

Geometria Diferencial 2 / Teorema de redreçament de camps vectorials

22 abril 2008

Teorema de redreçament de camps vectorials

Sigui M una varietat, X un camp vectorial diferenciable en M , $p \in M$. Si $X(p) \neq 0$, llavors existeix un sistema de coordenades (x^i) en p amb el qual localment es pot expressar $X = \partial/\partial x^1$.

El procediment per redreçar X en p es pot resumir així. Es pren una hipersuperfície $M_\circ \subset M$ que contingui p i tal que $X_p \notin T_p M_\circ$. Aleshores la restricció $F_\circ: \mathcal{D} \cap (\mathbf{R} \times M_\circ) \rightarrow M$ del flux de X és un difeomorfisme local en $(0, p)$ tal que, en un obert prou petit, $F_{\circ*}(\frac{\partial}{\partial t}) = X$.

Això és conseqüència de la successió de lemes següent:

Lema Sigui $F: N \rightarrow M$ diferenciable. Sigui $N_\circ \subset N$ una subvarietat, $F_\circ: N_\circ \rightarrow M$ la restricció. Siguin $Y \in \mathfrak{X}(N)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ camps vectorials F -relacionats.

Si Y és tangent a N_\circ , i $Y_\circ \in \mathfrak{X}(N_\circ)$ és la seva restricció a N_\circ , llavors Y_\circ i X estan F_\circ -relacionats.

Lema Siguin $N = \mathbf{R} \times M$, i $M_\circ \subset M$ una subvarietat.

El camp vectorial $\frac{\partial}{\partial t}$ de $\mathbf{R} \times M$ és tangent a la subvarietat $\mathbf{R} \times M_\circ$.

Lema Sigui $F: \mathcal{D} \rightarrow M$ el flux d'un camp vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, on $\mathcal{D} \subset \mathbf{R} \times M$ és el seu domini.

Els camps vectorials $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(\mathcal{D})$ i $X \in \mathfrak{X}(M)$ estan F -relacionats.

Lema Amb les notacions anteriors, sigui $M_\circ \subset M$ una subvarietat, i $F_\circ: (\mathbf{R} \times M_\circ) \cap \mathcal{D} \rightarrow M$ la restricció del flux de X .

Aleshores els camps vectorials $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}((\mathbf{R} \times M_\circ) \cap \mathcal{D})$ i $X \in \mathfrak{X}(M)$ estan F_\circ -relacionats.

Lema Sigui $F: N \rightarrow M$ una submersió en q . Se suposa $\dim N = \dim M + 1$. Sigui $N_\circ \subset N$ una hipersuperfície tal que $q \in N_\circ$. Sigui $F_\circ: N_\circ \rightarrow M$ la restricció de F .

F_\circ és un difeomorfisme local en q sii $\text{Ker } T_q F \cap T_q N_\circ = \{0\}$.

Lema Sigui $F: \mathcal{D} \rightarrow M$ el flux de $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Per a tot $p \in M$, F és una submersió en $(0, p)$, i

$$\text{Ker } T_{(0,p)} F = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_0, -X_p \right) \right\rangle$$

(subespai de $T_{(0,p)} \mathcal{D} \cong T_0 \mathbf{R} \times T_p M$).

Lema Amb les notacions anteriors, sigui $M_\circ \subset M$ una subvarietat amb $p \in M_\circ$.

El vector tangent $\left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_0, -X_p \right) \in T_{(0,p)} \mathcal{D}$ és tangent a la subvarietat $(\mathbf{R} \times M_\circ) \cap \mathcal{D}$ sii $X_p \in T_p M_\circ$.

Proposició

Sigui M una varietat, X un camp vectorial diferenciable en M , $F: \mathcal{D} \rightarrow M$ el seu flux, $M_\circ \subset M$ una hipersuperfície. Sigui $p \in M_\circ$. Suposem que $X_p \notin T_p M_\circ$. Aleshores:

- La restricció $F_\circ: \mathcal{D} \cap (\mathbf{R} \times M_\circ) \rightarrow M$ del flux de X és un difeomorfisme local en $(0, p)$.
- Siguin $I_\circ \ni 0$, $U_\circ \ni p$ oberts tals que $I_\circ \times U_\circ \subset \mathcal{D}$ i la restricció $F_\circ: I_\circ \times U_\circ \rightarrow U = F(I_\circ \times U_\circ)$ és un difeomorfisme. Llavors

$$F_{\circ*} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = X|_U.$$

- Suposem a més que (U_\circ, φ_\circ) és una carta de M_\circ . Llavors (U, φ) , amb $\varphi = (\text{Id} \times \varphi_\circ) \circ F_\circ^{-1}: U \rightarrow I_\circ \times \varphi_\circ(U_\circ)$, és una carta de M en p tal que, escrivint-ne les coordenades $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$, s'expressa $X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}$.