Profesores: E. Barriere, X. Gràcia
Facultat de Matemàtiques i Estadísitica

Combinando Música

Gastón Vila

Barcelona, 14 de Enero del 2011

Índice general

I. Motivación e Introducción

1.1. Introducción

Este trabajo viene motivado por mi fuerte interés en la matemática discreta y la teoría de números. A través de los resultados que se expondrán, así como las estructuras que se emplean para poder entender mejor las razones que nos permiten arribar a las ecuaciones para contar los distintos elementos descriptos a lo largo del curso de Música y Matemáticas, me resultan especialmente interesantes ya que exponen esa dualidad implícita en las matemáticas de sencillez y complejidad. También creo que son realmente útiles, al menos para una persona sin formación musical como yo, para poder conseguir cierto orden y simplificación en el vasto universo musical. Comprobar que las combinaciones realmente útiles para nuestros propósitos musicales, son tan extensas como queramos pero al mismo muy limitadas por sencillas normas.

Por otra parte, creo que es una buena forma de cerrar el curso, retomar todos los conceptos vistos. Pero enfocándolos desde un punto de vista cuantitativo en lugar del análisis cualitativo impartido en el curso. Por esta razón, los temas a tratar se basan en la combinatoria enumerativa, la teoría de grafos y algo de teoría de números.

Comenzaremos definiendo las principales estructuras combinatorias que nos permitirán obtener las fórmulas de conteo buscadas en cada unidad. Siempre que sea posible, se acompañará con una explicación gráfica el razonamiento que da lugar a la fórmula.

En la sección siguiente, estudiaremos concretamente el conteo de acordes y su clasificación siguiendo varios criterios. También, en la medida de lo posible, se intentará remarcar la conexión con la teoría de la música que se puede extraer del resultado matemático.

Finalmente, se dará una leve pincelada de patrones en música n-tonal aplicando los resultados vistos anteriormente.

En general, el hilo conductor de los resultados que iremos comprobando será el Teorema de Pólya.

II. Resultados de combinatoria enumerativa

2.1. Cadenas

Para poder introducirnos en el conteo de acordes, escalas o ritmos; haremos un breve repaso de teoría de combinatoria enumerativa y definiremos 2 estructuras sobre las cuales se basa el conteo estos elementos.

Definición 2.1: Una k-permutación de un conjunto S es una selección ordenada de k elementos de S sin repetición. Si $|S| = n$, el número de k-permutaciones de S es el número

$$n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Una n-permutación se denomina *permutación* y su número es $n!$

Normalmente las permutaciones se denotan de dos formas:

$$(1)(235)(4) \text{ o } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ambas formas son equivalentes, en la segunda queda escrito de forma más explícita de qué forma reordenamos nuestros elementos. El 1 queda fijo. El 2 lo cambiamos por el 3, y éste por el 5. Finalmente el 4 queda fijo también.

Definición 2.2: Si $|S| = n$, entonces el número de *subconjuntos* de S con k elementos es el número binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Una interpretación de este valor es que de un conjunto de n elementos, tenemos k distinguidos y contamos las posibles formas de ordenarlo. Por lo tanto, a todas las posibles permutaciones de S le estamos quitando las permutaciones de estos elementos destacados y las permutaciones del resto de elementos. Esto se debe a que dentro de estas 2 categorías (distinguibles y el resto) no diferenciamos entre los objetos. Si no fuese así, tenemos que reformular la definición.

Para aclarar este último concepto, pensemos en estos ejemplos:

- Un paquete con bolas rojas y bolas azules. En este caso, todas las bolas del mismo color son indistinguibles.
- El mismo paquete del ejemplo anterior, pero ahora todas las bolas están numeradas. Ahora cada bola es distinta.

La generalización del número binomial es la siguiente.

Definición 2.3: El número *multinomial* viene dado por

$$\binom{n}{k_1,\dots,k_r} = \frac{n!}{k_1!\dots k_r!} \text{ tal que } \sum_{i=1}^{r} k_i = n$$

La estructura que nos permite contar escalas, es una cadena. Por cadena entendemos la siguiente figura

En este caso, las cuentas negras del collar se pueden interpretar como la k del número binomial. Si tuviéramos cuentas de varios colores, entonces el resultado nos lo daría el número multinomial.

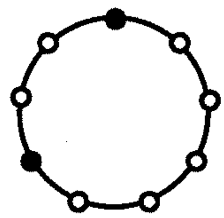
Para introducir la siguiente estructura, reformularemos el problema de contar cadenas mediante las *configuraciones*.

Definición 2.4: Dada una colección de objetos formada por m tipos distintos de éstos, y un conjunto de n cajas. Diremos que cada tipo de objeto tiene cierto *peso* (w_i), donde $\leq i \leq m$ y disponemos de una ilimitada cantidad de objetos de cada tipo. Una *configuración* se obtiene poniendo un objeto en cada caja. El peso de la configuración resulta de la suma de los pesos de cada objeto en las cajas.

El problema de configuraciones trata el número de distintas configuraciones dado un peso. En nuestro caso, los objetos son las cuentas y los distintos tipos son los colores. Las n cajas son las posibles posiciones dentro de la cadena.

2.2. Collares

Los collares, nos servirán para contar acordes. Para nuestro estudio, un collar está representado por la siguiente figura



Para poder estudiar el conteo de collares, generalizamos el problema de las configuraciones teniendo en cuenta que dos configuraciones se consideran equivalentes si se obtienen mediante una permutación. Por lo tanto, estamos interesados en contar las distintas configuraciones dado un peso y dado un conjunto de permutaciones G. En concreto, nos interesa que G sea el conjunto de todas las permutaciones cíclicas.

Buscamos aplicar el teorema de Pólya para poder contar configuraciones de collares. Para ello, se debe satisfacer que G sea un grupo. Como en nuestro caso G es el el conjunto de las permutaciones cíclicas, este conjunto junto con la operación de la composición es un grupo. Esto se comprueba de manera trivial ya que

- Si dejamos todos los elementos fijos, obtenemos la identidad, y por ende, el elemento neutro del grupo.
- Toda permutación la podemos contrarrestar con otra que devuelva todos los elementos a su posición original. Por lo tanto, todos los elementos de G tiene inverso.
- Si aplicamos 2 permutaciones, está claro que el resultado es una permutación

Otro punto importante es que toda permutación se puede descomponer en ciclos disjuntos. Por ejemplo, la permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 8 & 7 & 3 & 6 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} = (2471)(853)(6)(9)$$

Definición 2.5: El monomio índice-ciclo de una permutación de n elementos es la expresión

$$z_1^{a_1} z_2^{a_2} \dots z_n^{a_n}$$

Donde z_i son símbolos arbitrarios. a_i representa el número de ciclos de longitud i en la permutación.

Por ejemplo, para la permutación anterior tendríamos el monomio

$$z_1^2 z_3 z_4$$

Ya que tenemos 2 ciclos de longitud 1, y luego un ciclo de longitud 3 y otro de 4.

Definición 2.6: $P(G; z_1, z_2, \dots, z_n)$ es el polinomio índice-ciclo de un grupo de permutaciones G. Es decir, es la suma de los monomios correspondientes a cada permutación de G.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el Teorema de Pólya, uno de los resultados básicos que se presentan en este trabajo.

Teorema 2.1: El número de configuraciones (usando n cajas y m tipos de objetos) con peso $\sum_{i=1}^{m} k_i w_i$; tal que dos configuraciones se consideran equivalentes si se pueden obtener mediante una permutación del grupo G, es equivalente al coeficiente de $\prod w_i^{k_i}$ del polinomio

$$\frac{1}{|G|} P\left(G; \sum_i w_i, \sum_i w_i^2, \dots, \sum_i w_i^n\right)$$

Cabe destacar, que este teorema es una aplicación concreta de un resultado mucho más general proveniente del Álgebra, el lema de Burnside. Cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema 2.2: Sea G un grupo finito de permutaciones de un conjunto finito X. Entonces el número de órbitas de X bajo la acción de G es

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)| \text{ tal que } F(g) = \{x \in X | g(x) = x\}$$

La demostración de cualquiera de estos 2 resultados es realmente compleja y sale del interés de este trabajo. Pero en la bibliografía se puede consultar su demostración.

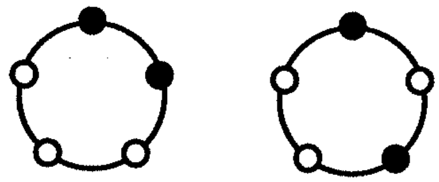
Ejemplo: Sean $n = 5$, $m = 2$. Supongamos que w_1 son las cuentas negras y w_2 las blancas. Por lo tanto tenemos que:

$$G = \{(12345), (23451), (34512), (45123), (51234)\}$$
$$P(G; z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = z_1^5 + 4z_5$$

Teniendo en cuenta que $|G| = 5$ y reemplazando $z_i = w_1^i + w_2^i$ obtenemos

$$\frac{1}{5}\left((w_1 + w_2)^5 + 4(w_1^5 + w_2^5)\right) = w_1^5 + w_1 w_2^4 + 2w_1^2 w_2^3 + 2w_1^3 w_2^2 + w_1^4 w_2 + w_2^5$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de Pólya, el número que buscamos es el coeficiente de $w_1^2 w_2^3$, es decir, 2. Esto se corresponde con estos collares:



En estos momentos, ya estamos en condiciones de resolver el problema general de contar collares. Sea $N(n,k)$ el número de collares de 2 colores, formado por n cuentas de las cuales k son negras. Pero antes introducimos un par de definiciones básicas.

Definición 2.7: La función phi de Euler, $\phi(n),\ n \in \mathbb{N}$ cuenta la cantidad de números menores que n coprimos a éste. Observemos que si n es primo, entonces $\phi(n) = n - 1$

Denotaremos al mínimo común múltiplo entre m y n por $[m,n]$.

Entonces, si queremos aplicar el teorema de Pólya, necesitamos determinar el polinomio índice-ciclo de C_n, donde C_n es el grupo cíclico de orden n. Si consideramos una permutación que desplaza los elementos k espacios, la longitud de un ciclo de un elemento de esta permutación es el menor d tal que

$$dk = mn$$

Como obtenemos un múltiplo de n, entonces será como no haber aplicado permutación alguna. Con lo cual, podemos interpretar que $[k,n] = dk$. Si $k \not| n \Rightarrow [k,n] = kn$. Entonces, $d = n$.

Suponiendo que $k|n \Rightarrow$ que tienen un factor en común. Sea este factor s. Por lo tanto nos queda que

$$d\frac{k}{s} = \left[\frac{k}{s}, \frac{n}{s}\right]$$

Como $\frac{k}{s} \not| \frac{n}{s} \Rightarrow d = \frac{n}{s}$. Por lo tanto, en cualquier caso se cumple que $d|n$. Por lo tanto, los posibles ciclos en elementos de C_n son todos los divisores de n. Teniendo en cuanta la definición de la phi de Euler, podemos concluir que

$$P(C_n; z_1, \ldots, z_n) = \sum_{d|n} \phi(d) z_d^{\frac{n}{d}}$$

Si ahora aplicamos el teorema de Pólya, tenemos que reemplazar los z_i por $x^i + y^i$ y por lo tanto nos queda la fórmula

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n} \phi(d)(x^d + y^d)^{\frac{n}{d}}$$

Procediendo como en el ejemplo, el valor de $N(n,k)$ es el coeficiente de $x^k y^{n-k}$. Tenemos 2 posibilidades:

- $d \nmid k$. Está claro que en este caso, no tendremos términos del tipo $x^k y^{n-k}$
- $d|k$. Entonces podemos centrar nuestra atención en el coeficiente de $x^{\frac{k}{d}} y^{\frac{n-k}{d}}$ en la expansión del binomio $(x+y)^{\frac{n}{d}}$. Y éste es justamente el coeficiente binomial $\binom{n/d}{k/d}$

Por lo tanto nos queda la fórmula siguiente

$$N(n,k) = \frac{1}{n} \sum_{d|n,k} \phi(d) \binom{n/d}{k/d}$$

Observemos que $N(n,k) = N(n, n-k)$ debido a la simetría de los coeficientes binomiales. También cabe destacar que si queremos sumar todos los posibles collares de n cuentas, es decir

$$N(n,*) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) \sum_{0 \le k/d \le n/d} \binom{n/d}{k/d} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) 2^{\frac{n}{d}}$$

debido a las propiedades de los números binomiales.

2.3. Partición de enteros

Nos interesa contar particiones de enteros ya que está relacionado con los conjuntos de intervalos.

Definición 2.8: Una partición de un entero n es una expresión de n como suma de k enteros positivos.

Ejemplo: `12=4+2+2+1+1+1+1`

Denominaremos como $p(n,k)$ al número de distintas particiones de n en exactamente k partes sin importarnos el orden de los sumandos. Este problema es incluso más complicado que el de contar collares. La fórmula explícita para resolverlo es un resultado importantísimo de Teoría de Números conseguido por Ramanujan y Hardy. En nuestro caso, utilizaremos una fórmula recursiva. Primero una definición.

Definición 2.9: Dada una partición, por ejemplo 13=5+3+3+2, el diagrama de Ferrers de esta partición es el siguiente gráfico:

$$\begin{array}{l} \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\ \bullet\,\bullet\,\bullet \\ \bullet\,\bullet\,\bullet \\ \bullet\,\bullet \end{array}$$

Ahora definimos una función que cuente las distintas particiones de n en en enteros $\le k$. La llamaremos $q(n,k)$. Para ello, observemos que hay 2 alternativas

1. las que incluyen a k como sumando. De este tipo tenemos $q(n-k, k)$.
2. las que no incluyen a k. Por lo tanto, el mayor sumando que podemos encontrarnos será $k-1$. Entonces tenemos $q(n, k-1)$ de este tipo.

Por lo tanto, obtenemos la siguiente fórmula recursiva

$$q(n,k) = q(n-k,k) + q(n,k-1) \qquad \text{para } k \leq n$$

Cuyo caso base es trivial ya que $q(0,k) = q(1,k) = q(n,1) = 1$. Ahora observemos el diagrama de Ferrers: horizontalmente tenemos representado el tamañan de cada sumando y verticalmente el nº de sumandos. Si ahora lo interpretamos al revés, obtendríamos para el ejemplo anterior la partición 13=4+4+3+1+1. Es decir, antes teníamos una partición de sumandos ≤ 5, y ahora tenemos una de ≤ 5 sumandos. De aquí podemos deducir que ambas formas de contar las particiones son equivalentes.

Como nuestro objetivo es calcular $p(n,k)$, mediante la fórmula recursiva podemos calcularlo obteniendo los valores para particiones de $\leq k$ sumandos menos las de $\leq k-1$ sumandos. Por lo que acabamos de ver, esto es

$$p(n,k) = q(n,k) - q(n,k-1)$$

Pero tenemos definido por la recurrencia de la función q las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} q(n,k) &= q(n-k,k) + q(n,k-1) \\ q(n-k,k) &= q(n,k) - q(n,k-1) \end{aligned}$$

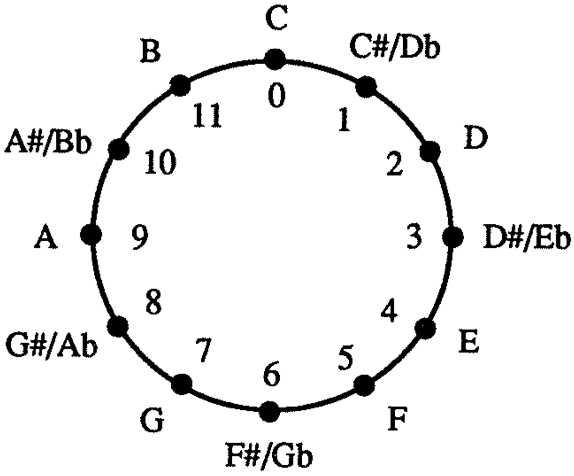
Con lo cual, nos queda finalmente que

$$p(n,k) = q(n-k,k)$$

III. Estudio de acordes

3.1. Resultados básicos

Trabajaremos con la escala de 12 notas equi-temperadas. Tal como se ha visto en clase, se corresponde al siguiente diagrama:



2 acordes se consideran iguales si uno se puede transponer al otro. Es decir, se corresponde a una rotación del diagrama anterior. En otras palabras, estamos buscando el nº de distintos tipos de acordes fijada la primera nota, en una escala de L notas. Es relativamente sencillo ver que estamos formulando con otras palabras el problema ya resuelto de los collares. Ahora tenemos L cuentas y donde las cuentas negras son las notas que tocamos. Entonces, si definimos $Ch(L,n)$ como la función que cuenta estos acordes, se cumple que

$$Ch(L,n) = N(L,n)$$

Por lo tanto, aplicando los resultados ya vistos en el capítulo anterior, podemos calcular todos los acordes de los que disponemos fijada L ya que

$$Ch(L,*) = N(L,*) - 1$$

Restamos 1 para esta fórmula ya que no tiene sentido considerar como acorde a la configuración en la que todas las cuentas son blancas. En este caso, sería como no tocar ninguna nota, por este motivo lo descartamos.

Ejemplo: `Para` $L = 12$ `tenemos que` $Ch(12,*) = 352 - 1$`. Por lo tanto contamos con 351 acordes esencialmente diferentes.`

Calculando para distintas n obtenemos la siguiente tabla en la que queda nuevamente de manifiesto la simetría de los coeficientes binomiales

nº de notas	nº de acordes
12	1
1 o 11	1
2 o 10	6
3 o 9	19
4 o 8	43
5 o 7	66
6	80

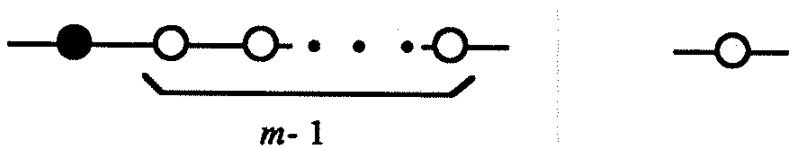
Sumando estos valores, por ejemplo hasta 5, podemos ver que en un piano podemos interpretar hasta 135 acordes diferentes con una sola mano. Es decir, poco más del 38 % de todos los posibles acordes.

3.2. Análisis de intervalos

En primer lugar, estudiaremos el mínimo intervalo entre las notas de un acorde. Lo denotaremos por $I(L, n, m)$. Es decir, en una escala de L notas, nuestro acorde tendrá n notas e impondremos que la distancia mínima sea m. La importancia de este cálculo radica en que el sonido de un acorde está determinado en gran medida por los intervalos que contiene. Los intervalos determinan las frecuencias relativas y éstas la estructura armónica de la onda compuesta. Además, el intervalo mínimo está directamente relacionado con la frecuencia de latidos. Ya que cuanto menor sea el intervalo mínimo, menor será la frecuencia de latidos.

Por ejemplo, para acordes basados en A=440Hz, con $m = 1$ tendremos una frecuencia de latido de 26 Hz. Es decir, será muy fácil de distinguir. Para $m = 2$ ya la frecuencia de latidos es de 54 Hz. Por lo tanto, supone una gran diferencia. También tenemos otro factor que hace de esta clasificación algo interesante. Este factor, es más bien psicológico. Esto se debe a que los acordes con valores pequeños de m inspiran sensaciones de tensión o suspenso habitualmente.

Para calcular la fórmula $I(L, n, m)$ consideremos las siguientes cadenas como subconjuntos del collar que forma el acorde. Una formada por 1 cuenta negra (nota que usamos) seguida de m-1 cuentas blancas. La llamaremos (b). Y otra formada por una cuenta blanca al que denominaremos (w). Estas cadenas tienen la siguiente forma:



Como nuestro collar debe tener n cuentas negras, entonces debemos tener esta cantidad de cadenas del tipo (b). Es decir, que tendremos nm cuentas. Por lo tanto deducimos que habrá $L - nm$ cadenas del tipo (w). Por lo tanto, tendremos un total de $L - nm + n = L - n(m - 1)$ cadenas. El punto clave está en que ninguna cadena (b) es isomorfa a una del tipo (w). Por lo tanto, el nº de collares distintos (es decir, el de acordes), es igual al nº de collares distintos que podemos formar con cada una de estas cadenas. Con lo cual, obtenemos que

$$I(L, n, m) = N(L - n(m - 1), n)$$

Obviamente, $I(L, n, m) = 0$ si $nm > L$.

Con esta fórmula, es inmediato calcular, por ejemplo, $I(12, *, 2) = 30$. Es decir, que sólo tenemos 30 acordes con intervalo mínimo de al menos 2. Justamente, estos 30 acordes son los que se suelen usar más habitualmente. Lo cual es llamativo, ya que representan sólo el 9 % aproximadamente del total de acordes. Incluso, de este número todavía podemos quitar más acordes. Ya que podemos intentar quedarnos con los que sean "musicalmente distintos"si quitamos los triviales y los que son subcojuntos de otros. Bajo estas condiciones, ¡Nos quedan sólo 12 acordes! En la siguiente tabla, los tenemos identificados para $L = 12$ y clave de C.

Partición	Acorden en Do	Descripción
4 3 5	C E G	Mayor
4 3 3 2	C E G Bb	Séptima
4 3 2 3	C E G A	Sexta
2 2 3 3 2	C D E G Bb	Novena
2 2 3 2 3	C D E G A	Sexta sumada a 9^{na}
5 2 5	C F G	Acorde sostenido
3 4 5	C Eb G	Menor
3 4 2 3	C Eb G A	Sexta menor
3 2 2 5	C Eb F G	Onceaba menor
3 3 3 3	C Eb F# A	Disminuído
4 4 4	C E G	Aumentado
2 2 2 2 2	C D E F# Ab Bb	Todo el tono

Si queremos calcular el nº de acordes con intervalo mínimo exactamente igual a m, le podemos asociar la función $K(L,n,m)$ y simplemente es

$$K(L,n,m) = I(L,n,m) - I(L,n,m-1)$$

Nuevamente, un simple cálculo nos da que $K(12,*,1) = 321$ (los que contienen un semitono de intervalo). En la siguiente sección los estudiaremos con mayor detalle.

3.3. Análisis de adyacencias

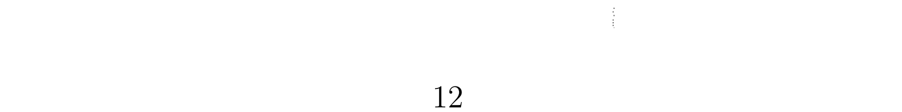
Definimos la función $A(L,n,a)$ que contará el nº de acordes de n notas en una escala de L notas y que tienen exactamente a adyacencias. Esta fórmula tiene diversas aplicaciones para el análisis y composición de música. Ya que, en cierto modo, los estaremos clasificando de acuerdo a su *rareza"* ya que justamente esa es la sensación que producen estos sonidos; y ésta aumenta con las adyacencias. Para valores bajos de a obtendremos armonías más bien tradicionales. En cambio, para valores grandes conseguiremos sonidos más típicos en la música actual.

Teniendo en cuenta este último detalle, podríamos elaborar una especie de clasificación de la música de acuerdo al valor medio del parámetro a.

- $a = 0$. La mayor parte de la música del período Clásico cumple esta condición.
- $a \to 0$. Cuando el valor medio de a está próximo a 0, ya nos encontramos principalmente con obras del período Romántico.
- $a \to 1$. Las piezas de Jazz tradicional satisfacen estos valores de a.
- $a > 1$. Son trabajos de Jazz experimental o música moderna. Pero tampoco es muy común.

Una observación interesante es que debido a la equivalencia de octavas, podemos deducir que $a \leq 12$. Por lo tanto, encontrar obras con $a \geq 5$ es realmente sorprendente.

Para simplificar el cálculo de $A(L,n,a)$, comenzaremos imponiendo que $a = 1$. Nuevamente volvemos a plantear las estructuras de las cadenas que forman parte de nuestro collar. En este caso tendremos 3 tipos de cadenas:



La primera tiene 1 adyacencia. Y el resto no. Por lo tanto nuestro collar se puede crear con estas 3 cadenas. Utilizando exactamente una de cada tipo. Para abreviar, las denominaremos (1),(2) y (3) respectivamente. Por lo tanto, el collar tendrá 1 del tipo (1), y n-2 del tipo (2) para cumplir la condición de las n notas. Por lo tanto, del tipo (3) tendremos

$$L - \#(1) - (n-2)\#(2) = L - 3 - 2\ (n-2) = L - 2n + 1$$

Entonces, nos queda que en total el collar tendrá un tamaño de

$$1 + n - 2 + L - 2n + 1 = L - n$$

Como tenemos 3 tipos de cadenas diferentes, podemos asociarles 3 colores diferentes. De este modo, deducimos que

$$A(L, n, 1) = N(L - n, 1, n - 2, L - 2n + 1)$$

Aplicando la fórmula vista en la introducción, tenemos que encontrar d que divida a $(1, n-2, L-2n+1) \Rightarrow d = 1$. Entonces tendremos sólo un término en la suma y aplicando la fórmula de los coeficientes multinomiales tenemos que

$$A(L, n, 1) = \frac{1}{L-n}\frac{(L-n)!}{(n-2)!\ (L-2n+1)!} = \frac{(L-n-1)!}{(n-2)!\ (L-2n+1)!} = \binom{L-n-1}{n-2}$$

Al final conseguimos un coeficiente binomial ya que podemos pensar el problema fijando la posición de la adyacencia. Y luego trabajamos con las cadenas del tipo (2) y (3).

Observemos un hecho curioso. Si queremos calcular $A(L, *, 1) = \sum\limits_{n=2}^{[(L+1)/2]} \binom{L-n-1}{n-2} = \sum\limits_{i \geq 0} \binom{L-3-i}{i}$. Por lo tanto el valor que buscamos es la suma de la diagonal del triángulo de Pascal desde $\binom{L-3}{0}$. Llamemos $D(n)$ a esta suma si comienza en $L = n + 3$. Como a cada paso estamos restando una unidad arriba y agregamos 1 abajo en este nº binomial, y teniendo en cuenta que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Esto implica que $D(n) = D(n-1) + D(n-2)$. Como se cumple que $D(0) = D(1) = 1 \Rightarrow D(n)$ es el n-ésimo número de la secuencia de Fibonacci. Por lo tanto, podemos concluir que

$$A(L, *, 1 = D(L - 3)$$

Para $a = 2$ tenemos que la cadena de tipo (1) puede adoptar 2 formas distintas:

1

2

Si estamos en caso 1, entonces $\#(2) = n - 3 \Rightarrow \#(3) = L + 2(1 - n)$
Si estamos en el caso 2, tendremo que $\#(2) = n - 4 \Rightarrow \#(3) = L + 2(1 - n)$

Por lo tanto, aplicando un razonamiento como el del caso anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} A(L, n, 2) &= N(L - n, 1, n - 3, L + 2(1 - n)) + N(L - n, 2, n - 4, L + 2(1 - n)) \\ &= \binom{L-n-1}{n-3} + N(L - n, 2, n - 4, L + 2(1 - n)) \end{aligned}$$

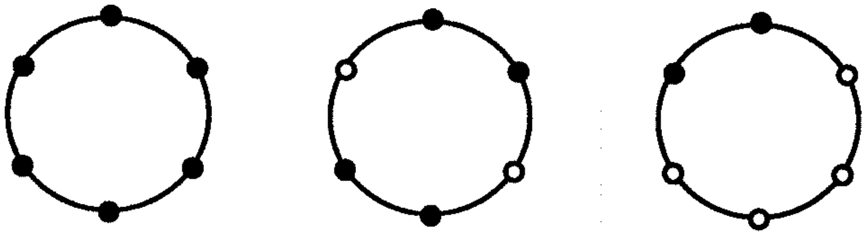
Del mismo modo podemos proceder para los demás valores de a.

3.4. Clasificación por períodos

<u>**Definición 3.10:**</u> Denominaremos como período al menor entero $P \geq 1$ para el cual dado un acorde, al transponerlo P notas queda invariable.

En el siguiente ejemplo podemos verlo más claramente.

Ejemplo: `En las siguientes figuras tenemos un collar de período 1, otro de 3 y el último de 6.`



Esto es interesante principalmente por su conexión con instrumentos de cuerda como la guitarra. Al tocar un acorde, presionamos las cuerdas de acuerdo a los trastes. El período, está relacionado con el movimiento de la mano hacia arriba o abajo del cuello sin cambiar la posición de los dedos. De este modo, estamos transponiendo el acorde. Por lo tanto es interesante sobre todo para valores pequeños de P.

Por lo tanto, definimos la función $P(L, n, p)$ que cuenta el nº de acordes de n notas, en una escala de L notas y con período exactamente p. La calcularemos recursivamente. Primero, contamos los collares de período $d \leq p$ tal que $d|p$; incluyendo las distintas permutaciones cíclicas. Luego le restamos los de período estrictamente menor que p. y las correspondientes permutaciones. Ahora sólo nos resta descartar las permutaciones cíclicas de los collares de período p, pero esto es simplemente dividir por p ya que justamente cada collar aparecerá p veces.

Los collares que queremos contar, están formados por una cadena de longitud p que se va repitiendo. En total, tenemos $\frac{L}{p}$ de estas cadenas. Como el acorde tiene n notas, entonces cada cadena tiene $\frac{np}{L}$ cuentas negras. Aplicando los resultados anterior, tenemos que en total habrá

$$\binom{p}{np/L} \text{ de estos collares}$$

Para cada posible período d tendremos $P(L, n, d)$ collares dstintos. Si contamos las permutaciones cíclicas, entonces serán $dP(L, n, d)$. Por lo tanto, aplicando el procedimiento comentado anteriormente obtenemos

$$P(L, n, p) = \frac{1}{p}\left(\binom{p}{np/L} - \sum_{L/d|n, d|p} dP(L, n, d)\right]$$

Con $P(L, n, L/n) = 1$ y $P(L, n, p) = 0$ si $p \not| L$ o $\frac{L}{p} \not| n$.

Observemos que si $(L, n) = 1$ entonces todas las sumas son nulas ya que no tedremos d que satisfagan las condiciones. Esto implica que $P(L, n, p) = 0$. También es interesante que debido a la simetría de los coeficientes binomiales, se cumple que

$$P(L, n, p) = P(L, L - n, p)$$

3.5. Análisis de intervalos máximos

Así como estudiamos los intervalos mínimos, podemos hacer algo similar con los máximos.

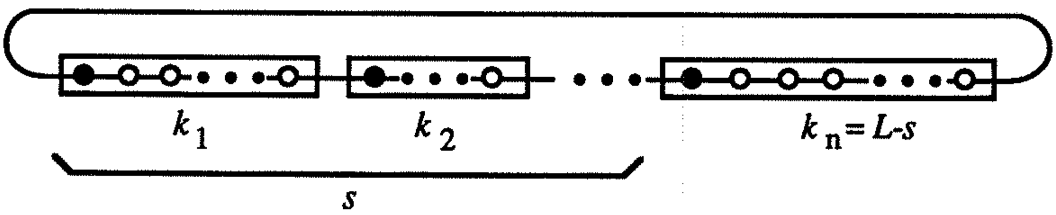
Definición 3.11: La envergadura de un acorde de notas $\{m_1, \ldots, m_n\}$ tal que $m_1 < \ldots < m_n$ es equivalente a $m_n - m_1$. Es decir, son los semitonos que separan a la nota más baja de la más alta.

Como las inversiones de un mismo acorde son isomorfas, en realidad nos interesa la inversión de envergadura mínima. Esto es interesante para por ejemplo, tocar el piano. Ya que la envergadura está relacionada con la anchura que debemos cubrir con nuestras manos al tocar el acorde. Por lo tanto, los acordes de gran envergadura serán un poco más complicados de interpretar. Para $L = 12$,tenemos que por definición la envergadura puede ser como mucho 11.

Teniendo en cuenta que la envergadura se define como la mínima envergadura de cualquier inversión del acorde, éste no puede contener un intervalo mayor que $L - s$. Si no fuese así, podríamos rotar el acorde poniendo este intervalo al final del mismo, y por lo tanto tendríamos una envergadura menor que la de antes. Lo cual contradice la definición. Por lo tanto, podemos deducir que

El nº de acordes de n notas con envergadura s es igual al nº de acordes de n notas con intervalo máximo $L - S$

Definimos la función $S(L, n, s)$ que cuenta el nº de acordes con envergadura igual a s. Dado un collar cualquiera de L notas y envergadura s, podemos rotarlo hasta conseguir que quede del siguiente modo



Es decir, las cuentas negras ocupando las primeras $s + 1$ posiciones. Ahora construímos n cadenas comenzando con una cuenta negra y agregándole $k_i - 1$ blancas. Entonces tendremos que $\sum_{i=1}^{n-1} = s$ por definición. Esto implica que $k_n = L - s$.

Si a cada cadena le asignamos un color, sea $\Gamma(r)$ la cantidad de cadenas de color r. Entonces el cardinal de collares que contienen estas cadenas es

$$N(n, \Gamma(1), \ldots, \Gamma(n))$$

Esta es simplemente la fórmula que cuenta collares. Como estas cadenas no son isomorfas, entonces esta fórmula nos da el cardinal que buscamos.

Como debemos considerar todos los posibles k_i y se cumple que $\sum_{i=1}^{n} k_i = L$. Para contar todos los collares debemos tener en cuenta la partición de L en n partes. Es más, sabemos que $k_i \leq L - s$ por la definición de envergadura. Teniendo esto en cuenta, llegamos a la siguiente fórmula

$$S(L, n, s) = \sum_{k_1 + \ldots k_n = L} N(n, \Phi(1), \ldots, \Phi(n))$$

donde al menos un $k_i = 12 - s$ y $\Phi(r)$ es el nº de r's en el conjunto $\{k_1, \ldots, k_n\}$.

Tenemos una conexión entre la envergadura y el intervalo mínimo. La relación es la siguiente

$$S(12, n, 10) = I(12, 12 - n, 2)$$

Ya que un acorde con envergadura 10 no puede tener 2 notas consecutivas sin usar. Si fuese así, podríamos rotarlo hasta conseguir que éstas fueran al final del acorde, entonces la envergadura sería menor que 10. Si consideramos el "dual"de este acorde, es decir, cambiamos cuentas blancas por negras y viceversa; obtenemos un acorde de $12 - n$ notas sin 2 notas consecutivas.

En general, se cumple que

$$S(L, n, L - 2) = I(L, L - n, 2) = A(L, L - n, 0)$$

La tercera igualdad es trivial ya que si el intervalo mínimo es ≥ 2, entonces no hay adyacencias.

3.6. Acordes elegantes

Una forma musicalmente más útil de analizar los intervalos de un acorde es notando que, cuando tocamos un acorde de n notas, en realidad tenemos $\binom{n}{2}$ intervalos presentes. Ya que el sonido de un acorde está influenciado por todos los intervalos de todas las notas. Esto nos permite

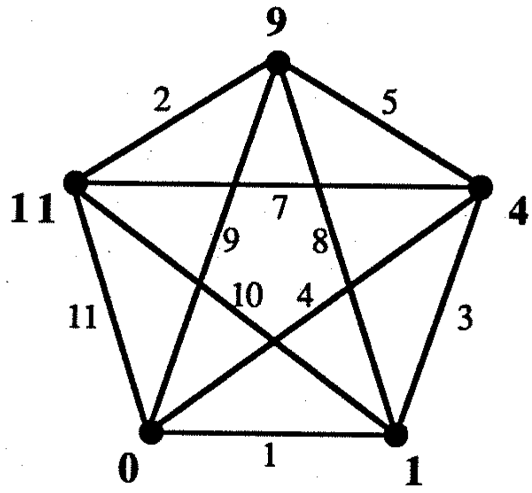
Definición 3.12: El conjunto de intervalos completo de un acorde que consiste de las notas $\{m_1, \ldots, m_n\}$ tales que $m_1 < \ldots < m_n$, es el conjunto de valores $m_i - m_j$ para $i > j$.

Lo que nos interesa es la variedad de un acorde, la cual viene dada por el nº de distintos intervalos de este conjunto. Denominaremos a esta función como $V(L, n, v)$. De modo que L son la cantidad de notas de la escala, n las del acorde y v la cantidad de intervalos diferentes en el conjunto de intervalos completo. Podríamos decir que el valor de esta función está relacionado con la *riqueza"* del acorde.

Para calcular esta función, miraremos un problema clásico de teoría de grafos: "La enumeración elegante de grafos".

Definición 3.13: Dado un grafo $G(V, E)$ tal que $|E| = m$, diremos que G es elegante si existe una inyección $\begin{array}{ccc} V & \to & \{1, 2, \ldots, m\} \\ |x - y| & \mapsto & j \end{array}$ tal que $x \neq y$ y $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$

Aquí tenemos un ejemplo para K_5. El grafo completo de 5 vértices (todos los vértices relacionados con todos):



La cuestión es encontrar el valor mínimo de aristas y el mayor de vértices que nos permitan etiquetar elegantemente. Sea N este número; entonces es evidente que $N \geq m$ ya que sino el principio del palomar nos garantiza que no se cumplirá la condición. El problema está en que habitualmente no se puede alcanzar esta cota inferior.

Esta estructura se relaciona con nuestros acordes ya que los vértices representan a las notas y las aristas etiquetadas a los intervalos. Por lo tanto, la relación entre los 2 problemas ahora es obvia. Como tenemos $\binom{n}{2}$ intervalos, estamos buscando la numeración elegante de K_n ya que justamente en este caso $m = \binom{n}{2}$. En una escala de tamaño L, el mayor número de notas posibles es $L - 1$. Por lo tanto se debe cumplir que $N < L$. En la siguiente tabla tenemos los valores de N para distintos K_n

$n:$	2	3	4	5	6	7	8
$N:$	1	3	6	11	17	25	34

Podemos ver que $N < 12 \Rightarrow n \leq 5$. Cabe destacar que este problema es realmente complicado y no hay fórmulas explícitas para calcular estos cardinales.

IV. Tone-rows

En esta sección cambiamos radicalmente nuestro enfoca para analizar la relación entre la combinatoria y la música tonal. Estos es, secuencias de n notas de diferente altura sin repetirlas. A pesar de que durante el curso se ha estudiado la música dodecatonal, y ésta es la más común, los resultados expuestos a continuación son puramente matemáticos. Por lo tanto se pueden aplicar a escalas de un número arbitrario de notas.

<u>Definición 4.14:</u> Sea $n \geq 3$. Una tone-row en una escala de n notas es una aplicación biyectiva $f: \begin{array}{ccc} \{0,1,\dots,n-1\} & \to & \mathbb{Z}_n \\ i & \mapsto & f(i) \end{array}$ tal que $f(i)$ es el tono que suena en la i-ésima posición de la tone-row.

<u>Definición 4.15:</u> Sea $n \geq 3,\ 2 \leq k \leq n$. Una k-fila en música n-tonal es una aplicación inyectiva $f: \{0,1,\dots,n-1\} \to \mathbb{Z}_n$. Por lo tanto, si $k = n$ se trata de una tone-row.

Intentaremos aplicar el teorema de Pólya para obtener algunos cardinales de patrones. En primer lugar, observemos que:

- 2 k-filas f_1, f_2 son equivalentes si f_1 se puede escribir como transposición, inversión, retrogradación o cualquier combinación de éstas sobre f_2. Tanto la transposición T, como la inversión I son permutaciones sobre $\mathbb{Z}_n$. Y $\langle T, I\rangle$ es un grupo diedral. Por lo tanto, podemos definir la retrogradación como:

$$R = \begin{cases} (0,k-1)\circ(1,k-2)\circ\cdots\circ\left(\frac{k}{2}-1,\frac{k}{2}\right) & \text{si } k \equiv 0 \mod 2 \\ (0,k-1)\circ(1,k-2)\circ\cdots\circ\left(\frac{k-3}{2},\frac{k+1}{2}\right)\circ\left(\frac{k-1}{2}\right) & \text{si } k \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$

  Por lo tanto, $|\,\langle R\rangle\,| = 2$

- Sea $\Pi = \langle R\rangle$, entonces

$$P(\Pi; y_1, y_2, \dots, y_k) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y_1^k + y_2^{\frac{k}{2}}) & \text{si } k \equiv 0 \mod 2 \\ \frac{1}{2}(y_1^k + y_1 y_2^{\frac{k-1}{2}}) & \text{si } k \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de Pólya, tenemos que el nº de patrones de k-filas es:

1. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left((2)_k + 2^{\frac{k}{2}}\frac{k}{2}!\left(\binom{n/2}{k/2}+\binom{(n-2)/2}{k/2}\right)\right)\frac{1}{2n}\left(\binom{n}{k}k! + 2^{\frac{k}{2}}\frac{k}{2}!\binom{n/2}{k/2}\right)\right)$ para $n \equiv 0 \mod 2$ y $k \equiv 0 \mod 2$. Y donde $(n)_k = \prod_{j=0}^{k-1} n - j$
2. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}2\ 2^{\frac{k-1}{2}}\binom{(n-2)/2}{(k-1)/2}\frac{k-1}{2}! + \frac{1}{2n}\binom{n}{k}k!\right)$ para $n \equiv 0 \mod 2$ y $k \equiv 1 \mod 2$.

También podemos calcular el nº de patrones de tone-rows. Sea $n \geq 3$. Entonces el nº de patrones de tone-rows en música n-tonal es

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{4}\left((n-1)! + (n-1)!!\right) & \text{si } n \equiv 1 \mod 2 \\ \frac{1}{4}\left((n-1)! + (n-2)!!\left(\frac{n}{2}+1\right)\right) & \text{si } n \equiv 0 \mod 2 \end{array}$$

donde $n!! = \begin{array}{ll} n(n-2)\cdots 2 & \text{si } n \equiv 0 \mod 2 \\ n(n-2)\cdots 1 & \text{si } n \equiv 1 \mod 2 \end{array}$

Bibliografía

[1] H. Fripertinger. Enumeration in musical theory. 1992, Disponible online en http://www.kfunigraz.ac.at/ fripert/

[2] M. Keith. *From Polychords to Pólya, Adventures in Musical Combinatorics.* Vinculum Press, 1991.

[3] P. Bravo, J.C. Ferrando. *Complementos de matemática discreta: curso práctico.* Universidad Politécnica de Valencia.

[4] G. S. Singh. *Graph Theory.* Asoke K. Ghosh, 2010.

[5] D. Benson. *Music: A Mathematical Offering.* University of Aberdeen, 2008.