorial real finitodimensional V i el seu espai tangent en un punt p

$\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right\|_{t_\circ}$, $\mathrm{E}\|_{t_\circ}$	vector tangent unitat de $\mathbf{R}$ en $t_\circ$
$\gamma'(t)$, $\dot\gamma(t)$	velocitat o vector tangent d'un camí $\gamma\colon I \to \mathbf{R}$ en $t \in I$
$\mathcal{D}_p(M)$	espai de les derivacions puntuals de $\mathrm{C}^\infty(M)$ en p
T_p^*M	espai cotangent a M en p
d_pf, $\mathrm{d}f(p)$	diferencial d'una funció $f\colon M \to \mathbf{R}$ en un punt p
	Tema 4
$\tau_M\colon \mathrm{T}M \to M$	fibrat tangent de M
$\Phi\colon \tau_M^{-1}(U) \to \hat U \times \mathbf{R}^m$	carta natural de la varietat $\mathrm{T}M$ definida per una carta $\varphi\colon U \to \hat U$ de M
$\mathrm{T}F$	aplicació tangent de F
$\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, E_i^φ	camps vectorials coordenats definits per una carta φ amb funcions coordenades (x^i)
$\mathfrak{X}(M)$, $\mathcal{T}^1(M)$	$\mathrm{C}^\infty(M)$-mòdul i $\mathbf{R}$-àlgebra de Lie dels camps vectorials diferenciables en M
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\partial}{\partial t}, \ldots$	camp vectorial unitat de $\mathbf{R}$
$\mathscr{L}_X f$, $X \cdot f$, $X(f)$	derivada d'una funció f respecte a un camp vectorial X en M
$[X, Y]$	parèntesi de Lie de dos camps vectorials
$X \underset{F}{\sim} Y$	camps vectorials X, Y relacionats per una aplicació F
$F_*(X)$	imatge directa o push-forward d'un camp vectorial X per un difeomorfisme F
$F^*(Y)$	imatge recíproca o pull-back d'un camp vectorial Y per un difeomorfisme F
$\pi_M\colon \mathrm{T}^*M \to M$, $\tau_M^*\colon \mathrm{T}^*M \to M$	fibrat cotangent de M
$\Phi^\vee\colon \pi_M^{-1}(U) \to \hat U \times \mathbf{R}^m$	carta natural de la varietat T^*M definida per una carta $\varphi\colon U \to \hat U$ de M
$\Omega^1(M)$, $\mathcal{T}_1(M)$	$\mathrm{C}^\infty(M)$-mòdul de les 1-formes diferencials diferenciables en M

$\mathrm{d}f$	diferencial d'una funció
$\langle\omega, X\rangle$, $\omega(X)$, $i_X\omega$	contracció d'una 1-forma diferencial ω i un camp vectorial X
$F^*(\omega)$	imatge recíproca o pull-back d'una 1-forma diferencial ω per una aplicació F
$F_*(\theta)$	imatge directa o push-forward d'una 1-forma diferencial θ per un difeomorfisme F
	Tema 5
γ', $\dot\gamma$	velocitat o derivada d'un camí, aixecament canònic d'un camí en M al fibrat tangent $\mathrm{T}M$
$\gamma_p\colon I_p \to M$	corba integral maximal d'un camp vectorial amb condició inicial $(0, p)$
$\mathrm{F}_X\colon \mathscr{D}_X \to M$	flux d'un camp vectorial X ($\mathscr{D}_X \subset \mathbf{R} \times M$)
$\mathrm{F}'_X\colon \mathscr{D}_X \to \mathrm{T}M$	vector tangent de F_X respecte a la variable temporal t
$\mathrm{F}^t_X\colon M_t \to M_{-t}$	difeomorfismes definits pel flux d'un camp vectorial X
$\mathscr{O}_p$	òrbita de p per un grup de transformacions
	Tema 6
$R(p)$, R_p	valor d'un camp tensorial R en un punt p
$R(X_1, \ldots, X_\ell, \theta_1, \ldots, \theta_k)$	acció d'un camp tensorial de tipus (k, l) sobre k 1-formes diferencials i ℓ camps vectorials
$R + S$, fR	suma de dos camps tensorials, producte d'una funció per un camp tensorial
$\mathcal{T}^k_\ell(M)$	$\mathrm{C}^\infty(M)$-mòdul dels camps tensorials k-contravariants ℓ-covariants diferenciables en M
$R \otimes S$	producte tensorial de dos camps tensorials
$\mathcal{T}^\bullet_\bullet(M)$	$\mathrm{C}^\infty(M)$-àlgebra dels camps tensorials diferenciables
$\mathcal{T}^\bullet(M)$	$\mathrm{C}^\infty(M)$-àlgebra dels camps tensorials diferenciables contravariants

$\mathcal{T}_\bullet(M)$	$\mathrm{C}^\infty(M)$-àlgebra dels camps tensorials diferenciables covariants
$c^i_j(R)$	contracció de l'i-èsim índex contravariant amb el j-èsim índex covariant d'un camp tensorial homogeni mixt
$F^*(S)$	imatge recíproca o pull-back d'un camp tensorial covariant S per una aplicació F, o d'un camp tensorial qualsevol per un difeomorfisme
$F_*(R)$	imatge directa o push-forward d'un camp tensorial R per un difeomorfisme F
$\Omega^k(M)$	$\mathrm{C}^\infty(M)$-mòdul de les k-formes diferencials diferenciables en M
$\alpha \wedge \beta$	producte exterior de dues formes diferencials
$\Omega^\bullet(M)$	$\mathrm{C}^\infty(M)$-àlgebra de les formes diferencials diferenciables en M
$i_X\alpha$, $i(X)\alpha$, $X \lrcorner\, \alpha$	contracció d'una forma diferencial α amb un camp vectorial X
$\mathrm{d}\alpha$	diferencial exterior d'una forma diferencial α
$\mathscr{L}_X R$	derivada de Lie d'un camp tensorial R respecte a un camp vectorial X
	Tema 7
$\mathfrak{X}_{\mathrm{loc}}(M)$	conjunt dels camps vectorials locals diferenciables de M
$\mathrm{Sec}_{\mathrm{loc}}(D)$	conjunt de les seccions locals diferenciables d'una distribució tangent D
$\mathrm{Dist}(\mathcal{V})$	distribució tangent generada per un conjunt de camps vectorials locals $\mathcal{V}$
D°	codistribució anihiladora d'una distribució tangent D
	Tema 8
∇	operador de derivació covariant
Γ^k_{ij}	símbols de Christoffel d'una connexió

$\nabla_t \equiv \nabla_t^\gamma$	operador de derivació covariant al llarg d'un camí γ (t, paràmetre)
T	operador de torsió d'una connexió
R	operador de curvatura d'una connexió
	Tema 9
$\hat{g}$	isomorfisme musical definit per una mètrica g
$\operatorname{grad} f$	gradient d'una funció f respecte a una mètrica
v_g	volum riemannià definit per una mètrica
$[ij,k]$	símbols de Christoffel de primera espècie
$I\!I$	segona forma fonamental d'una subvarietat d'una varietat riemanniana
h	segona forma fonamental escalar d'una hipersuperfície
S	aplicació de Weingarten
K	curvatura gaussiana
Rie	tensor de Riemann
Ric	tensor de Ricci
S	curvatura escalar
$\ell(\gamma)$	longitud d'un camí γ en una varietat riemanniana
	Tema 10
$\hat{\omega}$	isomorfisme musical definit per una forma simplèctica ω
X_h	camp vectorial hamiltonià, o gradient simplèctic, d'una funció h respecte a una forma simplèctica
$\mathfrak{X}_{\mathrm{h}}(M) \subset \mathfrak{X}_{\mathrm{lh}}(M)$	camps vectorials hamiltonians i localment hamiltonians d'una varietat simplèctica M
$\{f,g\}$	claudàtor de Poisson, o parèntesi de Poisson, de les funcions f, g en una varietat simplèctica
$\widehat{\Lambda}$	isomorfisme musical definit per un tensor de Poisson Λ

Complements

$\partial/\partial t$	camp vectorial en $\mathbf{R} \times M$ deduït del camp vectorial unitat de $\mathbf{R}$
L_g, R_g	translacions per l'esquerra i per la dreta definides per un element $g \in G$ d'un grup de Lie
X_u	camp vectorial invariant per l'esquerra definit per un vector tangent $u \in \mathrm{T}_e G$ en un grup de Lie
$\mathfrak{X}_{\mathrm{L}}(G)$	$\mathbf{R}$-àlgebra de Lie dels camps vectorials invariants per l'esquerra en un grup de Lie G
$\mathfrak{g}$, $\mathrm{Lie}(G)$	àlgebra de Lie d'un grup de Lie G
$\operatorname{div} X$	divergència d'un camp vectorial X respecte a una forma de volum
γ''	aixecament canònic a $\mathrm{TT}M$ d'un camí γ en M
θ_M, ω_M	formes diferencials canòniques del fibrat cotangent de M
$\bar{X}$	suspensió d'un camp vectorial dependent del temps X
$F(t, t_\circ, p) = F^{tt_\circ}(p)$	flux dependent del temps d'un camp vectorial dependent del temps