
Probabilitat i Estadística

Problemes

llista de problemes per a l'assignatura de Probabilitat i Estadística dels
Graus en Enginyeria de Telecomunicació i en Enginyeria Física de l'ETSETB

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

maig 2023 / actualitzat 6 setembre 2024

Document elaborat per Josep Fàbrega i Xavier Gràcia durant el quadrimestre de primavera del 2023, principalment a partir de llistes de problemes contingudes en apunts de Josep M. Aroca, així com de llibres diversos, exàmens, etc.

Sumari

0	Combinatòria i probabilitat elemental	2
1	Probabilitat bàsica	6
2	Variables aleatòries	12
3	Variables aleatòries multidimensionals	20
4	Estadística	30

Nota En general, expressarem els resultats numèrics d'aquest document amb quatre dígits significatius. Tot i que en alguns casos aquesta precisió és innecessària, creiem que facilita la comprovació dels càlculs realitzats en la resolució del problema.



© els autors 2024

Document subjecte a la llicència de Reconeixement – NoComercial –
CompartirIgual 4.0 Internacional

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

0 Combinatòria i probabilitat elemental

Problemes bàsics

1. Una xifra és un valor del conjunt $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Considereu el conjunt de números de tres xifres (admetent zeros a l'esquerra).

- (a) Quants n'hi ha?
- (b) Quants d'aquests tenen les xifres diferents?
- (c) Quants tenen les tres xifres iguals?
- (d) Quants tenen alguna xifra repetida?

2. Es llancen dos daus. Calculeu les probabilitats següents:

- (a) Que donin el mateix resultat.
- (b) Que algun surti parell.
- (c) Que la suma dels dos valgui 5.
- (d) Que no surti ningun u.
- (e) Que surti exactament un tres.
- (f) Que surti algun tres.
- (g) Que surtin dos tresos.

3. Seleccionem 5 elements ordenats, sense repetició, dins del conjunt $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

- (a) Quantes tries podem fer?
- (b) En quantes d'aquestes no hi és present el 3?
- (c) Quina és la probabilitat que en fer l'anterior selecció hi sigui present el 3?

4. Al nostre bar tenim 7 licors forts, 5 licors suaus i 4 refrescs. Quants còctels podem preparar que continguin:

- (a) Dos licors forts i dos licors suaus?
- (b) Un refresc, 3 licors suaus i un de fort?
- (c) Un refresc i dos licors?

5. Donat un grup de 30 persones, quina és la probabilitat que totes celebrin l'aniversari en dies diferents?

6. Volem formar una contrasenya amb 5 lletres de l'alfabet de 26 lletres. Quantes possibilitats tenim si:

- (a) Les lletres han de ser diferents?
- (b) Les lletres poden estar repetides?
- (c) Han de seguir el patró consonant-vocal-consonant-vocal-consonant, sense repeticions?
- (d) Com l'anterior apartat però amb possibles repeticions?

7. Es tira un dau sis vegades. Quina és la probabilitat que surtin els sis resultats diferents?

8. Què és més probable: treure alguna vegada un as tirant un dau quatre vegades, o treure alguna vegada dos asos tirant dos daus 24 vegades?

9. En una loteria del tipus 6/49 tenim un requadre amb 49 números, dels quals hem de marcar-ne 6. El resultat del sorteig són els 6 números premiats més un altre anomenat complementari. El premi depèn de quants encerts tenim. En el cas de 5 encerts, el premi és diferent si el número restant que tenim és el complementari o no.

Quantes combinacions possibles es poden fer?

Calculeu les probabilitats dels diferents tipus d'encerts: $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5-c)$, $P(5+c)$, $P(6)$.

10. Es permuten a l'atzar les 9 lletres AAAACCRRTT. Quina és la probabilitat que obtinguem la paraula CATARACTA?

11. De quantes maneres diferents es poden col·locar 2 boles idèntiques en 4 caixes numerades? I col·locar 10 boles idèntiques en 3 caixes numerades?
(El cas general es discuteix en el problema 18.)

12. Una urna conté n boles blanques i n boles negres. N'extraïem $2k$ boles. Calculeu la probabilitat d'extreure el mateix nombre de boles de cada color si fem l'extracció

(a) sense reposició;

(b) amb reposició.

Calculeu el límit d'aquestes probabilitats quan $n \rightarrow \infty$.

(Indicació: useu la fórmula de Stirling per a provar que, per a k fixada i n gran, $\binom{n}{k} \simeq \frac{n^k}{k!}$.)

Problemes addicionals

13. Quants números de tres xifres tenen totes les xifres imparelles? Quants d'aquests tenen totes les xifres diferents?

14. Es genera un número de n xifres a l'atzar (admetent zeros a l'esquerra). Calculeu la probabilitat que surti capicua (és a dir, que no s'altera si s'inverteix l'ordre de les seves xifres).

15.

(a) De quantes maneres diferents es poden asseure n persones en una taula circular?

(b) De quantes maneres diferents es poden asseure $3n$ persones en una taula en forma de polígon de n costats amb tres seients a cada costat?

16. Quantes paraules es poden formar reordenant les lletres de la paraula ABRACADABRA?

17. Una baralla francesa sense comodins té 52 cartes (4 colls, 13 números). Calculeu la probabilitat de les jugades següents en una mà de pòquer (5 cartes): parella, doble parella, trio, escala, full, color, pòquer, escala de color, escala reial.

18. De quantes maneres diferents es poden col·locar n boles en m caixes en els casos següents:

- (a) Les boles i les caixes estan numerades; per tant es distingeixen dues distribucions si tenen boles diferents a caixes diferents.
- (b) Com en el cas (a) però exigint que hi hagi n_1 boles a la caixa 1, n_2 a la caixa 2, etc (amb $n_1 + \dots + n_m = n$).
- (c) Les boles no són distingibles però les caixes sí, i a cada caixa hi ha com a molt una bola ($m \geq n$).
- (d) Les boles no són distingibles però les caixes sí (per tant dues distribucions es distingeixen només pel nombre de boles a cada caixa).
- (e) Com en el cas (d) però $n \geq m$ i a cada caixa hi ha almenys una bola.

19. De quantes maneres diferents es poden col·locar n boles numerades en 2 caixes indistingibles ($n \geq 2$)?

20. De quantes maneres diferents es poden col·locar n boles numerades en m caixes numerades ($n \geq m$) de manera que cap caixa no quedi buida?

21. ¿De quantes maneres podem posar dues torres blanques en un tauler d'escacs sense que s'amenacin? ¿De quantes maneres podem posar n torres blanques en un tauler de mida $N \times N$ sense que s'amenacin?

22.

- (a) Quantes diagonals té un polígon regular de n costats?
- (b) Quin és el nombre mínim de vèrtexs que cal prendre com a origen per a dibuixar totes les diagonals?

Respostes

1

(a) 1000 (b) 720 (c) 10 (d) 280

2

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{1}{9}$ (d) $\frac{25}{36}$ (e) $\frac{5}{18}$ (f) $\frac{11}{36}$ (g) $\frac{1}{36}$

3

(a) 6720 (b) 2520 (c) $5/8$

4

(a) 210 (b) 280 (c) 264

5

0.2937

6

(a) 7 893 600 (b) 11 881 376 (c) 159 600
(d) 231 525

7

0.01543.

8

Algun as en 4 tirades: 0.5177. Algun doble as en 24 tirades: 0.4914.

9

13 983 816 combinacions.

$P(0) \approx 0.4360$, $P(1) \approx 0.4130$, $P(2) \approx 0.1324$,
 $P(3) \approx 0.01765$, $P(4) \approx 0.0009686$,
 $P(5-c) \approx 1.802 \cdot 10^{-5}$, $P(5+c) \approx 4.291 \cdot 10^{-7}$,
 $P(6) \approx 7.151 \cdot 10^{-8}$.

10

0.0002646

11

10; 66.

12

(a) $\binom{n}{k}^2 / \binom{2n}{2k}$; (b) $\binom{2k}{k} / 2^{2k}$. El primer tendeix al resultat de (b), que és independent de n .

13

125; 60.

14
 $\frac{1}{10^{n/2}}$ si n és parell, i $\frac{1}{10^{(n-1)/2}}$ si n és imparell.

15

 (a) $(n-1)!$ (b) $3(3n-1)!$
16

83 160

17

Parella: 0.4226. Doble parella: 0.04754. Trio: 0.02113. Escala: 0.003925. Color: 0.001965. Full: 0.001441. Pòquer: $2.401 \cdot 10^{-4}$. Escala de color: $1.385 \cdot 10^{-5}$. Escala reial: $1.539 \cdot 10^{-6}$.

18

 (a) $\text{VR}_m^n = m^n$

 (b) $\text{PR}_m^{n_1, n_2, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$

 (c) $C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! (m-n)!}$ (d) $\text{CR}_m^n =$
 $C_{m+n-1}^n = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)! n!}$

 (e) $\binom{n-1}{m-1}$
19
 2^{n-1}
20
 $\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$
21

 1568. $\frac{N!^2}{(N-n)!^2 n!}$
22

 (a) $n(n-3)/2$ (b) $n-2$

1 Probabilitat bàsica

Problemes bàsics

Esdeveniments i independència

1. En l'experiment de tirar dos daus, considerem els esdeveniments: A : «el primer dau dona resultat parell»; B : «el segon dau és un 2»; C : «la suma dels dos daus val 6».

Estudieu la independència de cada parell d'aquests esdeveniments.

2. S'extreu una carta d'una baralla francesa (52 cartes). Donats els esdeveniments $A = \{\text{és un as}\}$ i $B = \{\text{és de cors}\}$, calculeu les probabilitats $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ i $P(\overline{B})$.

Són independents els esdeveniments A i B ?

3. S'extreuen dues cartes (sense reposició) d'una baralla francesa (52 cartes). Donats els esdeveniments $A = \{\text{surt algun as}\}$ i $B = \{\text{surt alguna carta de cors}\}$, calculeu les probabilitats $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ i $P(A \cap B)$.

Són independents els esdeveniments A i B ?

4. Tirem dos daus i considerem els esdeveniments següents: A : el primer dau dona resultat parell; B : el segon dau dona resultat parell; C : la suma dels dos daus dona imparell.

Proveu que aquests esdeveniments són independents dos a dos, però els tres esdeveniments *no* són conjuntament independents.

5. Juguem a una loteria de 100 números.

(a) Quina és la probabilitat que ens toqui alguna vegada si juguem 50 vegades?

(b) Quantes vegades hem de jugar perquè la probabilitat que ens toqui alguna vegada valgui almenys 0.5?

6. En el cas de la loteria del tipus 6/49 estudiat en el problema 9 del tema anterior, per a cadascun dels quatre resultats menys probables, calculeu la probabilitat d'obtenir-los alguna vegada si juguem cada dia durant 30 anys. (Assumim anys de 365 dies.)

7. Algunes qüestions sobre independència:

(a) Demostreu que A i B independents implica A i $\overline{B}$ independents. Demostreu que també implica $\overline{A}$ i $\overline{B}$ independents.

(b) Demostreu que, per a tot esdeveniment A , Ω i A són independents, i $\emptyset$ i A són independents.

(c) Poden dos esdeveniments no trivials ser incompatibles i independents alhora?

8. En l'experiment de tirar un dau, trobeu dos esdeveniments no trivials que siguin independents.

Probabilitat condicionada i fórmula de Bayes

9. Una casa té dos pisos amb tres portes cadascun. Tenim un clauer amb la clau de cada porta més dues claus mestres que obren totes les portes de cada pis respectivament, més una clau “supermestra” que obre totes les portes de la casa.

- (a) Triem una clau a l'atzar i la provem en una porta. Quina és la probabilitat que s'obri?
- (b) Si l'anterior porta s'obre, quina és la probabilitat que haguem triat la clau "supermestra"?
- (c) Triem una clau a l'atzar i la provem en dues portes del primer pis sense poder-les obrir. Quina és la probabilitat que aquesta clau permeti obrir la primera porta del segon pis?

10. D'una baralla espanyola amb 40 cartes (4 colls amb 10 cartes a cada coll) es tria a l'atzar una mà de 5 cartes.

- (a) Calculeu la probabilitat que entre les 5 cartes escollides hi hagi almenys 2 asos.

Quant val aquesta probabilitat si:

- (b) Sabem que a la mà triada hi ha almenys un as.
- (c) Hem mirat una de les cinc cartes de la mà i ha resultat ser un as.

11. Una urna conté 3 boles blanques, 5 boles vermelles i 8 boles negres. S'hi extreuen dues boles (sense reposició) a l'atzar.

- (a) Quina és la probabilitat que siguin de color diferent?
- (b) Si les boles extretes són del mateix color, quina és la probabilitat que siguin negres?
- (c) Són els esdeveniments A: «Surt alguna bola blanca» i B: «Surt alguna bola negra» independents?

12. L'urna A conté 2 boles blanques i 3 boles negres, mentre que l'urna B conté 4 boles blanques i 3 boles negres. Es passen dues boles a l'atzar de l'urna A a la B, i després s'extreuen dues boles de B.

- (a) Si aquestes boles són blanques, quina és la probabilitat que haguem passat alguna bola negra de A a B?
- (b) El fet que les boles finals siguin blanques afavoreix que les boles que hagin passat de A a B siguin blanques. Però la probabilitat anterior és bastant gran. Calculeu la probabilitat anterior, ara sense condicionar, per veure que el resultat és consistent.

13. Un canal de comunicació fa servir dos símbols d'entrada, a i b , i dos símbols de sortida, 0 i 1. Sabem que la probabilitat de transmetre a és $P(a) = 0.6$, i la probabilitat de transmetre b és $P(b) = 0.4$. Sabem també que la probabilitat de rebre 0 si s'ha transmès a és $P(0|a) = 0.2$, i, anàlogament, $P(0|b) = 0.7$.

Un cop rebut el símbol $i \in \{0, 1\}$, es decideix quin símbol s'ha transmès d'acord amb la regla següent: si $P(a|i) \geq P(b|i)$, aleshores decidim a ; altrament, si $P(a|i) < P(b|i)$, decidim b . (Naturalment, $P(x|i)$ denota la probabilitat d'haver transmès $x \in \{a, b\}$ donat que s'ha rebut $i \in \{0, 1\}$.)

Calculeu la probabilitat d'error, és a dir, la probabilitat de decidir equivocadament el símbol transmès.

14. Una malaltia afecta l'1% de la població. Es disposa d'un test que té una probabilitat de 0.05 de donar un fals negatiu, i de 0.02 de donar un fals positiu.

- (a) Es tria una persona a l'atzar i se li fa el test. Quina és la probabilitat que doni positiu?
- (b) Si una persona triada a l'atzar dona positiu del test, quina és la probabilitat que estigui malalta?

15. La *prevalença* d'una malaltia és la proporció p de la població que la té. D'altra banda, la *sensibilitat* d'un test és la probabilitat α que doni positiu en una persona malalta, mentre que l'*especificitat* és la probabilitat β que doni negatiu en una persona sana.

Triem una persona a l'atzar; anomenem M l'esdeveniment «la persona està malalta» i T l'esdeveniment «el test dona positiu». Llavors $P(M) = p$, $P(T|M) = \alpha$, $P(\bar{T}|\bar{M}) = \beta$. Sigui t la taxa de positivitat del test, $P(T) = t$.

- (a) Obteniu una fórmula que expressi t en termes de p , α i β .
- (b) Calculeu la probabilitat $P(M|T)$.
- (c) En un estudi d'hipertensió arterial s'utilitzà un test amb sensibilitat del 93% i especificitat del 91%. S'obtingué una proporció del 25% de resultats positius del test. Quina era la prevalença de la malaltia en aquella població?

16. Tres satèl·lits, A, B i C, intenten establir connexió amb un centre de comunicació. La probabilitat d'aconseguir-ho és $1/6$ per a A, $1/4$ per a B i $1/3$ per a C (les tres connexions són independents).

- (a) Calculeu les probabilitats que cada satèl·lit hagi establert connexió conegut el nombre de connexions establertes, N (és a dir, $P(A|N=1)$, $P(A|N=2)$, $P(B|N=1)$, etc).
- (b) Sumeu les probabilitats dels tres satèl·lits per als casos $N=1$ i $N=2$. Val la suma 1? Per què?
- (c) Són les connexions de A i de B independents si sabem que hi ha hagut alguna connexió?

Altres: repeticions il·limitades, inclusió-exclusió

17. Dos jugadors tiren alternativament un dau. Guanya el joc el primer que treu un 6. Quina és la probabilitat que guanyi el que comença a jugar?

18. Dos jugadors A i B tiren simultàniament un dau cadascun. El joc es repeteix fins que algú treu un 6 i guanya, llevat que treguin un 6 els dos jugadors, declarant-se un empat. Calculeu les probabilitats $P(\text{empat})$, $P(\text{guanya A})$, $P(\text{guanya B})$.

19. Tirant un dau n vegades, quina és la probabilitat que apareguin els sis resultats possibles? (Indicació: apliqueu el principi d'inclusió-exclusió.)

Comproveu que $n=6$ dona el mateix que el problema 7 del tema anterior.

20. El detergent HOMO dóna una lletra del conjunt $\{H, O, M\}$ en cada paquet i fa un regal als que completen la paraula HOMO. Si les tres lletres apareixen amb la mateixa probabilitat, quina es la probabilitat de formar la paraula comprant 10 paquets? (Indicació: apliqueu el principi d'inclusió-exclusió.)

Problemes addicionals

21. Demostreu que per a tot parell d'esdeveniments A, B se satisfà

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 1 + P(\bar{A} \cap \bar{B}).$$

22. Donats tres esdeveniments A, B, C , es demana:

(a) Demostreu que es compleixen les igualtats

$$P(A \cap B \cap C) = P(B \cap C) - P((B \setminus A) \cap C) = P(A \cap C) - P((A \setminus B) \cap C).$$

(Recordeu que $A \setminus B$ es refereix al conjunt d'elements que pertanyen a A però no a B .)

(b) Si C és independent de A i de B , aleshores, demostreu que C és independent de $A \setminus B$ si i només si C és independent de $B \setminus A$. (Suggeriment: utilitzeu el resultat de l'apartat (a).)

23. Un ordinador té instal·lat un programa per detectar un determinat virus. Sabem que la probabilitat que l'ordinador tingui aquest virus és 0.3. Si l'ordinador té el virus, la probabilitat de ser detectat pel programa és 0.9; i també sabem que si l'ordinador no té el virus, pot aparèixer un missatge d'alarma amb probabilitat 0.01.

(a) Si apareix un missatge d'alarma, quina és la probabilitat que l'ordinador *no* tingui el virus?

(b) Si no apareix cap missatge, quina és la probabilitat que l'ordinador tingui el virus?

(c) Quina és la probabilitat que l'ordinador tingui el virus i el programa no el detecti?

24. Sigui $\{C_1, \dots, C_n\}$ una partició de l'espai mostral d'un experiment aleatori, tal que $P(C_i) \neq 0$, $1 \leq i \leq n$. Si A i B són esdeveniments i $P(B) \neq 0$, demostreu la versió següent del teorema de la probabilitat total:

$$P(A | B) = \sum_{i=1}^n P(A | C_i \cap B) P(C_i | B).$$

(En la fórmula anterior hem de donar el valor 0 als termes per als quals $P(C_i \cap B) = 0$.)

25. Demostreu que la probabilitat u_n que en n llançaments d'una moneda justa *no s'observin* quatre cares consecutives satisfà la relació de recurrència

$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{4}u_{n-2} + \frac{1}{8}u_{n-3} + \frac{1}{16}u_{n-4}$$

per a $n \geq 4$. Calculeu u_8 .

26. Una capsa conté N cartes numerades de 1 a N i es treuen d'una en una a l'atzar. Si el número de la carta k -èsima extreta és el més gran de les k primeres cartes extretes, quina és la probabilitat que aquest número sigui N ?

27. Un canal transmet missatges consistents en seqüències de 0's i 1's. La probabilitat que un símbol arribi canviat val ϵ . Comproveu si els procediments següents redueixen la probabilitat que un símbol es detecti erròniament:

(a) Cada símbol s'envia tres vegades i es tria el resultat més abundant.

(b) Cada símbol es va enviant fins que algun valor ha aparegut dues vegades. Es tria aquest valor.

28. Dos jugadors, A i B , llancen alternativament dos daus. A guanya si treu, entre els dos daus, 10 punts abans que B n'obtingui 8. En cas contrari guanya B . Suposant que comença a tirar A , calculeu la probabilitat que guanyi A .

29. Tres jugadors tiren alternativament una moneda amb probabilitat de cara p . Guanya el primer que treu cara. Calculeu la probabilitat que té cada jugador de guanyar.

30. Sis jugadors s'assignen els números 1, 2, 3, 4, 5, 6 i fan el joc següent. Un d'ells tira un dau. Si li surt el seu número, guanya. Si no, passa el dau al jugador corresponent al número que ha sortit. Aquest jugador repeteix el joc, etc. Calculeu la probabilitat que té de guanyar cadascun del sis jugadors.

31. *Fórmula d'inclusió-exclusió* A partir del resultat conegut $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dedueu una fórmula anàloga per a $P(A \cup B \cup C)$.

Generalitzeu el resultat per a $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$.

32. *Desarranjaments* Volem enviar n cartes. Com que tenim pressa per acabar, col·loquem les cartes en els sobres de manera aleatòria. Quina és la probabilitat que ninguna carta arribi al seu destinatari?

(Indicació: apliqueu el principi d'inclusió-exclusió.)

Calculeu el límit d'aquesta probabilitat per a $n \rightarrow \infty$. Compareu-la per a $n = 10$ i $n = 20$.

33. Siguin $A_1, A_2, \dots, A_n$ esdeveniments amb $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) > 0$. Proveu que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

34. En una urna hi ha n boles blanques i n de negres. S'extreuen d'una en una. Si surt blanca es torna a l'urna i si surt negra es treu. Quina és la probabilitat que les n primeres extraccions siguin totes del mateix color?

Respostes

1

A i B són independents, mentre que C no és independent de cap dels altres dos.

2

$$P(A) = \frac{1}{13}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{52},$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{13} \text{ i } P(\bar{B}) = \frac{3}{4}.$$

A i B són independents.

3

$$P(A) = \frac{33}{221}, P(B) = \frac{15}{34}, P(A \cup B) = \frac{116}{221},$$

$$P(A \cap B) = \frac{29}{442}.$$

A i B no són independents.

4

$$P(A \cap B \cap C) = 0, \text{ mentre que}$$

$$P(A) P(B) P(C) = 1/8.$$

5

(a) 0.3950 (b) 69

6

En 10.950 apostes:

encerts	4	5-c	5+c	6
prob.	0.999975	0.1791	0.004687	0.0007827

7

(c) Algun ha de tenir probabilitat nul·la.

8

Els esdeveniments només poden tenir cardinal 2 i 3 amb un element comú, o bé 3 i 4 amb dos elements comuns. Per exemple, $\{1, 2\}$ i $\{1, 3, 4\}$, o $\{1, 2, 3\}$ i $\{1, 2, 4, 5\}$.

9

(a) 1/3 (b) 1/3 (c) 2/5

10

(a) $97/1406 \approx 0.06899$ (b) $1261/7806 \approx 0.1615$

(c) $2594/9139 \approx 0.2838$

11

(a) 0.6583 (b) 0.6829 (c) No són independents

12

(a) $\frac{26}{31} = 0.8387$. (b) 0.9. Efectivament, la condició ha disminuït la probabilitat de passar boles negres.

13

0.24.

14

(a) 0.0293 (b) 0.3242

15

(a) $t = \alpha p + (1-\beta)(1-p)$
 (b) $\alpha p / (\alpha p + (1-\beta)(1-p))$
 (c) $p = (t - (1-\beta)) / (\alpha + \beta - 1) \approx 0.1905$

16

(a) Indiquem l'esdeveniment "A estableix connexió" com A , etc. La taula següent dona $P(S|N)$:

$S \backslash N$	0	1	2	3
A	0	6/31	5/10	1
B	0	10/31	7/10	1
C	0	15/31	8/10	1

(b) Quan $N = 1$ sumen 1 ja que els esdeveniments A, B, C constitueixen una partició. Quan $N = 2$ la suma no és 1 ja que no formen partició (A i B són compatibles, etc).
 (c) No són independents.

17

$\frac{6}{11}$.

18

Empat: $\frac{1}{11}$. Guanya A: $\frac{5}{11}$. Guanya B: $\frac{5}{11}$.

19

$\sum_{k=0}^5 (-1)^k \binom{6}{k} \left(1 - \frac{k}{6}\right)^n$ per a $n \geq 6$.

20

0.8617.

23

(a) 0.02527 (b) 0.04149 (c) 0.03

25

$u_8 = 13/16$

26

k/N

27

Els dos casos són equivalents:
 $P(\text{error}) = 3\epsilon^2 - 2\epsilon^3$. Si ϵ és prou petit,
 $P(\text{error}) < \epsilon$.

28

0.3956

29

Primer: $1/(1+q+q^2)$. Segon: $q/(1+q+q^2)$.
 Tercer: $q^2/(1+q+q^2)$. ($q = 1-p$.)

30

El primer $\frac{2}{7}$, els altres $\frac{1}{7}$.

31

$P(A \cup B \cup C) =$
 $P(A) + P(B) + P(C) -$
 $P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) =$
 $\sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) -$
 $\dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$

32

$P = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$.

El límit val $e^{-1} \approx 0.367879441$. Per a $n = 10$,
 $P \approx 0.367879464$; per a $n = 20$,
 $P \approx 0.367879441$.

34

$(1/2)^n + 1/\binom{2n}{n}$

2 Variables aleatòries

Problemes bàsics

Funcions de distribució, de probabilitat i de densitat

1. Es tiren dos daus. Calculeu la funció de probabilitat de la variable aleatòria X donada per la suma dels dos resultats, i feu una representació gràfica aproximada de la seva funció de distribució. Calculeu la probabilitat que X sigui parella.

2. Una variable aleatòria discreta X té funció de distribució $F(x) = 0$ per a $x < -1$, $F(x) = 1/3$ per a $-1 \leq x < 0$, $F(x) = 1/2$ per a $0 \leq x < 2$, i $F(x) = 1$ per a $x \geq 2$.

(a) Dibuixeu la gràfica de F .

(b) Calculeu $P(X=-2)$, $P(X=-1)$, $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(0 \leq X \leq 2)$ i $P(0 < X < 2)$.

(c) Doneu la funció de probabilitat de X .

3. Una variable aleatòria discreta X pren els valors $0, 1, 2, \dots$ amb probabilitats $P(X=n) = Ca^n$. Digueu quins valors pot prendre a i calculeu C . Calculeu les probabilitats que

(a) $X > 4$;

(b) X sigui parell;

(c) X sigui divisible per 3 sabent que X és parell.

4. Per a les variables aleatòries següents, digueu de quin tipus són (binomial, etc) especificant els seus paràmetres, i calculeu $P(X = 4)$.

(a) Es llancen 10 monedes. X és el nombre de cares.

(b) S'extreu una carta, amb reemplaçament, d'una baralla de 52 cartes fins que surt un as. X és el nombre d'extraccions que fem.

(c) Una centraleta rep trucades a un ritme mitjà d'una per minut. X és el nombre de trucades rebudes durant 5 minuts.

(d) Juguem cada dia un número a una loteria de 1000 números. X és el nombre de vegades que ens toca el premi durant un any.

5. El nombre X d'arribades d'usuaris a un servidor durant un cert període d'observació és una variable aleatòria de Poisson de paràmetre λ . Cada usuari que arriba és atès o no, independentment dels altres, amb probabilitats p i $q = 1 - p$, respectivament ($0 < p < 1$). Sigui Y el nombre d'usuaris atesos durant el període d'observació.

(a) Proveu que Y és una variable de Poisson de paràmetre λp .

(Indicació: calculeu la funció de probabilitat de Y usant la fórmula de la probabilitat total tot condicionant pels valors $X = n$.)

(b) Si durant el període d'observació s'ha atès r usuaris, determineu la probabilitat que n'hagin arribat n .

6. Una variable aleatòria X té funció de distribució $F(x) = 0$ per a $x < 1$ i $F(x) = 1 - \frac{1}{x^3}$ per a $x \geq 1$.

(a) Dibuixeu-la. És una variable discreta, contínua o mixta?

(b) Calculeu $P(X=2)$, $P(0 < X < 2)$, $P(2 < X \leq 3)$, i $P(X \geq 4)$.

(c) Doneu la seva funció de densitat.

7. Per a les variables aleatòries contínues següents, calculeu $P(2 \leq X \leq 3)$.

- (a) Uniforme en $[0, 4]$.
- (b) Uniforme en $[0, 2]$.
- (c) Uniforme en $[-1, \frac{5}{2}]$.
- (d) Exponencial amb $\lambda = \frac{1}{2}$.
- (e) Gaussiana amb $m = 2$ i $\sigma = 2$.

8. Donada una variable aleatòria normal que satisfà $P(X \leq 15) = 0.1$ i $P(X \leq 20) = 0.95$, trobeu:

- (a) El valor de m i σ .
- (b) $P(X \leq 13)$.
- (c) $P(16 \leq X \leq 17)$.
- (d) El valor de k per tal que $P(X \leq k) = 0.05$.
- (e) El valor de j tal que $P(X > j) = 0.5$.

9. Un usuari que arriba a un servidor és acceptat amb probabilitat p i és rebutjat amb probabilitat $q = 1 - p$. Si és acceptat, la durada del servei és una variable aleatòria $T' \sim \text{Exp}(\lambda)$, mentre que si és rebutjat entenem que la durada del servei és zero.

Si T denota el temps que l'usuari és al servidor, determineu la funció de distribució de la variable aleatòria T . Quin tipus de variable és? Quina és la seva «densitat» de probabilitat?

Distribucions condicionades

10. En la producció de cert component, el control de qualitat mesura el nivell de radioactivitat de les unitats produïdes, que segueix una llei exponencial de paràmetre $1/m$, i elimina aquelles amb un nivell de radioactivitat superior a $2m$.

- (a) Determineu la funció de distribució del nivell de radioactivitat, condicionada a que el component examinat hagi passat el control de qualitat.
- (b) Quant val la probabilitat que un component que ha passat el control de qualitat tingui un nivell de radioactivitat superior a m ?

11. Una variable aleatòria X es distribueix uniformement en $[0, 1]$.

- (a) Calculeu la probabilitat que X prengui un valor entre 0.5 i 0.7.
- (b) Suposem ara que X representa la probabilitat de treure cara en el llançament d'una moneda. La moneda es llança cinc vegades i obtenim la seqüència de resultats c++cc. Donat aquest esdeveniment, calculeu la probabilitat *a posteriori* que X hagi pres un valor entre 0.5 i 0.7.

Funcions de variables aleatòries

12. Una variable aleatòria discreta X pren els valors enters $-2, -1, 0, 1, 2$ amb probabilitats iguals a $1/5$. Calculeu la funció de probabilitat de la variable $Y = X^2$ i representeu gràficament les funcions de distribució de X i Y .

13. Sigui X una variable aleatòria de Cauchy de paràmetre $\alpha = 1$, i g la funció definida per $g(x) = -1$ si $x < 0$, $g(x) = e^{-x}$ si $x \geq 0$.

Calculeu la funció de distribució de la variable $Y = g(X)$. De quin tipus és Y ?

14. Si X és una variable aleatòria normal, calculeu la funció de densitat de $Y = aX + b$ (essent $a \neq 0$), i dedueïu-ne que Y també és una variable normal.

15. Sigui X una variable normal estàndard. Calculeu la funció de densitat de $Y = X^2$.

16. Si X és una variable aleatòria de Cauchy, demostreu que $Y = \frac{1}{X}$ també ho és. Com es relacionen els seus paràmetres?

17. Sigui X una variable uniforme en $[0, 2\pi]$.

(a) Calculeu les funcions de densitat i de distribució de la variable $Y = \cos X$.

(b) Calculeu la funció de distribució de la variable

$$Z = \begin{cases} \sin X & 0 \leq X \leq \pi \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Esperança i variància

18. Calculeu l'esperança de la variable X del problema 3.

19. El temps de vida d'una partícula radioactiva és una variable exponencial de paràmetre $\lambda = 1/\tau$, on τ és la vida mitjana de la partícula. En l'instant $t = 0$ tenim una mostra de N_0 partícules. Quin és el nombre mitjà de partícules en l'instant t ? Quant de temps ha de passar perquè aquest nombre sigui $N_0/2$?

20. La temperatura màxima que assoleix un dispositiu electrònic al llarg d'un dia és una variable aleatòria X amb funció de densitat:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{10 - |x-40|}{100} & \text{si } |x-40| < 10 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

El valor de X en qualsevol dia és independent dels altres. Anomenem T el nombre de dies que han de passar fins que $X > 45$. Anomenem N el nombre de dies amb $X < 38$ en un període de 30 dies.

(a) Dibuixeu $f_X(x)$. Calculeu la funció de distribució de X i la probabilitat que $38 < X < 45$.

(b) Calculeu l'esperança i la desviació de X .

(c) Quins tipus de variable són T i N ? Quant valen els seus valors mitjans?

(d) Calculeu $P(T \geq 10)$ i $P(N = 7)$.

21. Utilitzeu el teorema de l'esperança per a calcular les esperances de les variables Y i Z del problema 17. Calculeu també $E[Y]$ mitjançant $f_Y(y)$.

22. *Distribució log-normal* Donada una variable normal X amb paràmetres m, σ , la variable aleatòria $Y = e^X$ s'anomena *log-normal*. Calculeu la seva densitat, els seus moments i, a partir d'ells, la seva esperança i la seva variància.

23. Donada una variable X exponencial d'esperança $\frac{1}{3}$:

- (a) Calculeu $P(\sin X > \frac{1}{2})$.
- (b) Determineu la funció de probabilitat i l'esperança de la variable $Y = [X]$ (part entera de X).
- (c) Calculeu $E\left[X \mid X > \frac{1}{3}\right]$.

24. Donada una variable aleatòria X exponencial de paràmetre $\lambda = 1$:

- (a) Trobeu $f_X(x \mid X \leq 1)$.
- (b) Calculeu $E[X \mid X \leq 1]$.
- (c) Trobeu la densitat de la variable $Y = e^X$.
- (d) Calculeu la variància de la variable $Z = X^2$.

25. Llancem repetidament una moneda amb $P(\text{cara}) = p$ fins que torna a sortir el resultat del primer llançament. Calculeu el nombre esperat de llançaments de les dues formes següents:

- (a) Determinant primer la funció de probabilitat de la variable X que compta el nombre de llançaments.
- (b) Condicionant pel resultat de la primera tirada i usant la fórmula $E[X] = \sum_{i=1}^n E[X|A_i] P(A_i)$, on $\{A_1, \dots, A_n\}$ és una partició de l'espai mostral.

26. Sigui X una variable aleatòria amb funció de densitat $f_X(x) = xe^{-x}$ si $x \geq 0$, i $f_X(x) = 0$ altrament. Sigui $Y = e^{-X}$.

- (a) Calculeu l'esperança de X condicionada a $X > 2$.
- (b) Determineu la funció de densitat de probabilitat de Y .
- (c) Calculeu $E[Y]$ mitjançant el teorema de l'esperança.

Desigualtat de Txeixev

27. Donada una variable X normal amb paràmetres m, σ , calculeu $P(|X - m| < k\sigma)$, i avalueu-ho per a $k = 1$, $k = 2$ i $k = 3$. Compareu aquests resultats amb els que deduiríeu aplicant la desigualtat de Txeixev.

28. Donada una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\lambda = 1$, calculeu $P(|X - 1| \geq 3)$ i compareu el resultat amb la fita que dona la desigualtat de Txeixev.

29. Sigui X una variable aleatòria discreta amb funció de probabilitat $P(\pm 1) = 1/2k^2$, $P(0) = 1 - 1/k^2$. Calculeu $P(|X| \geq 1)$ i deduíu-ne que X satisfà una desigualtat de Txeixev com a igualtat (és a dir, que la fita donada per la desigualtat de Txeixev és *ajustada*).

Problemes addicionals

30. Sigui X una variable aleatòria discreta que pren els valors $1, 2, \dots, n$ i tal que $P(X = k)$ és proporcional a k . Determineu les funcions de probabilitat i de distribució de X .

31. *Distribució binomial negativa* Es repeteix un joc amb probabilitat de guanyar p fins que hem guanyat n vegades. Determineu la funció de probabilitat del nombre necessari de jugades, X . (Noteu que amb $n = 1$ és una variable geomètrica.)

32. Un experiment $\mathcal{E}$ genera nombres aleatoris X que poden prendre valors $0, 1, 2, \dots$ amb probabilitats $P(X=k) = Ae^{-k}$.

- (a) Determineu la constant A i l'esperança de X .
- (b) En dues repeticions de $\mathcal{E}$, quines són les probabilitats que el segon nombre sigui menor, igual o major que el primer?

33. Un sistema de comunicació envia símbols del conjunt $\{0, 1\}$, un a un i de forma independent. Cada símbol es transmet per dos canals iguals i independents. Sabem que, per a cada canal, $P(\text{rebre } 0 | \text{envia } 0) = P(\text{rebre } 1 | \text{envia } 1) = p$, i $P(\text{rebre } 0 | \text{envia } 1) = P(\text{rebre } 1 | \text{envia } 0) = 1 - p$, on $0 < p < 1$.

Si les sortides dels dos canals coincideixen, el receptor accepta el símbol rebut, i en cas contrari el fa retransmetre.

Diem X al nombre de símbols acceptats erròniament quan el receptor ha acceptat n símbols, i sigui R el nombre de transmissions que ha estat necessàries per acceptar aquests n símbols. Es demana determinar les funcions de probabilitat de les variables aleatòries X i R .

34. Un llibre conté errors tipogràfics distribuïts aleatòriament. La variable aleatòria que compta el nombre d'errors en una determinada pàgina segueix una distribució de Poisson de valor mitjà $\lambda = 1/4$. El nombre d'errors en una pàgina és independent del de les altres.

- (a) Calculeu la probabilitat que hi hagi errors en 4 de les 10 primeres pàgines?
- (b) Sabent que el primer error està més enllà de la pàgina 12, quina és la probabilitat que estigui més enllà de la pàgina 24?
- (c) Si una pàgina té un error es torna a mecanografiar. Quin és el nombre mitjà de pàgines que cal mecanografiar per produir un llibre de 400 pàgines sense cap error?

35. En un examen la nota mitjana val 6 i la desviació 1.8. Suposant que la nota és una variable gaussiana, quin és el tant per cent d'aprovat?

36. Considereu la funció

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Expresseu la funció de distribució de la variable aleatòria $Y = g(X)$ a partir de la funció de distribució de la variable aleatòria X . Particularitzeu el resultat obtingut en els tres casos següents, calculant en cada cas $P(Y = 0)$ i $P(Y = 1)$:

- (a) X és uniforme en $[-1, 1]$.
- (b) X és exponencial de paràmetre 2.
- (c) X és una variable discreta tal que $P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = 1/3$.

37. Sigui X una variable aleatòria contínua amb funció de densitat de probabilitat

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-1)}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases},$$

i sigui g la funció

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 6, & x > 2 \end{cases}.$$

Trobeu la funció de distribució de probabilitat de la variable $Y = g(X)$.

38. Donada una variable X normal amb paràmetres m, σ , calculeu $E[|X - m|]$.

39. Una variable aleatòria té densitat $f(x) = Kx^2e^{-\lambda x}$, $x > 0$. Calculeu K , $E[X]$, $V[X]$, m_n .

40. *Distribució de Laplace* Una variable aleatòria de Laplace és la que té una funció de densitat de la forma $f(x) = Ke^{-\lambda|x-m|}$ per a $x \in \mathbb{R}$.

Quant ha de valdre K ? Calculeu $E[X]$ i $V[X]$.

Per al cas $m = 0$, quant val la probabilitat que $-\sigma < X < 2\sigma$, on σ és la desviació típica de X ?

41. Una variable aleatòria contínua X té funció de distribució $F(x) = 0$ per $x \leq a$ i $F(x) = 1 - \frac{k}{x^b}$ per $x > a$, on a i b són constants positives. Trobeu:

- (a) El valor de la constant k .
- (b) La funció de densitat de X .
- (c) $E[X]$, indicant per a quins valors de b existeix.
- (d) $V[X]$, indicant per a quins valors de b existeix.

42. La demanda X d'un determinat producte segueix una llei exponencial de valor mitjà 1. Si se'n ven una quantitat x es produeix un guany $2x$, mentre que la quantitat sobrant en estoc z produeix una pèrdua $3z$. Determineu la quantitat c de proveïment del producte per tal que l'esperança del guany sigui màxima.

43. Un generador de nombres aleatoris produeix nombres X que, quan funciona correctament, es comporten com una variable aleatòria uniforme en $[0, 1]$, però que de manera imprevisible el 10% dels temps funciona en mode «anòmal», i genera una distribució uniforme en $[0, 3]$.

- (a) Determineu la funció de densitat (total) de X i la seva esperança.
- (b) Si s'obté un valor de X tal que $X < 0.1$, calculeu la probabilitat que el generador estigui en mode anòmal.
- (c) Si s'obté exactament el valor $X = 0.1$, calculeu de nou la probabilitat que el generador estigui en mode anòmal.

44. Determineu el nombre mitjà de tirades d'una moneda amb $P(\text{cara}) = p$ fins que:

- (a) surten dues cares seguides;
- (b) surten o bé dues cares seguides o bé dues creus seguides.

(Podeu usar la fórmula $E[X] = \sum_{i=1}^n E[X|A_i] P(A_i)$, on $\{A_1, \dots, A_n\}$ és una partició de l'espai mostral, condicionant primer pel resultat de la primera tirada i, a continuació, pel resultat de la segona tirada.)

45. Sigui X és una variable aleatòria contínua amb densitat de probabilitat $f_X(x) = x/8$ si $0 < x < 4$, i $f_X(x) = 0$ altrament. Compareu el valor exacte de la probabilitat $P(|X - m_X| \geq 2\sigma_X)$ amb la fita que dona la desigualtat de Txebeixev.

Respostes
1

$\Omega_X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
 $P_X(2) = P_X(12) = \frac{1}{36}$, $P_X(3) = P_X(11) = \frac{1}{18}$,
 $P_X(4) = P_X(10) = \frac{1}{12}$, $P_X(5) = P_X(9) = \frac{1}{9}$,
 $P_X(6) = P_X(8) = \frac{5}{36}$, $P_X(7) = \frac{1}{6}$. La
 probabilitat que X sigui parella val $1/2$.

2

(b) $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 0$. (c) $\Omega_X = \{-1, 0, 2\}$.
 $P_X(-1) = \frac{1}{3}$, $P_X(0) = \frac{1}{6}$, $P_X(2) = \frac{1}{2}$.

3

Ha de ser $0 \leq a < 1$ i $C = 1 - a$. En el cas que
 $a = 0$ llavors $C = 1$ i l'únic valor que pren X
 (amb probabilitat 1) és $X = 0$. (a) a^5 . (b) $\frac{1}{1+a}$.
 (c) $\frac{1}{1+a^2+a^4}$.

4

(a) Binomial amb $n = 10$, $p = \frac{1}{2}$; $P \approx 0.2051$.
 (b) Geomètrica amb $p = \frac{1}{13}$; $P \approx 0.06050$.
 (c) Poisson amb $\alpha = 5$; $P \approx 0.1755$.
 (d) Binomial amb $n = 365$, $p = \frac{1}{1000}$;
 $P \approx 0.0005069$.

5

(b) $e^{-\lambda q}(\lambda q)^{n-r}/(n-r)!$, $n \geq r$.

6

(a) Contínua. (b) $0, \frac{7}{8}, \frac{19}{216}, \frac{1}{64}$. (c) $f(x) = 0$
 per a $x < 1$ i $f(x) = \frac{3}{x^4}$ per a $x > 1$.

7

(a) $\frac{1}{4}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{7}$ (d) 0.1447 (e) 0.1915

8

(a) $m \approx 17.1896$, $\sigma \approx 1.7086$
 (b) $P(X \leq 13) \approx 0.007101$
 (c) $P(16 \leq X \leq 17) \approx 0.2127$ (d) $k \approx 14.3793$
 (e) $j = m$

9

$F_T(t) = 0$ si $t < 0$, i $F_T(t) = (1 - e^{-\lambda t})p + q$ si
 $t \geq 0$. T és una variable aleatòria mixta.
 $f_T(t) = \lambda p e^{-\lambda t} u(t) + q \delta(t)$.

10

(a)

$$F_R(x | R \leq 2m) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1 - e^{-x/m}}{1 - e^{-2}}, & 0 \leq x < 2m \\ 1, & x \geq 2m \end{cases}$$

(b) 0.2689

11

(a) 0.2 (b) 0.4006

12

$\Omega_Y = \{0, 1, 4\}$; $P_Y(0) = 1/5$,
 $P_Y(1) = P_Y(4) = 2/5$.

13

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -1 \\ 1/2, & -1 \leq y < 0 \\ 1 + \frac{1}{\pi} \arctan(\log y), & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

Y és una variable mixta.

14

Si $X \sim N(m, \sigma)$, llavors $Y \sim N(am + b, |a|\sigma)$.

15

$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp(-y/2)$ per a $y > 0$, i és zero
 altrament.

16

Si X té paràmetre α , $\frac{1}{X}$ té paràmetre α^{-1} .

17

(a) $\Omega_Y = [-1, 1]$. $f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, $-1 < y < 1$.

$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin y$, $-1 \leq y \leq 1$.

(b) $\Omega_Z = [0, 1]$,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1/2 & z = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin z & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$$

18

$E[X] = \frac{a}{1-a}$.

19

El nombre de partícules $N(t)$ a l'instant t
 segueix una llei binomial i la seva esperança és
 $N_0 e^{-t/\tau}$. El temps perquè el nombre esperat de
 partícules es redueixi a la meitat (*semivida*) és
 $t_{1/2} = (\ln 2)\tau$.

20

$$(a) F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 30 \\ \frac{(x-30)^2}{200} & \text{si } 30 \leq x < 40 \\ 1 - \frac{(50-x)^2}{200} & \text{si } 40 \leq x < 50 \\ 1 & \text{si } x \geq 50 \end{cases}$$

$P = \frac{111}{200} = 0.555$

(b) $m_X = 40$, $\sigma_X = 4.082$.

(c) T és geomètrica amb $p = \frac{1}{8}$. N és binomial
 amb $n = 30$, $p = \frac{8}{25}$. $E[T] = 8$, $E[N] = 9.6$.

(d) 0.3007 , 0.09829 .

21

$E[Y] = 0$, $E[Z] = \frac{1}{\pi}$.

22

$$\frac{1}{y\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - m}{\sigma}\right)^2\right), y > 0.$$

$$m_n = e^{n^2 \frac{\sigma^2}{2} + nm}; \quad E[Y] = e^{\frac{\sigma^2}{2} + m};$$

$$V[Y] = e^{2m}(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}).$$

23

$$(a) \frac{e^{-\pi/2} - e^{-5\pi/2}}{1 - e^{-6\pi}} = 0.2075.$$

$$(b) \Omega_Y = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad P_Y(n) = (1 - e^{-3})e^{-3n},$$

$$E[Y] \approx 0.05240. \quad (c) \frac{2}{3}.$$

24

$$(a) f_X(x | X \leq 1) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-1}}, \quad 0 \leq x < 1. \quad (b) \frac{e-2}{e-1}.$$

$$(c) f(y) = \frac{1}{y^2}, \quad y \geq 1. \quad (d) 20.$$

25

$$(a) P(X = k) = p^2 q^{k-2} + q^2 p^{k-2}, \quad k \geq 2.$$

$$E[X] = 3.$$

26

$$(a) 10/3 \quad (b) f_Y(y) = -\ln y, \quad 0 < y < 1 \quad (c) 1/4$$

27

$\text{erf}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$: 0.6827, 0.9545, 0.9973. Les probabilitats $P(|X - m| \geq k\sigma)$ valen respectivament 0.3173, 0.0455, i 0.0027, més petites que 1, 0.25, i 0.1111.

28

$$P = e^{-4} \approx 0.0183. \quad \text{La fita és } \frac{1}{9} \approx 0.1111.$$

29

$$P(|X| \geq 1) = 1/k^2.$$

30

$$P(X=k) = \frac{2k}{n(n+1)}, \quad 1 \leq k \leq n;$$

$$F_X(x) = 0 \text{ si } x < 0; \quad F_X(x) = \frac{i(i+1)}{n(n+1)} \text{ si } i \leq x < i+1, \text{ essent } 1 \leq i \leq n-1; \quad F_X(x) = 1 \text{ si } x \geq n.$$

31

$$\Omega_X = \{n, n+1, \dots\} \text{ i } P(X=k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}.$$

32

$$(a) A = 1 - e^{-1}, \quad E[X] = 1/(e-1).$$

$$(b) 1/(e+1), (e-1)/(e+1), 1/(e+1).$$

33

$X \sim \text{Bin}(n, q^2/(p^2 + q^2))$. La variable R és binomial negativa amb paràmetres n i $\alpha = p^2 + q^2$, i, per tant,

$$P(R=r) = \binom{r-1}{n-1} \alpha^{n-1} (1-\alpha)^{r-n}, \text{ per a } r \geq n.$$

34

$$(a) 0.1122 \quad (b) 0.04979 \quad (c) 513.6$$

35

$$71\%.$$

36

$$(a) F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ (y+1)/2, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases};$$

$$P(Y=0) = 1/2, \quad P(Y=1) = 0.$$

$$(b) F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-2y}, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases};$$

$$P(Y=0) = 0, \quad P(Y=1) = e^{-2}.$$

$$(c) F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 2/3, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases};$$

$$P(Y=0) = 2/3, \quad P(Y=1) = 1/3.$$

37

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 2 \\ 1 - e^{-\lambda(y-2)/2}, & 2 \leq y < 4 \\ 1 - e^{-\lambda}, & 4 \leq y < 6 \\ 1, & y \geq 6 \end{cases}$$

38

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

39

$$K = \frac{\lambda^3}{2}, \quad m_n = \frac{(n+2)!}{2\lambda^n}, \quad E[X] = \frac{3}{\lambda}, \quad V[X] = \frac{3}{\lambda^2}.$$

40

$$K = \frac{\lambda}{2}; \quad E[X] = m, \quad V[X] = \frac{2}{\lambda^2}. \quad P \approx 0.8489.$$

41

$$(a) k = a^b. \quad (b) f(x) = ba^b x^{-b-1} \text{ si } x > a; \quad 0 \text{ altrament.} \quad (c) E[X] = \frac{ab}{b-1}, \quad b > 1.$$

$$(d) V[X] = \frac{a^2 b}{(b-2)(b-1)^2}, \quad b > 2.$$

42

$$c = \ln(5/3).$$

43

$$(a) f_X(x) = \begin{cases} \frac{14}{15}, & \text{si } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{30}, & \text{si } 1 < x < 3, \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \quad E[X] = 0.6$$

$$(b) \frac{1}{28} \quad (c) \frac{1}{28}$$

44

$$(a) 1/p + 1/p^2 \text{ (igual a 6 si } p = q = 1/2).$$

$$(b) (2 + pq)/(1 - pq) \text{ (igual a 3 si } p = q = 1/2).$$

45

La fita donada per la desigualtat de Txebeixev és 0.25, mentre que la probabilitat real val 0.03813.

3 Variables aleatòries multidimensionals

Problemes bàsics

Funcions de distribució, de probabilitat i de densitat

1. Tirem un dau 10 vegades.

- (a) Calculeu la probabilitat de treure exactament dos «1», dos «2» i dos «3».
- (b) Calculeu la probabilitat de treure algun «1» i algun «2».

2. Sigui (X, Y) una variable aleatòria bidimensional uniforme a la regió $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$. Determineu la funció de distribució conjunta $F_{XY}(x, y)$ i les funcions de distribució marginals $F_X(x)$ i $F_Y(y)$.

3. La funció de densitat conjunta de dues variables aleatòries és $f(x, y) = c(2x + y)$ per a $0 < x < 1, 0 < y < 2$. Trobeu:

- (a) El valor de la constant c .
- (b) Les funcions de densitat marginal de X i de Y .
- (c) $P(X + Y \leq 1)$.

4. Sigui (X, Y) una variable aleatòria bidimensional uniforme a la regió $|x| + |y| \leq 1/\sqrt{2}$. Determineu la densitat de probabilitat de la variable X .

Independència i condicionament

5. En la taula següent es dona la funció de probabilitat conjunta per a les variables X, Y :

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	1/24	1/12	1/16	1/16
1	1/16	1/16	1/12	1/24
2	1/12	1/16	1/24	1/16
3	1/24	1/16	1/12	1/16

- (a) Trobeu les funcions de probabilitat marginal de X i Y .
- (b) Trobeu $P(1 \leq X < 4, 0 \leq Y \leq 1)$.
- (c) Determineu si X i Y són independents.

6. Es tiren tres monedes. Les que treuen cara es tornen a tirar. Considereu les variables X : nombre de cares obtingut en la primera tirada i Y : nombre de cares després de la segona tirada. Feu la taula de probabilitats conjuntes, i calculeu a partir d'ella les funcions de probabilitat marginals. Comproveu que les marginals de X i de Y corresponen a variables binomials i determineu-ne els paràmetres.

7. Les variables aleatòries X i Y són independents i uniformes a l'interval $[0, 3]$. Calculeu la probabilitat de la unió dels esdeveniments

$$A = \{1 < X < 2, -\infty < Y < +\infty\}, \quad B = \{-\infty < X < +\infty, 1 < Y < +\infty\}.$$

8. Un tren i un viatger arriben a l'estació independentment en instants aleatoris distribuïts uniformement entre les 9:00h i les 9:15h. El tren s'atura a l'estació durant 5 minuts. El viatger s'hi espera 10 minuts, passats els quals, si no ha pogut pujar al tren, agafa un autocar. Es demana:

- (a) La probabilitat que el viatger arribi abans que el tren.
- (b) La probabilitat que el viatger es trobi el tren a l'estació quan hi arriba.
- (c) Suposant que el viatger estigui dins del tren esperant que aquest iniciï el seu recorregut, la probabilitat que hagi arribat a l'estació abans que el tren.
- (d) La probabilitat que el viatger acabi agafant l'autocar.

(Indicació: Dibuixeu les regions del pla associades als esdeveniments considerats.)

9. Una variable aleatòria bidimensional té densitat conjunta $f_{XY}(x, y) = Ke^{-2x+y}$ sobre una regió R del pla. Determineu quin valor ha de tenir K , i calculeu les densitats marginals i determineu si són independents, en els casos següents:

- (a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \infty, 0 < y < 1\}$.
- (b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \infty, 0 < y < x\}$.

10. Sigui X una variable aleatòria contínua amb densitat $f_X(x) = 1/x^2$ si $x \geq 1$, i $f_X(x) = 0$ altrament. Per a cada valor x que pren X es considera la variable aleatòria Y amb distribució uniforme a $[0, x]$. Determineu la funció de densitat conjunta f_{XY} i les funcions de densitat i de distribució marginals de Y .

Esperança

11. La densitat conjunta de les variables X i Y és $f_{XY}(x, y) = 6(1-x-y)$ si $0 < x < 1$, $0 < y < 1-x$, i $f_{XY}(x, y) = 0$ altrament.

- (a) Obteniu la densitat marginal de Y i useu-la per a calcular $E[Y]$.
- (b) Determineu $E[Y|X]$ i $E[E[Y|X]]$.

12. La densitat conjunta de les variables aleatòries X i Y és $f_{XY}(x, y) = 1/x$ si $0 \leq y \leq x \leq 1$, i $f_{XY}(x, y) = 0$ altrament.

- (a) Obteniu les funcions de densitat marginals.
- (b) Calculeu les funcions de densitat condicionades de Y per X , i de X per Y .
- (c) Calculeu l'esperança de Y de dues maneres: a partir de la seva densitat i a partir de $E[Y|X]$.

Funcions i transformacions

13. Sigui $Y = X_1 + X_2$ on X_1 i X_2 són variables aleatòries independents uniformes en $[0, 1]$. Calculeu la densitat de Y (*variable aleatòria de Simpson*).

14. Donades dues variables aleatòries independents X_1 i X_2 distribuïdes idènticament amb funció de densitat $f(t) = te^{-t}$ per $t \geq 0$ i 0 per $t < 0$, es demana trobar la funció de densitat de $Z = X_1 + X_2$.

15. Demostreu que si X i Y són variables aleatòries de Poisson independents, de paràmetres λ_X i λ_Y , respectivament, aleshores $X + Y$ és una variable de Poisson de paràmetre $\lambda_X + \lambda_Y$.

16. Dues persones queden per trobar-se en un lloc entre les 11h i les 12h.

- (a) Si el primer que arriba només s'espera 15 minuts, quina és la probabilitat que es trobin?
- (b) Suposem ara que el primer que arriba s'espera fins que arriba l'altre. Calculeu la densitat i l'esperança del temps d'espera (expressat en minuts).
- (c) Calculeu la densitat i l'esperança de l'instant en què arriba la primera persona (expressat en minuts des de les 11h).

17. Si X i Y són variables exponencials de paràmetre λ independents, determineu el tipus de variable que és $Z = \frac{X}{X+Y}$.

18. Siguin X i Y variables aleatòries exponencials de paràmetre λ i independents. A partir de X i Y es defineixen les noves variables aleatòries

$$Z = X + Y, \quad W = \frac{X}{X+Y}.$$

Determineu les densitats $f_{ZW}(z, w)$, $f_Z(z)$, $f_W(w)$, i estudeu si Z i W són independents. (Vegeu també el problema 17.)

19. Siguin X i Y variables aleatòries gaussianes d'esperança 0 i variància σ^2 , i independents. Considerem el canvi de variables

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad T = \frac{Y}{X}.$$

Determineu la funció de densitat conjunta $f_{ZT}(z, t)$ i les densitats marginals $f_Z(z)$ i $f_T(t)$. Són Z i T independents?

Esperança de funcions de variables aleatòries

20. La funció de densitat conjunta de dues variables aleatòries X, Y és $f(x, y) = \frac{3}{5}x(x+y)$ per a $0 < x < 1$, $0 < y < 2$.

- (a) Trobeu, utilitzant el teorema de l'esperança bidimensional, $E[X]$, $E[Y]$, $E[X+Y]$ i $E[XY]$.
- (b) Es compleix $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$? I $E[XY] = E[X]E[Y]$? Expliqueu-ho.

21. Els dos costats d'un rectangle venen determinats per dues variables aleatòries independents uniformes: X en $[\frac{a}{2}, a]$ i Y en $[\frac{b}{3}, b]$, sent a i b paràmetres positius. Determineu-ne l'àrea mitjana.

22. Es tiren 10 daus equilibrats. Determineu el nombre mitjà de cares distintes que surten.

(Indicació: Per a cada cara c , considereu la variable indicadora I_c de l'esdeveniment «algun dels daus ha mostrat la cara c ».)

23. *Esperança de la distribució hipergeomètrica* Una urna conté N boles, de les quals b són blaves i les altres $N - b$ són vermelles. S'extreu, sense reposició, una mostra aleatòria de n boles i diem X al nombre de boles blaves estretes.

- (a) Si les boles blaves estan numerades de 1 fins a b i I_k , $1 \leq k \leq b$, és la variable que indica si la bola blava k -èsima ha estat o no triada, quant val $E[I_k]$?
- (b) Si les extraccions de les n boles es fan de forma seqüencial i J_k , $1 \leq k \leq n$, és la variable que indica que la k -èsima bola extreta és blava, quant val $E[J_k]$?
- (c) Determineu, tant a partir de (a) com de (b), el valor de $E[X]$.

24. Un centre de comunicacions disposa de 20 ordinadors connectats a un node. Quan arriba una petició de servei a aquest node s'hi assigna a l'atzar un dels 20 ordinadors (cada ordinador pot atendre més d'un usuari). Si tenim 15 usuaris:

- (a) Per a $0 \leq k \leq 15$, calculeu el nombre mitjà d'ordinadors que atenen exactament a k usuaris.
- (b) En particular, quin és el nombre mitjà d'ordinadors desocupats?
- (c) Que val la suma per a $k = 0, \dots, 15$ dels anteriors resultats? Raoneu el resultat.

(Indicació: Per a cada ordinador i , considereu la variable indicadora O_i^k de l'esdeveniment «l'ordinador i atén exactament k usuaris».)

Covariància i correlació

25. Calculeu la covariància en els casos (a) i (b) del problema 9. Què podríeu dir de la independència sabent només això?

26. Els resultats de 10 alumnes en tres exàmens són els següents:

primer examen (X)	6	5	8	8	7	6	10	4	9	7
segon examen (Y)	8	7	7	10	5	8	10	6	8	6
tercer examen (Z)	7	4	6	8	6	7	9	9	7	5

Interpretem (X, Y, Z) com una variable aleatòria tridimensional definida en l'espai mostral Ω format pels 10 alumnes (tots ells equiprobables).

- (a) Trobeu el vector d'esperances.
- (b) Trobeu la matriu de covariàncies.

27. Donat un paràmetre $p \in [0, \frac{1}{2}]$ definim la variable bidimensional discreta (X, Y) tal que $P(X=0, Y=0) = P(X=1, Y=1) = p$, $P(X=0, Y=1) = P(X=1, Y=0) = \frac{1}{2} - p$.

- (a) Feu la taula amb la funció de probabilitat conjunta i les funcions de probabilitat marginals.
- (b) Calculeu el coeficient de correlació entre X i Y .
- (c) Hi ha algun valor de p tal que X i Y són independents?

Variables gaussianes

28. Demostreu que si X i Y són variables aleatòries gaussianes d'esperança 0 i variància 1, independents, aleshores les variables $U = X + Y$ i $V = X - Y$ són independents. Feu-ho de les dues maneres següents:

- (a) Provant que $f_{UV}(u, v) = f_U(u)f_V(v)$.
- (b) Provant que U i V són incorrelades.

29. Les variables aleatòries X i Y tenen com a funció de densitat conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2xy + 2y^2)}.$$

Determineu la densitat de Y condicionada per X i digueu a quina llei de probabilitat correspon.

Estimació

30. La funció de densitat conjunta de dues variables aleatòries X, Y és $f(x, y) = A(x + y)$ per a $0 < x < y < \sqrt{x}$. Calculeu:

- (a) El valor de A .
- (b) Les densitats marginals de X i de Y .
- (c) $E[Y|X = x]$.
- (d) La millor estimació de Y quan sabem que $X = \frac{1}{4}$.

31. Les variables aleatòries X i Y tenen funció de densitat conjunta $f_{XY}(x, y) = x + y$ si $0 < x < 1$ i $0 < y < 1$, i $f_{XY}(x, y) = 0$ altrament. Trobeu les millors estimacions en mitjana quadràtica no lineal i lineal, respectivament, de Y donada X . Dibuixeu la corba i la recta de regressió corresponents a aquestes estimacions.

32. Donada la variable aleatòria bidimensional (X, Y) uniforme en la regió $x > 0$, $y > 0$, $x^2 + y^2 < 1$, calculeu:

- (a) Les millors estimacions de X donada Y i de Y donada X .
- (b) Els paràmetres bàsics de (X, Y) : mitjanes, variàncies i correlació.
- (c) Les millors estimacions lineals de X donada Y i de Y donada X .

33. Per a les variables aleatòries del problema 29, calculeu la millor estimació en mitjana quadràtica de Y donada X .

34. Les variables aleatòries S (senyal) i N (soroll) són gaussianes independents $N(m_S, \sigma_S^2)$ i $N(m_N, \sigma_N^2)$, respectivament, amb $m_N = 0$. Sigui $Z = S + N$.

- (a) Justifiqueu per què la millor estimació en mitjana quadràtica de S donada Z ha de ser lineal.
- (b) Determineu aquesta estimació i l'error quadràtic mitjà.

35. Siguin Y_1 i Y_2 variables aleatòries gaussianes de valors mitjans 1 i -1 , i variàncies 4 i 1, respectivament. El coeficient de correlació val $1/2$. Sigui N una altra variable aleatòria gaussiana de valor mitjà 0 i variància 2, independent de (Y_1, Y_2) . Finalment, sigui $X = Y_1 - Y_2 + N$. Es demana:

- (a) La variància de X i la covariància de X i Y_1 .
- (b) La millor estimació lineal de Y_1 donada X , i l'error quadràtic mitjà de l'estimació.

Problemes addicionals

36. Una moneda de diàmetre 2 cm cau a un terra de rajoles quadrades de costat 25 cm. Quina és la probabilitat que la moneda no trepitgi més d'una rajola?

Calculeu el mateix amb rajoles hexagonals, i amb rajoles en forma de triangle equilàter.

37. Una variable aleatòria tridimensional té densitat conjunta $f_{XYZ}(x, y, z) = 2(x + y + z) - 4(xy + xz + yz) + 8xyz$ sobre la regió $0 < x, y, z < 1$. Calculeu les densitats marginals $f_{XY}(x, y)$, $f_{XZ}(x, z)$, $f_{YZ}(y, z)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_Z(z)$. Són les variables independents dos a dos? Són les tres variables independents?

38. Un material presenta impureses aleatòries de forma el·líptica. Els semieixos d'aquestes el·lipses són variables independents X, Y uniformes en $[0, L_1]$, $[0, L_2]$ respectivament. Calculeu la funció de densitat i l'esperança de l'àrea d'aquestes impureses.

39. Problema de l'agulla de Buffon Una agulla de llargada $2a$ es deixa caure aleatòriament sobre una superfície plana que té dibuixades línies paral·leles separades una distància $2b$, on $b > a$. Quina és la probabilitat que l'agulla trepitgi alguna de les línies?

40. Si A és un esdeveniment aleatori, podem considerar la variable aleatòria *indicadora* de A , Δ_A , que val 1 si A es verifica i 0 en cas contrari. Què val $E[\Delta_A]$?

Siguin dos esdeveniments A, B . Expressen $\Delta_{A \cap B}$, $\Delta_{A \cup B}$ i $\Delta_{\bar{A}}$ en funció de Δ_A i Δ_B . Comproveu que en calcular esperances amb aquestes relacions s'obté la fórmula bàsica de la probabilitat.

41. Sigui $u(t)$ la funció esglaó unitat definida com (atenció!) $u(t) = 0$ si $t \leq 0$, i $u(t) = 1$ si $t > 0$. Proveu que si X i Y són dues variables aleatòries que satisfan

$$E[u(X-a)u(Y-b)] = E[u(X-a)] E[u(Y-b)],$$

per a tot $a, b \in \mathbb{R}$, aleshores X i Y són independents.

42. En el problema 8 determineu l'esperança del temps d'espera del viatger fins que puja al tren o se'n va a agafar l'autocar.

43. L'empresa de pizzes a domicili *PizzaPlus* cobra 6 euros per una pizza. El temps T de lliurament és una variable aleatòria exponencial d'esperança m . L'empresa considera que una pizza s'ha lliurat a temps si $T < 2m$. Si el temps de lliurament és superior a $2m$ es dona la pizza gratuïtament. Si a més T és superior a $3m$ *PizzaPlus* regala al client unes postres de 2 euros.

- (a) Quin és l'ingrés mitjà per pizza repartida?
- (b) De 70 pizzes repartides quin és el nombre mitjà de pizzes lliurades a temps? Quina és la probabilitat que se'n lliurin més d'un 20% fora de temps?
- (c) Dos repartidors de pizza independents han lliurat les seves pizzes a temps. Quina és la probabilitat que la suma dels seus temps sigui inferior a $3m$?

44. Si X i Y són variables aleatòries independents i exponencials de paràmetre 1, quant val la probabilitat que $X \geq 1$ si $\min(X, Y) \leq 1$?

45. Siguin X i Y variables aleatòries amb funció de densitat conjunta $f(x, y) = e^{-(x+y)}$ per a $x \geq 0, y \geq 0$, i $f(x, y) = 0$ per als altres casos. Siguin $U = \frac{X}{Y}$, $V = X + Y$.

- (a) Trobeu la funció de densitat conjunta de U i V , indicant la seva regió de validesa.
- (b) Estudieu la independència de les variables (X, Y) .
- (c) Estudieu la independència de les variables (U, V) .
- (d) Sigui A l'esdeveniment $X+Y \leq 1$. Representeu-lo en l'espai (x, y) i calculeu la seva probabilitat utilitzant $f(x, y)$.
- (e) Representeu l'anterior esdeveniment A en l'espai (u, v) i calculeu de nou la seva probabilitat utilitzant $f(u, v)$.

46. Siguin X, Y variables aleatòries gaussianes $N(0, 1)$ independents i considerem el canvi a coordenades polars $(r, \theta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x}\right)$. Es demana:

- (a) La funció de densitat de la variable aleatòria $S = \frac{X+Y}{2}$. De quin tipus és?
- (b) La funció de densitat de la variable aleatòria conjunta (R, Θ) .
- (c) Les funcions de densitat de les variables aleatòries marginals R i Θ . De quin tipus són R i Θ ? Són independents?

- 47.** Donada la variable bidimensional gaussiana (X, Y) tal que $m_1 = m_2 = 0$, calculeu la densitat conjunta de les variables $Z = \frac{Y}{X}$, $T = XY$. Demostreu que Z és de Cauchy, desplaçada al punt $\rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, amb $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sqrt{1 - \rho^2}$. (Indicació: tingueu en compte que la transformació no és injectiva).
- 48.** Una urna conté n boles numerades de 1 a n . N'extraiem k (sense reposició).
- Calculeu l'esperança de la suma dels seus valors.
 - Calculeu la probabilitat que el màxim valor extret sigui m .
 - Com canvien els anteriors resultats si fem les extraccions amb reposició?
- 49.** En una cursa participen n corredors. El temps que triga el corredor i és una variable exponencial X_i de paràmetre λ_i ($i = 1, \dots, n$). Sigui T la variable aleatòria que dona el temps d'arribada del guanyador. Calculeu la seva densitat i la seva esperança. Quina és la probabilitat que té el corredor i de guanyar la cursa?
- 50.** El temps que passa fins que un sistema que funciona té una avaria és una variable exponencial de paràmetre λ . Supposeu que les avaries es produeixen amb independència una de l'altra i que es reparen de manera immediata. Si $T_i, i = 1, \dots, n$, són els instants en què es produeixen les n primeres avaries, calculeu la densitat conjunta $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$. (Indicació: trobeu primer la densitat dels intervals entre avaries i feu el canvi de variable pertinent.)
- 51.** En realitzar una mesura física apareix un error experimental, de manera que podem considerar que el resultat obtingut en la mesura és una variable aleatòria X amb esperança m , el valor exacte de la magnitud que mesurem, i desviació σ , error característic de la mesura. Una manera de reduir l'error és fer diverses mesures $X_1, X_2, \dots, X_n$ i donar com a resultat la seva mitjana $Y = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$. Calculeu la desviació de Y (suposant que les mesures són incorrelades) i comproveu que és inferior a σ .
- 52.** Per a la fabricació de barres d'acer utilitzem dos processos diferents que es comporten com variables aleatòries gaussianes. En el primer procés, la llargada mitjana de la barra és de 168 mm, amb una desviació típica de 5 mm; en el segon tenim una llargada mitjana de 162 mm i una desviació típica de 4 mm.
- Quina és la probabilitat que triant una barra a l'atzar de cada procés tinguem una diferència en les longituds de menys de 9 mm?
 - Si posem una barra de cada seguides, quina és la probabilitat que la longitud total sigui més gran de 339 mm?
- 53.** En certa població podem considerar que el pes X (en kg) i l'alçada al quadrat Y (en m²) són conjuntament normals amb $m_X = 70$, $\sigma_X = 9$, $m_Y = 3$, $\sigma_Y = 0.4$, $\rho = 0.7$. Calculeu la millor estimació possible del pes d'una persona d'alçada 1.80 m. Quin és l'error quadràtic mitjà en aquesta estimació?
- 54.** Repetiu l'exercici 31 si $f_{XY}(x, y) = 2$ si $0 < y < x < 1$, i $f_{XY}(x, y) = 0$ altrament. Quant val l'error quadràtic mitjà?

55. Siguin X i Y variables aleatòries uniformes en l'interval $[0, 1]$ i independents. Determineu el millor estimador en mitjana quadràtica de la variable $S = X + Y$, donada $Z = \max(X, Y)$.

56. Un canal de comunicació suma al senyal transmès X un soroll N incorrelat amb X . En aquest punt multipliquem la sortida per una constant λ per corregir l'efecte, però tenint en compte que després el senyal es passarà per la xarxa sumant-li una distorsió μ coneguda deguda a la interferència de 220 V. Trobeu el millor valor de λ en funció de μ si $m_X = m_N = 1$, $\sigma_X = 6$ i $\sigma_N = 2$.

57. Un canal de comunicació suma al senyal transmès X un soroll Z incorrelat amb X . Volem corregir l'efecte multiplicant la sortida per una constant λ . Trobeu el millor valor de λ si $m_X = m_Z = 0$, $\sigma_X = 10$ i $\sigma_Z = 5$. Compareu l'error quadràtic mitjà d'aquesta estimació amb el que s'obtingria fent l'estimació per una constant.

Calculeu-ho ara en el cas que el soroll sigui independent de X i multiplicatiu en lloc d'additiu. Quin problema hi ha en aquest cas?

58. Siguin X i Y variables aleatòries conjuntament gaussianes, amb valors mitjans $m_X = 1$ i $m_Y = -1$, variàncies $\sigma_X^2 = 1$ i $\sigma_Y^2 = 4$, i coeficient de correlació ρ , $0 < \rho \leq 1$. Calculeu la millor estimació en mitjana quadràtica de $S = X + Y$ donada $T = X - Y$. Calculeu també l'error d'aquesta estimació. Interpreteu el resultat quan $\rho = 1$.

Respostes

1

(a) 0.02532 (b) 0.6943

2

$F_{XY}(x, y) = 0$ si $x < 0$ o $y < 0$; $F_{XY}(x, y) = 2xy$ si $(x, y) \in T$; $F_{XY}(x, y) = 2x + 2y - 1 - x^2 - y^2$ si $0 < x < 1$, $1 - x < y < 1$; $F_{XY}(x, y) = 2x - x^2$ si $0 \leq x < 1$, $y \geq 1$; $F_{XY}(x, y) = 2y - y^2$ si $x \geq 1$, $0 \leq y < 1$; $F_{XY}(x, y) = 1$ si $x \geq 1$, $y \geq 1$. Observeu que $F_{XY}(x, y)$ és continua en tot $\mathbb{R}^2$.

$F_X(x) = 0$ si $x < 0$; $F_X(x) = 2x - x^2$ si $0 \leq x < 1$; $F_X(x) = 1$ si $x \geq 1$. Anàlogament per a $F_Y(y)$.

3

(a) $c = \frac{1}{4}$ (b) $f_X(x) = x + \frac{1}{2}$ per a $0 < x < 1$, $f_Y(y) = \frac{1}{4}(y + 1)$ per a $0 < y < 2$. (c) $\frac{1}{8}$

4

$\sqrt{2} - 2|x|$ si $|x| \leq 1/\sqrt{2}$.

5

(a) $P_X(0) = \frac{11}{48}$, $P_X(1) = \frac{13}{48}$, $P_X(2) = \frac{13}{48}$, $P_X(3) = \frac{11}{48}$. $P_Y(0) = \frac{1}{4}$, $P_Y(1) = \frac{1}{4}$, $P_Y(2) = \frac{1}{4}$, $P_Y(3) = \frac{1}{4}$. (b) $\frac{19}{48}$. (c) No són independents, ja que per exemple $P(X=0, Y=0) = \frac{1}{24} \neq P(X=0)P(Y=0) = \frac{11}{192}$.

6

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	
$Y = 0$	1/8	3/16	3/32	1/64	27/64
$Y = 1$	0	3/16	3/16	3/64	27/64
$Y = 2$	0	0	3/32	3/64	9/64
$Y = 3$	0	0	0	1/64	1/64
	1/8	3/8	3/8	1/8	

X és binomial amb $n = 3$ i $p = 1/2$. Y és binomial amb $n = 3$ i $p = 1/4$.

7

7/9

8

(a) 1/2 (b) 5/18 (c) 8/13 (d) 5/18

9

(a) $K = 2/(e - 1)$; X és exponencial amb $\lambda = 2$ i $f_Y(y) = (e - 1)^{-1}e^y$, $0 < y < 1$. Són independents.

(b) $K = 2$; $f_X(x) = 2(e^{-x} - e^{-2x})$, $x > 0$ i Y és exponencial amb $\lambda = 1$. No són independents.

10

$f_{XY}(x, y) = 1/x^3$ per a $(x, y) \in R$, essent R la regió $x \geq 1$, $0 \leq y \leq x$. $f_Y(y) = 1/2$ si $0 \leq y \leq 1$, $f_Y(y) = 1/(2y^2)$ si $y \geq 1$. $F_Y(y) = 0$ si $y < 0$, $F_Y(y) = y/2$ si $0 \leq y < 1$, $F_Y(y) = 1 - 1/(2y)$ si $y \geq 1$.

11

- (a) $f_Y(y) = 3(1-y)^2$, $0 < y < 1$. $E[Y] = 1/4$.
 (b) $E[Y|X] = (1-X)/3$. $E[E[Y|X]] = 1/4$.

12

- (a) X és uniforme en l'interval $[0, 1]$.
 $f_Y(y) = -\ln y$ si $0 < y < 1$.
 (b) $f_{Y|X}(y|X=x) = 1/x$ si $0 \leq y \leq x$
 ($0 < x \leq 1$). $f_{X|Y}(x|Y=y) = -1/(x \ln y)$ si
 $y \leq x \leq 1$ ($0 < y < 1$). (c) $1/4$.

13

$$\Omega_Y = [0, 2] \text{ i } f_Y(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 2-y, & 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

14

$$f_Z(z) = \frac{z^3 e^{-z}}{6} \text{ per a } z \geq 0.$$

16

- (a) 0.4375. (b) $f(z) = (60-z)/1800$,
 $0 < z < 60$. $E[Z] = 20$ min.
 (c) $f(u) = (60-u)/1800$, $0 < u < 60$.
 $E[U] = 20$ min.

17

 Uniforme en $[0, 1]$.

18

$f_{ZW}(z, w) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$, $z > 0$, $0 < w < 1$.
 $f_Z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$, $z > 0$. $f_W(w) = 1$, $0 < w < 1$.
 Les variables Z i W són independents.

19

$f_{ZT}(z, t) = \frac{z}{\sigma^2} e^{-z^2/(2\sigma^2)} \frac{1/\pi}{1+t^2}$, per a $z > 0$,
 $-\infty < t < \infty$. $f_Z(z) = \frac{z}{\sigma^2} e^{-z^2/(2\sigma^2)}$, per a
 $z > 0$ (distribució de Rayleigh). $f_T(t) = \frac{1/\pi}{1+t^2}$,
 per a $-\infty < t < \infty$ (distribució de Cauchy).
 Les variables Z i T són independents.

20

- (a) $\frac{7}{10}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{19}{10}$; $\frac{5}{6}$. (b) L'esperança de la suma
 sempre és suma d'esperances. Com que X i Y
 no són independents no té per què ser
 $E[XY] = E[X]E[Y]$.

21

$$ab/2.$$

22

El nombre de cares diferents és $I_1 + \dots + I_6$ i la
 seva esperança val 5.0310.

23

- (a) n/N . (b) b/N . (c) bn/N .

24

- (a) El nombre d'ordinadors amb k usuaris és
 $N_k = O_1^k + \dots + O_{20}^k$. $E[N_k] = 20 \binom{15}{k} \frac{19^{15-k}}{20^{15}}$.
 (b) En particular $E[N_0] \approx 9.27$. (c) La suma
 d'aquestes esperances dona el nombre total
 d'ordinadors, 20.

25

- (a) $C[X, Y] = 0$, fet que no permet dir res sobre
 la independència. (b) $C[X, Y] = 1$, que implica
 que no són independents.

26

$$(a) (7, 7.5, 6.8) \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & 1.5 & 0.6 \\ 1.5 & 2.45 & 1.2 \\ 0.6 & 1.2 & 2.36 \end{pmatrix}$$

27

- (a) Tant X com Y prenen valors 0, 1
 equiprobables. (b) $\rho = 4p - 1$. (c) Són
 independents quan $p = \frac{1}{4}$.

29

$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-(y-x/2)^2)$. És una llei normal amb
 $m = x/2$ i $\sigma^2 = 1/2$.

30

- (a) $A = 20/3$. (b) $f_X(x) = \frac{10}{3} x(1+2\sqrt{x}-3x)$,
 $0 < x < 1$; $f_Y(y) = \frac{10}{3} y^2(3-2y-y^2)$, $0 < y < 1$.
 (c) $E[Y|X=x] = \frac{1}{3} \frac{3x+2\sqrt{x-5x^2}}{1+2\sqrt{x-3x}}$.
 (d) $E[Y|X=\frac{1}{4}] = \frac{23}{60}$.

31

$$(2+3X)/(3+6X); (-X+7)/11.$$

32

- (a) $\hat{X} = \frac{1}{2}\sqrt{1-Y^2}$, $\hat{Y} = \frac{1}{2}\sqrt{1-X^2}$
 (b) $m_X = m_Y = \frac{4}{3\pi}$, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}$
 $(\sigma_X = \sigma_Y = 0.2643)$, $C[X, Y] = \frac{1}{2\pi} - \frac{16}{9\pi^2}$
 $(\rho = -0.3001)$. (c) $\hat{X} = -0.3001Y + 0.5519$, i el
 mateix canviant $X \leftrightarrow Y$.

33

$$X/2.$$

34

- (a) (S, N) és conjuntament normal, d'on resulta
 que (Z, S) també ho és. Per tant la millor
 estimació $\hat{S} = h(Z)$ ha de ser lineal.
 (b) $\hat{S} = \frac{1}{\sigma_S^2 + \sigma_N^2} (\sigma_S^2 Z + \sigma_N^2 m_S)$. L'error
 quadràtic mitjà val $\frac{\sigma_S^2 \sigma_N^2}{\sigma_S^2 + \sigma_N^2}$.

35

 (a) $V[X] = 5$; $C[X, Y_1] = 3$. (b) $(3X - 1)/5$; $11/5$.

36

 Quadrat: $P = 0.8464$. Hexàgon: $P = 0.9097$.
 Triangle: $P = 0.7420$.

37

 Les marginals són sempre uniformes (en el quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ per a cada parell de variables; en l'interval $[0, 1]$ per a cada variable). Dues a dues són independents, però les tres no són independents.

38

 Si Z és l'àrea: $E[Z] = \frac{\pi}{4} L_1 L_2$;
 $f_Z(z) = -(\pi L_1 L_2)^{-1} \ln\left(\frac{z}{\pi L_1 L_2}\right)$,
 $0 < z < \pi L_1 L_2$.

39
 $2a/(\pi b)$. El resultat proporciona un mètode *experimental* per a trobar valors aproximats del nombre π . Prenem una agulla de llargada 1 i posem les línies separades per una distància 2. Si repetim n vegades l'experiència i comptem el nombre de vegades, m , que l'agulla trepitja alguna línia, aleshores m/n prendrà un valor aproximat a $p = 1/\pi$.

40
 $E[\Delta_A] = P(A)$.
 $\Delta_{A \cap B} = \Delta_A \Delta_B$, $\Delta_{A \cup B} = \Delta_A + \Delta_B - \Delta_A \Delta_B$,
 $\Delta_{\bar{A}} = 1 - \Delta_A$.

42
 $125/27 \approx 4.630$ minuts

43

 (a) 5.09 euros. (b) 60.53. Si X és el nombre de pizzes lliurades a temps, $P(X \leq 55) \approx 0.04573$.
 (c) 0.9755.

44
 $1/(1 + e)$.

45

 (a) $f_{UV}(u, v) = \frac{ve^{-v}}{(1+u)^2}$ per $u, v \geq 0$.
 (b) $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$. Són independents.
 (c) $f_{UV}(u, v) = f_U(u)f_V(v)$. Són independents.
 (d) $P(X+Y \leq 1) = 1 - 2e^{-1}$.
 (e) $P(V \leq 1) = 1 - 2e^{-1}$.

46

 (a) $f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2}$. (b) $f(r, \theta) = \frac{r}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2}$,
 $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. (c) $f_R(r) = re^{-\frac{1}{2}r^2}$, $r > 0$

 (variable aleatòria de Rayleigh), $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$,
 $0 < \theta < 2\pi$ (variable uniforme).

47
 $f(z, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}|z|} \exp\left(-\frac{t}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{1}{\sigma_1^2 z} - \frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{z}{\sigma_2^2}\right)\right)$,
 $(z, t) \in (-\infty, 0] \times (-\infty, 0] \cup [0, \infty) \times [0, \infty)$.

48

 (a) $\frac{k(n+1)}{2}$. (b) $\frac{V_m^k - V_{m-1}^k}{V_n^k}$. (c) L'esperança
 val el mateix i la probabilitat canvia a
 $\frac{m^k - (m-1)^k}{n^k}$.

49
 T és exponencial amb $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

 $E[T] = 1/\sum_{i=1}^n \lambda_i$. $P(\text{guanya } i) = \lambda_i/\sum_{j=1}^n \lambda_j$.

50
 $f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n}$,
 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$.

51
 $\sigma/\sqrt{n}$.

52

(a) 0.6707 (b) 0.0799

53

 73.78 kg. $\bar{\epsilon}_{\min} = 41.31$ (és a dir, l'error mitjà val 6.427 kg).

54

 En els dos casos és $X/2$ i l'error quadràtic val
 $1/24 \approx 0.0417$.

55
 $\hat{S} = \frac{3}{2}Z$.

56
 $\lambda = \frac{38 - 2\mu}{44}$.

57

 Additiu: $\lambda = \frac{4}{5}$. Per aquesta estimació $\bar{\epsilon}_{\min} = 20$
 mentre que estimant per una constant
 $\bar{\epsilon}_{\min} = 100$.
 Multiplicatiu: $\lambda = 0$ (l'estimació no té cap
 utilitat degut a la total incertesa introduïda pel
 soroll sobre el signe).

58
 $\hat{S} = \frac{-3}{5-4\rho}(T-2)$. $\epsilon = \frac{16(1-\rho^2)}{5-4\rho}$. Si $\rho = 1$, l'error
 quadràtic mitjà val 0.

4 Estadística

Problemes bàsics

Complements sobre variables aleatòries

1. Una variable aleatòria contínua X té funció de densitat $f(x) = \frac{1}{8}(4 - x)$ per a $0 \leq x \leq 4$.
 - (a) Trobeu la funció de distribució de X .
 - (b) Calculeu els moments de X ($E[X^k]$).
 - (c) Calculeu l'esperança, la variància, la desviació, i els coeficients d'asimetria i de curtosi de X .
 - (d) Calculeu-ne la mediana, els quartils Q_1 i Q_3 , i el recorregut interquartílic (IQR).
 - (e) A partir d'un generador de nombres aleatoris uniformes en $[0, 1]$, com faríeu per generar valors de la variable X ? Feu-ho amb el programa R: genereu 5000 valors uniformes i, a partir d'ells, 5000 valors de X . Dibuixeu els histogrames dels dos conjunts de nombres, comparant-los amb les respectives densitats.

2. Resoleu el problema anterior per a una variable X amb funció de densitat $f(x) = 4/x^5$ per a $1 \leq x < +\infty$.

3. Sigui una variable $X \sim N(\mu, \sigma)$.
 - (a) Calculeu el recorregut interquartílic (IQR) de X . Calculeu la probabilitat que un valor de X sigui un valor atípic (*outlier*).
(Indicació: feu el càlcul per a una $N(0, 1)$ i tingueu en compte que $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.)
 - (b) Genereu una mostra gran d'una normal i dibuixeu el seu *boxplot*. Comproveu si el nombre observat de valors atípics està d'acord amb la probabilitat calculada.

4. A un node d'una xarxa arribem paquets de dades de forma que el temps entre un paquet i el següent és una variable exponencial de valor mitjà 5 segons i aquests temps són independents.
 - (a) Comproveu que podem prendre els paràmetres α i β d'una variable de tipus gamma per tal d'obtenir una variable exponencial de paràmetre λ .
 - (b) Sigui T el temps transcorregut fins que arriben tres nous paquets. Quin tipus de variable és? Calculeu les probabilitats següents (amb el programa R): $P(T > 25)$, $P(T < 10)$, $P(12 < T < 18)$.
 - (c) Quina esperança i desviació té T ? Obteniu-ho a partir dels moments de la variable gamma i, alternativament, dels paràmetres de l'exponencial i la forma de T .
 - (d) Genereu amb R una mostra de 100 valors de T i compareu la seva mitjana i desviacions mostrals amb els paràmetres de T .

5. Una fàbrica produeix dos tipus de tubs. El tipus A té diàmetre 5 mm. Es produeix amb toleràncies tals que aquest diàmetre es pot considerar una variable normal de mitjana 5 mm i desviació 0.3 mm. Per al tipus B tenim mitjana 6 mm i desviació 0.4 mm.
 - (a) Si volem retenir només els tubs de tipus A amb diàmetre entre 4.4 mm i 5.6 mm, quin percentatge de la producció hem de retirar?
 - (b) Tenim dos tubs, un de cada tipus, i hem de decidir quin és el de tipus A. El criteri lògic és decidir que és el de menor diàmetre. Quina és la probabilitat d'equivocar-nos?

- (c) Prenem una mostra a l'atzar de 10 tubs de tipus B i calculem la seva mitjana aritmètica $\bar{X}$. Què valen la mitjana i la desviació de $\bar{X}$? Quina és la probabilitat que $\bar{X}$ difereixi de la mitjana en menys de 0.15 mm? Compareu-ho amb la probabilitat per a una mostra d'un sol tub.

6. Demostreu que si $X_1, \dots, X_n$ són variables aleatòries independents, exponencials de paràmetre λ , aleshores $X_1 + \dots + X_n$ segueix una distribució gamma amb forma $\alpha = n$ i escala $\beta = 1/\lambda$. [Indicació: feu inducció sobre n i apliqueu el teorema de convolució.]

Estimadors

7. Sigui $X_1, \dots, X_n$ una mostra aleatòria d'una variable X amb densitat $f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x + 1}$ per a $x > 1/\lambda$. Trobeu l'estimador pel mètode dels moments del paràmetre λ .

8. Sigui $X_1, \dots, X_n$ una mostra aleatòria d'una variable X amb densitat $f(x; \alpha) = \frac{1+\alpha x}{2}$ per a $-1 < x < 1$, essent $\alpha \in [-1, 1]$ un paràmetre. Apliqueu el mètode dels moments per a trobar un estimador de α . És esbiaixat?

9. Sigui $X_1, \dots, X_n$ una mostra aleatòria d'una variable $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Trobeu l'estimador del paràmetre λ utilitzant els mètodes dels moments i de màxima versemblança.

10. Apliqueu el mètode de màxima versemblança per, a partir d'una mostra aleatòria $X_1, \dots, X_n$, estimar els paràmetres següents:

- (a) el paràmetre α d'una variable de Poisson;
- (b) el paràmetre p d'una variable de Bernoulli.

Digueu si els estimadors obtinguts són esbiaixats i calculeu el seu error quadràtic mitjà.

11. Apliqueu el mètode de màxima versemblança per, donada una mostra aleatòria $X_1, \dots, X_n$, estimar els paràmetres següents:

- (a) la variància d'una variable normal d'esperança 0;
- (b) l'esperança μ i la variància σ^2 d'una variable normal.

Digueu si els estimadors obtinguts són esbiaixats i calculeu el seu error quadràtic mitjà.

12. Apliqueu el mètode de màxima versemblança per, a partir d'una mostra aleatòria $X_1, \dots, X_n$, estimar el paràmetre θ d'una variable uniforme a l'interval $[-\theta, \theta]$. Digueu si el estimador obtingut és esbiaixat i calculeu el seu error quadràtic mitjà.

13. Determineu l'estimador de màxima versemblança $\hat{\lambda}$ del paràmetre λ d'una variable de Laplace amb densitat de probabilitat $f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Demostreu que $E[1/\hat{\lambda}] = 1/\lambda$.

14. Una variable aleatòria X pren valors $-1, 0, 1$ amb probabilitats respectives $\theta, 1 - 2\theta, \theta$. Considerem una mostra $(X_1, \dots, X_n)$ de n valors de X obtinguts en realitzacions independents.

- (a) Justifiqueu que la variable aleatòria N_0 que compta el nombre de zeros en $(X_1, \dots, X_n)$ es pot escriure com $N_0 = n - Y$ amb $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$, i que Y segueix una llei binomial i doneu els seus paràmetres.
- (b) Per estimar el valor de θ podem utilitzar l'estimador $\hat{\Theta} = \frac{Y}{2n}$. Demostreu que és l'estimador de màxima versemblança i que és no esbiaixat. Calculeu l'error quadràtic de l'estimador.

Intervals de confiança

15. Un senyal de valor constant μ es transmet per un canal de comunicació on se li afegeix un soroll que és una variable aleatòria gaussiana de valor mitjà 0 i variància σ^2 . En nou transmissions independents del senyal, s'han rebut a la sortida del canal els valors 5, 8.5, 12, 15, 7, 9, 7.5, 6.5, i 10.5. Trobeu un interval de confiança del 95% per a μ si

- (a) $\sigma^2 = 4$;
- (b) σ^2 és un paràmetre desconegut.

16. Es mesura una resistència al laboratori i s'obté, a partir de 10 observacions, una mitjana de 935Ω i una desviació de 70Ω .

- (a) Obteniu els límits de confiança del 95% i del 99%.
- (b) Repetiu l'apartat anterior per al cas que el nombre de mesures hagués estat 100.
- (c) Compareu els resultats anteriors amb els que s'obtindrien si la desviació fos exactament 70Ω (estadístic normal). Seria el resultat vàlid en algun dels dos casos ($n = 10$ o $n = 100$)?
- (d) Quantes mesures calen si volem que l'error sigui menor que 10Ω (al 95% i al 99%)?

17. Es tira un dau 200 vegades, i s'obté la cara «1» 46 vegades. Busqueu un interval que contingui, amb confiança del 95%, la probabilitat de treure «1». És versemblant que el dau sigui just? Què s'obté si el nivell de confiança és del 99%?

18. Sigui X una variable aleatòria exponencial d'esperança θ .

- (a) Demostreu que l'estimador de θ de màxima versemblança és la mitjana mostral $\bar{X}_n$, i comproveu que s'assoleix la fita inferior donada per la desigualtat de Cramér–Rao.
- (b) Demostreu que la variable aleatòria $2n\bar{X}_n/\theta$ segueix una distribució χ^2 amb $2n$ graus de llibertat.
- (c) Useu el resultat de l'apartat anterior per determinar un interval de confiança $1 - \alpha$ per al paràmetre θ .
- (d) En aquest apartat X representa el temps de vida de les bombetes fabricades per un cert productor. Si la suma dels temps de vida de 10 bombetes ha estat de 1740 hores, trobeu un interval de confiança del 95% per al temps mitjà de vida de les bombetes.

19. Es vol estimar el paràmetre a d'una variable aleatòria uniforme en l'interval $[0, a]$ a partir d'una mostra $X_1, \dots, X_n$. A tal fi, es consideren les variables $U = \max(X_1, \dots, X_n)$, $V = \frac{n+1}{n}U$, i $W = \frac{2}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.

- (a) Demostreu que U és un estimador esbiaixat i que V i W són estimadors no esbiaixats de a . Quin és el biaix de U ?
- (b) Calculeu l'error quadràtic dels tres estimadors i compareu-los.
- (c) Aplicant el teorema del límit central aproximeu la densitat de probabilitat de W per a n gran.
- (d) Demostreu que $\left[\frac{n}{n+1}V, \frac{n}{n+1}\alpha^{-1/n}V \right]$ és un interval de confiança $1 - \alpha$ per al paràmetre a .

20. Sigui X una variable aleatòria amb funció de densitat

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}(a - |x|), & \text{si } |x| \leq a \\ 0, & \text{si } |x| > a, \end{cases}$$

per a cert valor positiu desconegut de a .

- (a) Determineu el factor multiplicatiu M per tal que l'estimador $\hat{A} = M(|X_1| + \dots + |X_n|)$ de a sigui no esbiaixat, i calculeu l'error quadràtic del mateix.
- (b) Sabent que l'estimador anterior es comporta aproximadament com una variable aleatòria normal (de valor mitjà i variància adequades), determineu un interval de confiança $1-\alpha$ per al paràmetre a , en funció del valor crític z , definit com $P(N(0, 1) > z) = \alpha/2$.

21. Una variable de Poisson X té paràmetre $\alpha = \lambda T$ (X compta el nombre d'esdeveniments durant el temps T).

- (a) Justifiqueu amb el TLC que si T és tal que el valor obtingut per a X és gran, l'interval de confiança per a α és $X \pm z_c \sqrt{X}$.
- (b) Un servidor rep 1428 connexions durant una hora. Trobeu l'interval de confiança del 95% per al nombre mitjà de connexions per hora.

Tests d'hipòtesi

22. Una mostra de les edats de 100 defuncions produïdes en un cert territori ha donat una mitjana de 71.8 anys. Assumint una desviació estàndard de 8.9 anys, podríem afirmar que l'edat de defunció mitjana μ és de més de 70 anys? Utilitzeu un test d'hipòtesi, així com el valor P .

23. Una web oficial afirma que el consum mitjà d'aigua a les llars d'una certa població és de 350 L diaris. Per tal de comprovar-ho aconseguim una mostra amb els consums de $n = 20$ llars, que dona una mitjana de $\bar{x} = 353.8$ L i una desviació estàndard $s = 21.848$ L. Aquestes dades estan d'acord amb la xifra publicada?

24. En 1000 tirades d'una moneda s'obtenen 453 cares. Estudieu mitjançant valors P la hipòtesi que la moneda sigui justa.

- (a) Fent servir la distribució binomial (resultat exacte).
- (b) Fent servir la distribució normal (mostra gran).
- (c) Fent servir la distribució normal amb la correcció del mig punt.

25. En una planta de fabricació de condensadors s'ha establert que la desviació típica en la capacitat dels condensadors produïts és del 3% d'aquesta capacitat. Amb una mostra de 10 condensadors s'obté una desviació mostral $\hat{S}$ igual al 4.5% de la capacitat. Apliqueu un test a la hipòtesi $H_0 =$ «La producció continua sent correcta», obtenint un valor P i dient quines són les conclusions al 5% de significació i a l'1% de significació.

26. En una escola, el grup de matí, de 60 alumnes, té nota mitjana 6.3 amb desviació 1.5 mentre que el grup de tarda, de 40 alumnes, té nota mitjana 5.4 amb desviació 1.7. Estudieu si la diferència és significativa, fent servir el valor P .

27. En un test de cultura general sobre una mostra de 200 persones d'una gran ciutat s'obté una desviació mostral $\hat{S}_1$ de 2.3 punts en les puntuacions obtingudes. Una mostra de la mateixa mida sobre la població d'un poble dona una desviació mostral $\hat{S}_2$ de 2.8.

- (a) Obteniu intervals del 95% de confiança per a les desviacions σ_1 i σ_2 de les respectives poblacions.
- (b) Feu un test per determinar si al poble la desviació és realment superior a la de la ciutat.
- (c) Són consistents les respostes dels dos apartats anteriors?

28. A partir de l'interval de confiança per a proporcions:

- (a) Demostreu que $|\hat{p} - p| < \frac{z_c}{\sqrt{4n}}$.
- (b) Amb la fita anterior podem determinar la mida n per tal que l'error sigui menor que un valor ϵ donat. Feu una taula amb els valors de n per a $c = 95\%$, $c = 99\%$ i $\epsilon = 10^{-1}$, $\epsilon = 10^{-2}$, $\epsilon = 10^{-3}$.

29. En l'estimació de proporcions hem utilitzat l'aproximació normal considerant mostres grans. Convé recordar que l'aproximació normal de la binomial requereix $np(1-p)$ gran. Si p és molt petit cal assegurar no només que n és gran ($n > 30$) sinó que np és gran.

Suposem que en una població molt gran certa propietat A es troba amb $p = 10^{-4}$.

- (a) Considereu una mostra de mida $n = 10^4$ i sigui N_A el nombre d'elements que tenen la propietat en aquesta mostra. Llavors, $\hat{p} = \frac{N_A}{n}$. Calculeu les probabilitats que $N_A = 0$, que $N_A = 1$ i que $N_A = 2$. Doneu els corresponents valors de $\hat{p}$. La conclusió és que ja no val l'aproximació normal. Si p és molt petit i desconegut l'estimació de p requereix especial cura en l'elecció de n .
- (b) Preneu ara $n = 10^5$. Dibuixeu les probabilitats $P(N_A = k)$ per $0 \leq k \leq 20$. Noteu que comença a ser vàlida l'aproximació normal.

Problemes addicionals

30. La quantitat total de pes que un pont pot suportar és de W tones. El pes de cada vehicle que hi passa és una variable aleatòria d'esperança 3 tones i desviació típica 0.3 tones. Determineu quants vehicles hi ha d'haver al pont per tal que la probabilitat que es produeixi un dany estructural excedeixi el valor 0.1, en els dos casos següents:

- (a) Si $W = 400$ tones.
- (b) Si W és una variable gaussiana d'esperança 400 tones i desviació típica 40 tones.

31. *Funció característica d'una variable aleatòria*

Si X és una variable aleatòria (real) i $\omega \in \mathbb{R}$, la funció $e^{i\omega X} = \cos X + i \sin X$ és una variable aleatòria complexa. La funció característica de X és la funció $C_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida per

$$C_X(\omega) = E[e^{i\omega X}].$$

En el cas que X sigui contínua, $C_X(\omega) = \int_{\mathbb{R}} dx f_X(x) e^{i\omega x}$, per tant C_X és essencialment la transformada de Fourier de la funció de densitat.

- (a) Proveu que $E[X^k] = (-i)^k C_X^{(k)}(0)$. En quines condicions es pot fer aquest càlcul?
- (b) Suposem que $Z = X_1 + \dots + X_n$, amb les X_i variables aleatòries independents. Proveu que $C_Z(\omega) = C_{X_1}(\omega) \cdots C_{X_n}(\omega)$. (Indicació: useu el teorema de convolució.)

32. Considereu una variable X de Cauchy amb paràmetre α .

- (a) Trobeu la seva funció característica $C_X(\omega)$.
- (b) Què passa a l'intentar aplicar la propietat de derivació de les funcions característiques per a calcular els moments de X ?
- (c) Quina variable resulta de sumar diverses variables de Cauchy independents? Què passa si intentem aplicar el teorema del límit central [TLC] a una successió de variables de Cauchy i.i.d.?

33. Sigui V una variable aleatòria contínua amb funció de densitat (denominada de Maxwell–Boltzmann)

$$f_V(v) = \begin{cases} 0, & \text{si } v < 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\theta^3}} v^2 e^{-\frac{v^2}{2\theta}}, & \text{si } v \geq 0 \end{cases}$$

on $\theta > 0$ és un paràmetre de la distribució.

(a) Determineu l'estimador de màxima versemblança de θ a partir d'una mostra $V_1, \dots, V_n$.

(b) Comproveu que l'estimador obtingut és no esbiaixat i calculeu el seu error quadràtic mitjà.

Indicació:

$$\int_0^\infty t^s e^{-\frac{t^2}{2\alpha}} dt = \begin{cases} (s-1)!! \alpha^{\frac{s+1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \text{si } s \text{ és parell} \\ (s-1)!! \alpha^{\frac{s+1}{2}}, & \text{si } s \text{ és senar} \end{cases}$$

$$\text{on } k!! = \begin{cases} k(k-2)(k-4) \cdots 2 & \text{si } k \text{ és parell} \\ k(k-2)(k-4) \cdots 1 & \text{si } k \text{ és senar} \end{cases}$$

34. Una màquina ha d'omplir tasses amb 250 g de líquid. Suposem que la quantitat emplenada és una variable $X \sim N(\mu, \sigma=2.5)$. Per tal de comprovar el valor de μ omplim 25 tasses. El valor mitjà obtingut és de $\bar{x} = 250.2$ mg.

Doneu un interval de confiança del 95% per al valor de μ . Podríem acceptar que la màquina està ben calibrada?

35. Demostreu que per al cas $r = 2$ el test χ^2 coincideix amb el test Z .

36. Considerem el model de *regressió lineal*

$$Y = aX + b + Z,$$

on X , Y i Z són variables aleatòries, amb $Z \sim N(0, \sigma^2)$ i independent de X i de Y , i a i b són paràmetres. (Aquest model contempla el cas en què la resposta Y d'un sistema hauria de dependre linealment d'una variable de control X , però hi ha un soroll gaussià Z que s'afegeix a aquesta resposta.)

(a) Demostreu que, donats $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$, els estimadors de màxima versemblança dels paràmetres a i b , expressats com a variables aleatòries funció d'una mostra aleatòria $Y_1, \dots, Y_n$, són:

$$\hat{A}_n = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i Y_i - (\sum_{i=1}^n x_i) (\sum_{i=1}^n Y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \quad (1)$$

$$\hat{B}_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i - \hat{A}_n \sum_{i=1}^n x_i \right). \quad (2)$$

(b) Demostreu que els estimadors anteriors són no esbiaixats, és a dir, $E[\hat{A}_n] = a$ i $E[\hat{B}_n] = b$.

Considerem ara una situació més general en què els valors presos per les variables aleatòries $X_1, \dots, X_n$ també són desconeguts. En aquest cas, considerem una mostra aleatòria de la forma $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

(c) Demostreu que els estimadors de màxima versemblança dels paràmetres a i b continuen sent (1) i (2), però ara amb els valors x_i substituïts per les corresponents variables aleatòries X_i .

(d) Proveu que aquests estimadors continuen sent no esbiaixats.

Respostes
1

- (a) $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}$ si $0 < x < 4$.
- (b) $E[X^k] = \frac{2 \cdot 4^k}{(k+1)(k+2)}$.
- (c) $\mu_X = \frac{4}{3}$, $\sigma_X^2 = \frac{8}{9}$, $\sigma_X = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.9428$,
 asimetria $= \frac{2\sqrt{2}}{5} \approx 0.5657$, curtosi
 $= \frac{12}{5} = 2.4$.
- (d) Amb la funció de quantils
 $F^{-1}(p) = 4(1 - \sqrt{1-p})$ s'obté
 $Q_1 = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.5359$,
 $m = Q_2 = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1.1716$, $Q_3 = 2$;
 IQR $= 2\sqrt{3} - 2 \approx 1.4641$.
- (e) $X = 4(1 - \sqrt{U})$.

2

- (a) $F(x) = 1 - \frac{1}{x^4}$, $x \geq 1$.
- (b) $E[X^k] = \frac{4}{4-k}$, $0 \leq k \leq 3$. Els moments
 d'ordre igual o superior a 4 són infinits.
- (c) $\mu_X = \frac{4}{3}$, $\sigma_X^2 = \frac{2}{9}$, $\sigma_X = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.4714$,
 asimetria $= 5\sqrt{2} \approx 7.0711$; la curtosi no està
 definida.
- (d) Amb la funció de quantils
 $F^{-1}(p) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-p}}$ obtenim
 $Q_1 = \sqrt[4]{\frac{4}{3}} \approx 1.0746$, $m = Q_2 = \sqrt[4]{2} \approx 1.1892$,
 $Q_3 = \sqrt[4]{\frac{8}{3}} \approx 1.4142$; IQR ≈ 0.3396 .
- (e) $X = \frac{1}{\sqrt[4]{U}}$.

3

- (a) Per a una variable $N(0, 1)$, $Q_1 \approx -0.6745$
 $(>\text{qnorm}(0.25))$, $m = Q_2 = 0$, $Q_3 \approx 0.6745$
 $(>\text{qnorm}(0.75))$. Per tant, per a una variable
 $N(\mu, \sigma)$, $Q_1 \approx \mu - 0.6745\sigma$, $m = Q_2 = \mu$,
 $Q_3 \approx \mu + 0.6745\sigma$, i doncs IQR $\approx 1.3490\sigma$.
 $P(\text{outlier}) = 2P(X > Q_3 + \frac{3}{2}\text{IQR}) \approx$
 $2P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > 2.6980\right) \approx 0.006977$. Esperem un
 0.7% d'outliers.
- (b) En la figura es mostra un *boxplot* d'una
 mostra de mida 500 amb 5 outliers (en mitjana
 se n'esperen 3.5).

4

- (a) $\alpha = 1$ i $\beta = \frac{1}{\lambda}$.

- (b) $T = X_1 + X_2 + X_3$ on les X_i són
 Gamma(1, 5) independents, d'on
 $T \sim \text{Gamma}(3, 5)$. $P(T > 25) \approx 0.1247$,
 $P(T < 10) \approx 0.3233$,
 $P(12 < T < 18) \approx 0.2670$.
- (c) $\mu_T = 15$, $\sigma_T = 5\sqrt{3} \approx 8.6602$.
- (d) Amb una mostra de 100 valors generada
 amb R hem obtingut $\bar{X} = 15.75$ i $\hat{S} = 8.49$.
 Aquests valors són comparables amb
 $E[T] = 15$ i $\sigma_T \approx 8.66$.

5

- (a) 4.55%. (b) 0.02275. (c) $\mu_{\bar{X}} = 6$,
 $\sigma_{\bar{X}} \approx 0.1265$. $P \approx 0.7643$. Amb un sol tub,
 $P \approx 0.2923$.

7

$$\hat{\lambda} = 2/\bar{X}.$$

8

$$\hat{\alpha} = 3\bar{X}. \text{ No té biaix.}$$

9

$$\text{Els dos mètodes donen } \hat{\lambda} = 1/\bar{X}_n.$$

10

En els dos casos és la mitjana mostral $\bar{X}_n$. En el
 segon cas, tenim la interpretació següent:
 s'estima la probabilitat p d'un experiment de
 Bernoulli per la freqüència relativa d'èxits quan
 es repeteix n vegades.

Els estimadors són no esbiaixats. L'error
 quadràtic mitjà és, per tant, la variància de
 l'estimador, α/n , i $p(1-p)/n$, respectivament.

11

- (a) $\sum_{i=1}^n X_i^2/n$. L'estimador és no esbiaixat i
 l'error val $2\sigma^4/n$.
- (b) L'estimador de μ és la mitjana mostral $\bar{X}$ i
 l'estimador de σ^2 és la versió esbiaixada de
 la variància mostral, $(1/n) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.
 L'estimador de μ és no esbiaixat i el seu
 error quadràtic mitjà val σ^2/n . L'error
 quadràtic mitjà de l'estimador de σ^2 val
 $\frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} + \frac{\sigma^4}{n^2}$, on el primer sumand és la
 variància de l'estimador i el segon sumand és
 el quadrat del biaix de l'estimador.

12

$\hat{\theta} = \max(|X_1|, \dots, |X_n|)$. L'estimador és
 esbiaixat: $E[\hat{\theta}] = \frac{n}{n+1}\theta$. Error quadràtic mitjà:
 $\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$.

13

$$\hat{\lambda} = n / (\sum_{i=1}^n |X_i|).$$

14

(a) $Y \sim \text{Bin}(n, 2\theta)$. (b) L'error quadràtic val $\frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$.

15

(a) (7.69, 10.31); (b) (6.63, 11.37).

16

(a) Al 95%: (885, 985); al 99%: (863, 1007).
 (b) Al 95%: (921, 949); al 99%: (917, 953).
 (c) $n = 10$, al 95%: (892, 978); al 99%: (878, 992). $n = 100$, al 95%: (921, 949); al 99%: (917, 953). Per a $n = 100$ l'aproximació és bona.
 (d) Al 95%: $n \geq 189$; al 99%: $n \geq 326$ (191 i 329 sense l'aproximació normal).

17

Al 95% de confiança l'interval és $0.1717 < p < 0.2883$. Si el dau és just hauria de ser $p = 0.1667$, que queda lleugerament fora de l'interval obtingut. Augmentar el nivell de confiança al 99% amplia l'interval: $0.1534 < p < 0.3066$.

18

(a) $V[\hat{\theta}_n] = (I_n(\theta))^{-1} = \theta^2/n$. (c) $\left(\frac{2n\bar{X}_n}{\chi_{\alpha/2;2n}^2}, \frac{2n\bar{X}_n}{\chi_{1-\alpha/2;2n}^2}\right)$, on $\chi_{\beta;2n}^2$ és l'argument tal que, si $V \sim \chi^2(2n)$, aleshores $P(V > \chi_{\beta;2n}^2) = \beta$.
 (d) (101.84, 362.85).

19

(a) El biaix de U val $-a/(n+1)$.
 (b) $\mathcal{E}^2(U) = \frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}$; $\mathcal{E}^2(V) = V[V] = \frac{a^2}{n(n+2)}$; $\mathcal{E}^2(W) = V[W] = \frac{a^2}{3n}$.
 (c) $f_W(w) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(w-a)^2}{2\sigma^2})$, on $\sigma = a/\sqrt{3n}$.

20

(a) $M = 3/n$; $\epsilon^2 = a^2/(3n)$.
 (b) $1 - \alpha \simeq P\left(\frac{\hat{A}}{1+z/\sqrt{2n}} \leq a \leq \frac{\hat{A}}{1-z/\sqrt{2n}}\right)$.

21

(a) Si Y_i , $i = 1, \dots, n$, són variables de Poisson de paràmetre α_1 , llavors, per a n gran, $X = \sum_i Y_i$ s'aproxima a una normal amb $\mu = n\alpha_1$ i $\sigma = \sqrt{n\alpha_1}$. Tenim que X és Poisson de paràmetre $\alpha = n\alpha_1$ i s'aproxima a una $N(\alpha, \sqrt{\alpha})$ on α és gran. De $\frac{X-\alpha}{\sqrt{\alpha}} \sim N(0, 1)$ traiem un interval que, de manera similar al que passa amb les proporcions, s'aproxima com $\alpha \in (X - z_c\sqrt{X}, X + z_c\sqrt{X})$. (b) (1354, 1502).

22

Suposem que la població és $N(\mu, \sigma=8.9)$. Si $\mu_0 = 70$, confrontem la hipòtesi $H_0: \mu = \mu_0$ amb $H_1: \mu > \mu_0$. L'estadístic de test és la normal estàndard $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$, essent $n = 100$. Amb les dades donades el valor de Z és $z \approx 2.0225$.

Amb un nivell de significació $\alpha = 0.05$ la regió crítica és $Z > Q_Z(0.95) \approx 1.6449$, de manera que rebutgem la hipòtesi i concloem que $\mu > 70$.

El valor P del test és

$P(Z > z) = 1 - F_Z(z) \approx 0.02156$, que també suggereix rebutjar la hipòtesi nul·la.

23

Suposem que la població és $N(\mu, \sigma)$. Si $\mu_0 = 350$, confrontem la hipòtesi $H_0: \mu = \mu_0$ amb $H_1: \mu \neq \mu_0$. L'estadístic de test és una variable t_{19} de Student: $T = (\bar{X} - \mu_0)/(S/\sqrt{n})$. Amb les dades el valor de T és $t \approx 0.7778$.

Amb un nivell de significació $\alpha = 0.05$ la regió crítica és $|T| > Q_T(0.975) \approx 2.0930$, de manera que no rebutgem la hipòtesi i acceptem que $\mu = 350$.

El valor P del test és

$2P(T > t) = 2(1 - F_T(t)) \approx 0.4463$, que també suggereix mantenir la hipòtesi nul·la.

24

(a) 0.003253. (b) 0.002953. (c) 0.003272. En qualsevol cas rebutgem que la moneda sigui justa.

25

$P \approx 0.01643$. Rebutgem H_0 al 5% però l'acceptem a l'1%.

26

Fent servir *pooling* per a la variància i amb un test T s'obté $P \approx 0.003204$. La diferència és significativa i rebutgem la hipòtesi que els grups siguin iguals.

27

(a) $\sigma_1 \in (2.09, 2.55)$, $\sigma_2 \in (2.55, 3.10)$.
 (b) $P \approx 0.002867$, d'on es rebutja que $\sigma_1 = \sigma_2$ en favor de $\sigma_2 > \sigma_1$. (c) Els intervals de confiança no se solapen, fet consistent amb que les desviacions siguin diferents.

28

	$\epsilon = 10^{-1}$	$\epsilon = 10^{-2}$	$\epsilon = 10^{-3}$
$c = 95\%$	$n = 96$	$n = 9600$	$n = 960000$
$c = 99\%$	$n = 166$	$n = 16600$	$n = 1660000$

29

- (a) $P(N_A = 0) \approx 0.3679$ amb $\hat{p} = 0$,
 $P(N_A = 1) \approx 0.3679$ amb $\hat{p} = 10^{-4}$.
 $P(N_A = 2) \approx 0.1839$ amb $\hat{p} = 2 \cdot 10^{-4}$.

30

- (a) 132 (b) 117

32

- (a) $C_X(\omega) = e^{-\alpha|\omega|}$.
 (b) Degut al valor absolut, $C_X(\omega)$ no admet derivades en 0, d'acord amb la no existència dels moments de X .
 (c) La suma és una variable de Cauchy, de manera que no se satisfà la tesi del TLC (el

qual requereix l'existència dels dos primers moments).

33

- (a) $\hat{\Theta} = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n V_i^2$. (b) $\mathcal{E}^2 = 2\theta^2/(3n)$.

34

L'interval de confiança és $[249.22, 251.18]$, cosa que ens fa pensar que la màquina està ben calibrada.

35

En aquest cas $X_1 = X$, $X_2 = n - X$, $p_1 = p$,

$p_2 = q$.

$$\chi^2 = \frac{(X - np)^2}{np} + \frac{(n - X - nq)^2}{nq} = \frac{(X - np)^2}{npq} = Z^2.$$

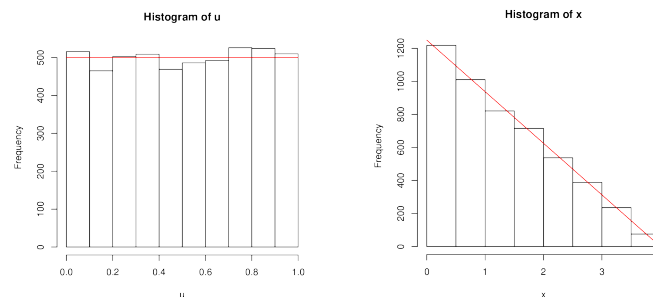


Figura 1: Problema 1(e).

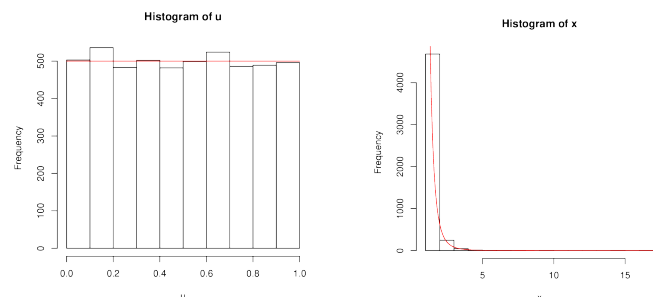


Figura 2: Problema 2(e).

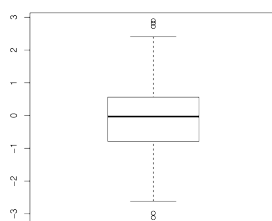


Figura 3: Problema 3.

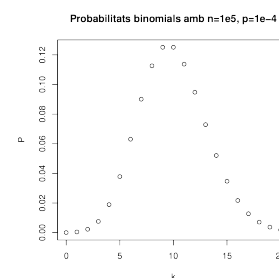


Figura 4: Problema 26(b).