

Vibracions al pont d'un violoncel

Gil Serrancolí Masferrer

Música i Matemàtiques

Desembre 2007

Índex

1. Introducció.....	2
2. Representació física del pont d'un violoncel.....	2
3. Estudi cinemàtic del pont.....	6
3.1 <i>Equacions de Lagrange</i>	7
4. Models experimentals per determinar les vibracions.....	12
4.1 <i>Holografia</i>	12
4.2 <i>Utilitzant sensors</i>	12
5. Conclusions.....	14
6. Bibliografia.....	14

1. Introducció

La utilitat de la caixa de ressonància d'un determinat instrument de corda és òbvia, transmetre i amplificar el so cap a l'exterior, tot i així la seva interpretació no és del tot fàcil.

Però i la del pont? Una simple part de fusta que no té cavitats volumètriques, com pot transmetre el so? Què s'hi produeix al pont per tal que les vibracions puguin ser transmeses sense cap dispositiu electrònic?

Totes aquestes preguntes s'intenten contestar en aquest estudi de les vibracions d'un pont de violoncel.

2. Representació física del pont d'un violoncel

El pont s'encarrega principalment de transmetre la força transversal de la corda, produïda per la vibració de la corda al passar l'arc a la caixa de ressonància.

Aquesta pressió, que és de l'ordre dels 10 kp, és transmesa pel pont cap a la caixa de ressonància, encarregada d'irradiar el so a l'aire; ho aconsegueix gràcies a la barra harmònica (*bass bar*) que transmet les vibracions a la tapa superior i de l'ànima (*soundpost*) que les transmet a la tapa inferior. A l'esquema de la fig. 1 es poden veure aquestes parts.

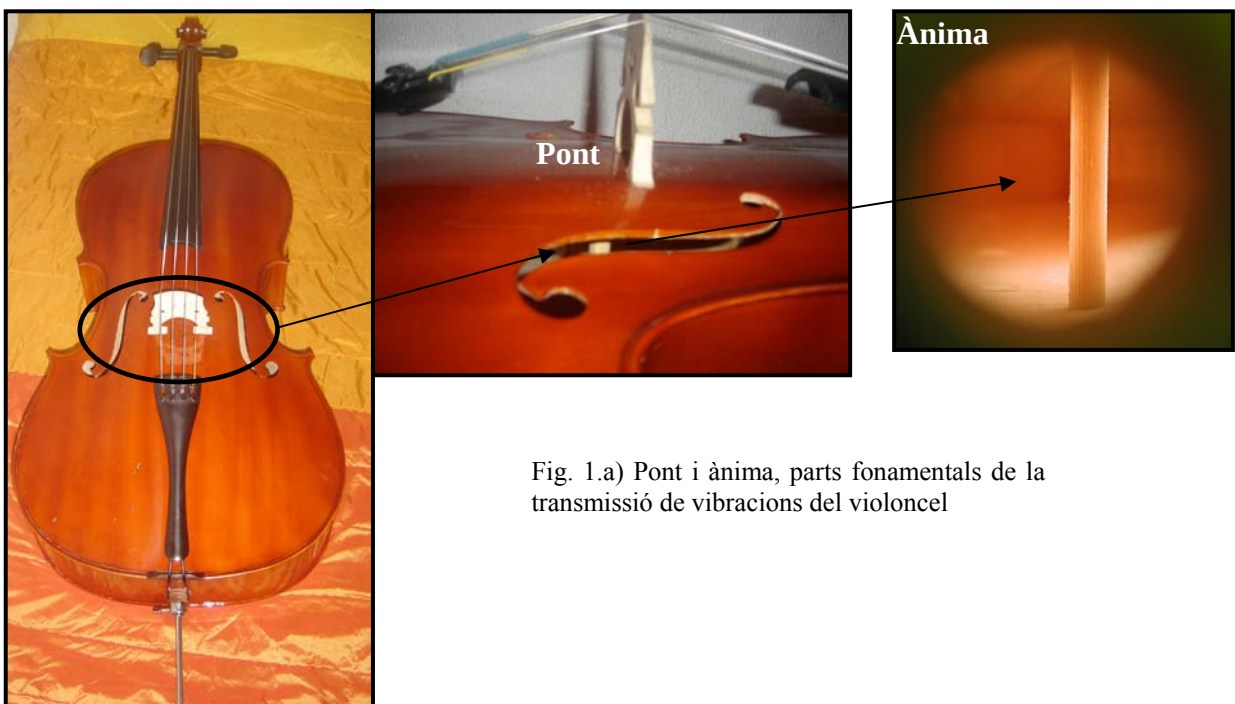


Fig. 1.a) Pont i ànima, parts fonamentals de la transmissió de vibracions del violoncel

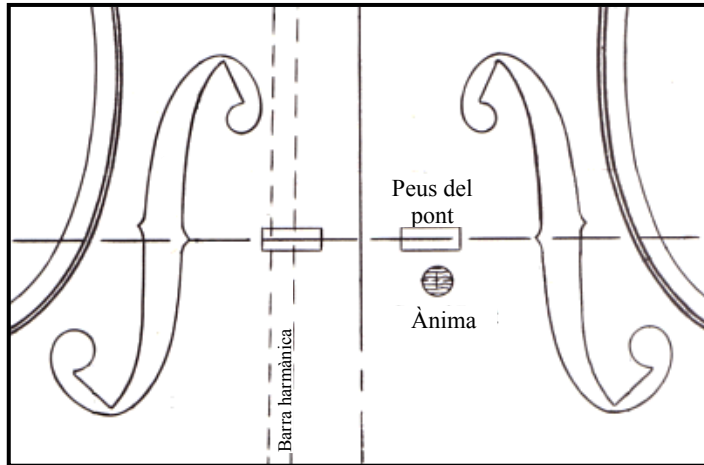


Fig. 1.b) La barra harmònica (barra de fusta), està situada a sota el peu esquerre del pont, dins la caixa de ressonància; sota les cordes greus. I l'ànima, sota el peu dret, costat on hi ha les cordes agudes.

Tant l'ànima del violoncel·le com el pont s'aguanten i mantenen la posició per fricció, això els permet transmetre les vibracions. Un petit moviment pot canviar la sonoritat de l'instrument. Per exemple, si es mou l'ànima cap amunt, en direcció el batidor el so serà més brillant i fort, i si es desplaça a la dreta, cap a l'exterior, també serà més brillant però el so empitjorarà per les baixes freqüències. Aquests canvis es poden produir en variacions de 0,5 a 1 mm; així és que la millor construcció necessitarà una bona oïda del luthier.

Tornant a l'objecte del treball, tant l'estètica com la funcionalitat del pont en determinen la seva forma.(fig. 2)

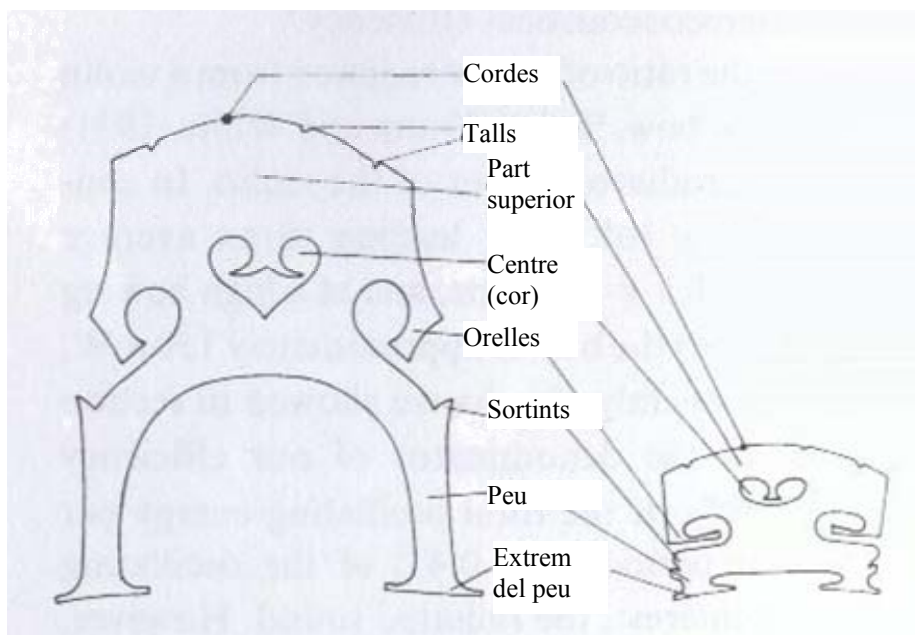
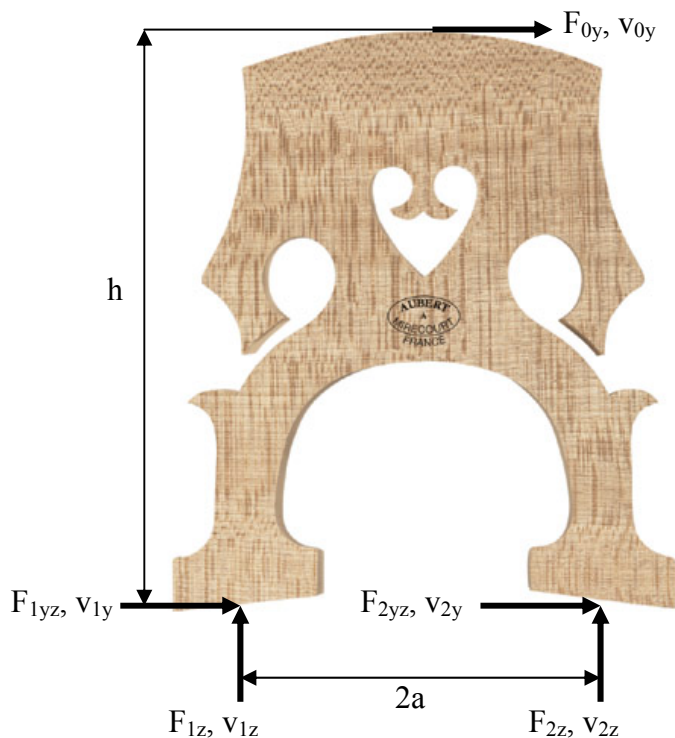


Fig. 2. A l'esquerra, pont d'un violoncel·le, i a la dreta pont d'un violí

La diferència més gran d'un pont de violoncel amb el d'un violí és la llargada de les “comes” i és deguda a la diferent manera de tocar per les diferències òbvies de tamany. Per exemple, un pont de violí en un violoncel impediria tocar les cordes extremes (Do i La) i un pont de violoncel en un de violí seria molt incòmode.

Tal com es pot veure al següent apartat, les “comes” del pont són les encarregades d'enllaçar les vibracions del pont a la caixa. L'amplada de les “comes” depèn de l'amplada de la caixa de ressonància, ja que la superfície inferior del pont s'ha de recolzar a la perfecció amb la caixa de ressonància per transmetre eficaçment les vibracions.

Per aquesta raó a l'hora de fer un anàlisis sobre el comportament del pont es tenen en compte principalment tres punts del pont, representats a la fig. 3.



Es pot veure que els contactes de la corda al pont s'aproximen a un punt, per una velocitat i una força; aquesta força (F_y) és la que és transmesa per l'arc del violoncel·lista a la corda que arriba al pont pel contacte als talls de la seva part superior. Per estudiar a les freqüències a què treballa el pont aquesta simplificació d'assignar tots els contactes de les cordes amb un punt és suficient.

Una força de l'arc paral·lela al pont permetrà dominar les diferències d'intensitat del so, sinó és així serà estrident i irregular, fet característic d'un instrumentista de corda principiant.

El contacte del pont amb la tapa superior és representat com dos punts, un per cada peu, on es tenen en compte les forces que s'hi produeixen i les velocitats verticals, que seran les encarregades de repercutir les vibracions a la tapa superior.

Aplicant les equacions de l'estàtica en sentit vertical, es troba que les dues forces verticals dels dos peus en cada moment seran iguals i de sentit contrari (si es negligeix l'acceleració del centre de gravetat).

$$\sum F_v = 0 \quad F_{1z} = -F_{2z} \quad (1 \text{ a,b})$$

i per sumatori de moments igual a 0:

$$\sum M = 0 \quad F_{1z} = -F_{2z} = F_{0y} \frac{h}{2a} \quad (2 \text{ a,b})$$

Llavors es pot descriure una matriu que relaciona les forces amb les velocitats:

$$\begin{pmatrix} F_y \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{yy} & Z_{y1} & Z_{y2} \\ Z_{1y} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{2y} & Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_y \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{yy} & -Z_{y2} & Z_{y2} \\ -Z_{y2} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{y2} & Z_{12} & Z_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_y \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Els termes representats com a Z , s'anomenen impedàncies, en aquest cas són impedàncies mecàniques, que relacionen les forces aplicades a un sistema (pont) amb les velocitats dels seus punts. És la propietat que descriu el comportament del cos envers les vibracions.

Com que el sistema es considera lineal els termes de les impedàncies que relacionen les velocitats dels peus amb la força es poden considerar iguals ($Z_{12}=Z_{21}$, $Z_{y1}=Z_{1y}$, $Z_{y2}=Z_{2y}$, $Z_{11}=Z_{22}$) pel fet que és simètric i les impedàncies entre el peu 1 amb la del 2 són de signe contrari ($Z_{y1} = -Z_{y2}$). En realitat el pont no és del tot de simètric, ja que per les cordes greus (menys freqüència) el do i el sol, necessiten estar més separades del batidor, perquè són més gruixudes, i també és millor pel fet que les vibracions són més "robustes", a freqüències més baixes.

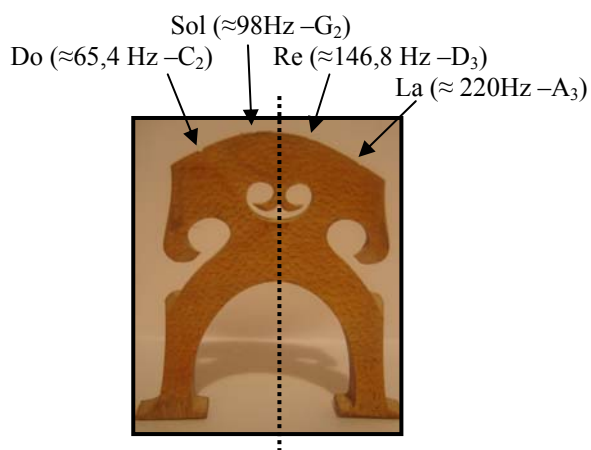


Fig. 4 Il·lustració on es veu que la part superior del pont no és del tot simètrica

A la figura 4 es pot comprovar l'asimetria de la part superior del pont de violoncel.

Eggers (1959) i principalment Steinkopf (1963) es van dedicar a mesurar aquestes impedàncies, en un pont de violoncel.

Per construir correctament un pont cal saber com es comporten les

deformacions en ell, per captar-les s'han utilitzat mecanismes hologràfics, on s'utilitzen rajos làser que en ser aturats per l'objecte incideixen sobre una capa fotogràfica i d'aquesta manera es poden captar els moviments.

Però un model molt interessant per estudiar les vibracions al pont d'un violoncel va ser el que va plantejar Zimmermann (1967), on es basava amb l'estudi cinemàtic del pont en qüestió.

3. Estudi cinemàtic del pont

Des de ja fa unes desenes d'anys l'evolució del violoncel ha portat a conèixer el pont del violoncel tal com el coneixem ara, tot i que és dubtós que en un principi es tingués un rigorós coneixement de la seva precisió de funcionament, com moltes coses, ha evolucionat a partir de la pròpia experiència. Tot i així la mecànica i la matemàtica ha ajudat a entendre el seu comportament envers les vibracions.

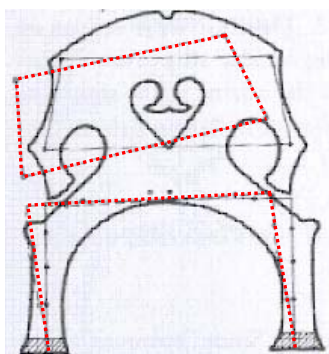


Fig. 4 Simplificació del model cinemàtic

Zimmermann el 1967 va simplificar el moviment del pont amb dos graus de llibertat, el moviment de la part superior i la part inferior del pont, on la superior conté els suports de les cordes i el cor, i a la part inferior les cames.

A la figura 4 es pot veure la simplificació del model cinemàtic, considerant els peus del pont rígids i que vibra com si estigués compost de dos blocs.

Cal tenir en compte que s'estan considerant els desplaçaments com a infinitèsims.

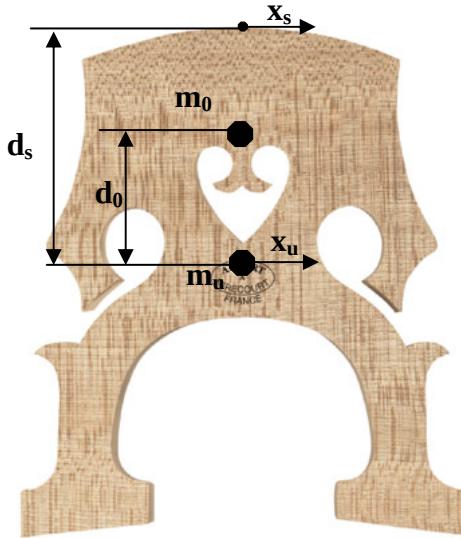


Fig. 5. Representació estructural del pont, útil per fer l'estudi cinemàtic.

La millor manera d'estudiar les vibracions en casos com aquest és definir centres de massa i les seves inèrcies (fig. 5). La coordenada x_s és la coordenada local que permetrà trobar el què es desvia horitzontalment els suports de les cordes. Com que el sistema es descriu amb dos graus de llibertat (fig. 2), es defineix una segona coordenada independent, x_u .

Lavors es procedeix a estudiar el sistema a partir de la resolució de les equacions de Lagrange.

3.1 Equacions de Lagrange

Les denominades equacions de Lagrange s'utilitzen a la mecànica per trobar equacions del moviment. La seva aplicació en el camp de l'acústica pot representar atípica però serà molt útil en aquest cas.

La seva definició és força complexa, a continuació s'explicarà el més breu possible.

Es basen en el fet que en un cos, la suma de les potències virtuals s'anul·la.

$$\sum_{sist} \dot{W}^* = \sum_{sist} \mathcal{F} \cdot v^* + \sum_{sist} F \cdot v^* = 0 \quad (4)$$

On $\mathcal{F}$ són les forces d'inèrcia, i F representen les forces d'interacció, les quals es poden dividir amb les que són conservatives i amb les que no; i les v^* són les velocitats virtuals.

Com que per definició les forces d'inèrcia són:

$$\mathcal{F} = -\sum m \cdot a \quad (5)$$

i la velocitat és la derivada temporal d'una distància:

$$v = \frac{d}{dt} \cdot \overline{OP} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \overline{OP}}{\partial q_i} \right) \cdot \dot{q}_i \xrightarrow{\text{equiv. a:}} \frac{\partial \overline{OP}}{\partial q_i} = \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_i} \quad (6)$$

On q_i són les diferents coordenades generalitzades.

Operant també s'obté: $\frac{\partial v}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{OP}}{\partial q_i}$ (7)

si s'anomena llavors $\mathcal{F}^*$ a la potència virtual feta per $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^* &= - \sum_{sist} m \cdot a \cdot \frac{\partial \overline{OP}}{\partial q_i} = - \sum_{sist} m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{OP}}{\partial q_i} = - \left[\frac{d}{dt} \sum_{sist} m \cdot v \cdot \frac{\partial \overline{OP}}{\partial q_i} - \sum_{sist} m \cdot v \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{OP}}{\partial q_i} \right] = \\ &\xrightarrow{\text{per 6 i 7:}} - \left[\frac{d}{dt} \sum_{sist} m \cdot v \cdot \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{sist} m \cdot v \cdot \frac{\partial v}{\partial q_i} \right] = - \left[\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{sist} m \cdot v^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{sist} m \cdot v^2 \right) \right] = \\ &= - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (8) \end{aligned}$$

I pel què fa a les potències virtuals referides a les forces conservatives, com que és conegut que les forces conservatives deriven de potencial escalar ($F_{cons} = \text{grad } V$):

$$F_{cons}^* = - \frac{\partial U(q_i)}{\partial q_i} \quad (9)$$

Tornant a l'eq. 4, si s'acaba anomenant F_i^* a les forces d'interacció exteriors que no són conservatives, s'arriba a l'expressió general de les anomenades equacions de Lagrange:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i^*} \quad (10)$$

Vist breument la definició de les equacions de Lagrange ja es pot avançar en el seu estudi. Abans però, s'han de trobar les expressions de l'energia cinètica i potencial del sistema.

NOTA: la velocitat del centre de masses m_0 , es troba formulant:

$$\dot{x}_s = \dot{x}_u + \omega d_s \quad (11)$$

on ω és la velocitat angular de la part superior del pont, llavors es troba que :

$$\omega = \frac{\dot{x}_s - \dot{x}_u}{d_s} \quad (12)$$

i que:

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_u + \omega \cdot d_0 = \dot{x}_u + \frac{d_0}{d_s} (\dot{x}_s - \dot{x}_u) \quad (13)$$

L'expressió de l'energia cinètica és:

$$T(G) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v(G)^2 + \frac{1}{2} \cdot I(G) \cdot \omega^2 \quad (14)$$

i per tant, aplicant les dades del sistema quedarà:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m_u \cdot \dot{x}_u^2}_{\text{corresponent a la part superior}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot \left(\dot{x}_u + \frac{d_0}{d_s} (\dot{x}_s - \dot{x}_u) \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot \left(\frac{i_0}{d_s} \right) \cdot (\dot{x}_s - \dot{x}_u)^2}_{\text{corresponent a la part inferior}} \quad (15)$$

on i_0 és el radi d'inèrcia del moviment de la part superior.

L'expressió de l'energia potencial és:

$$U(G) = \frac{1}{2} \cdot s \cdot x(G)^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot \omega^2 \quad (16)$$

on, s és la rigidesa horitzontal i D la torsional, llavors es té:

$$U = \frac{1}{2} \cdot s \cdot x_u^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{d_s^2} \cdot (x_s - x_u)^2 \quad (17)$$

Les equacions de Lagrange aplicades al sistema del pont del violoncel són:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \cancel{\frac{\partial T}{\partial x_i}} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i^* \quad (18)$$

on F_i és la força que s'introdueixen al sistema (F_{0y} – a la part superior-).

Com que:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_u} = m_u \dot{x}_u + m_0 \cdot \left(\dot{x}_u + \frac{d_0}{d_s} \cdot (\dot{x}_s - \dot{x}_u) \right) \cdot \left(1 - \frac{d_0}{d_s} \right) - \left(\frac{i_0}{d_s} \right)^2 \cdot m_0 \cdot (\dot{x}_s - \dot{x}_u) \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_u} \right) = m_u \cdot \ddot{x}_u + m_0 \cdot \left(1 - \frac{d_0}{d_s} \right) \cdot \left(\ddot{x}_u + \frac{d_0}{d_s} \cdot (\ddot{x}_s - \ddot{x}_u) \right) - \left(\frac{i_0}{d_s} \right)^2 \cdot m_0 \cdot (\ddot{x}_s - \ddot{x}_u) \quad (20)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_u} = s x_u - \frac{D}{d_s^2} \cdot (x_s - x_u) \quad (21)$$

S'arriba a:

$$\ddot{x}_u \cdot \left(m_u + m_0 \left(1 - \frac{d_0}{d_s} \right)^2 + m_0 \cdot \left(\frac{i_0}{d_s} \right)^2 \right) + \ddot{x}_s \left(m_0 \frac{d_0}{d_s} \cdot \left(1 - \frac{d_0}{d_s} \right) - m_0 \left(\frac{i_0}{d_s} \right)^2 \right) + s x_u - \frac{D}{d_s^2} \cdot (x_s - x_u) = F_{0y} \quad (22)$$

Procedint igual per a l'altra coordenada:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} = m_0 \cdot \left(\dot{x}_u + \frac{d_0}{d_s} \cdot (\dot{x}_s - \dot{x}_u) \right) \cdot \frac{d_0}{d_s} + m_0 \cdot \left(\frac{i_0}{d_s} \right)^2 \cdot (\dot{x}_s - \dot{x}_u) \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} \right) = m_0 \cdot \left(\ddot{x}_u + \frac{d_0}{d_s} \cdot (\ddot{x}_s - \ddot{x}_u) \right) \cdot \frac{d_0}{d_s} + m_0 \cdot \left(\frac{i_0}{d_s} \right)^2 \cdot (\ddot{x}_s - \ddot{x}_u) \quad (24)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_s} = \frac{D}{d_s^2} \cdot (x_s - x_u) \quad (25)$$

$$m_0 \cdot \ddot{x}_u \cdot \left(\frac{d_0}{d_s} - \left(\frac{d_0}{d_s} \right)^2 - \left(\frac{i_0}{d_s} \right)^2 \right) + m_0 \cdot \ddot{x}_s \cdot \left(\left(\frac{d_0}{d_s} \right)^2 + \left(\frac{i_0}{d_s} \right)^2 \right) + \frac{D}{d_s^2} \cdot (x_s - x_u) = 0 \quad (26)$$

Aquesta segona equació s'igual a 0 ja que a la coordenada x_u no s'hi associa cap força externa.

Ja s'ha esmentat que els desplaçaments es consideren infinitèsims, però a més, són vibracions que depenen del temps; la velocitat, desplaçament i acceleració en la forma polar s'escriuen:

$$\dot{x} = v \cdot e^{j\omega t}$$

$$x = \frac{v \cdot e^{j\omega t}}{j\omega} \text{ per simplificar: } x = \frac{v}{j\omega}$$

$$\ddot{x} = j\omega \cdot v \cdot e^{j\omega t} \text{ per simplificar: } \ddot{x} = j\omega \cdot v$$

aplicant aquest concepte i identificant les parts de les equacions anteriors com:

$$Z_{SU} = j\omega \cdot \left[m_0 \cdot \left(\left(\frac{d_0}{d_s} \right)^2 + \left(\frac{i_0}{d_s} \right)^2 - \left(\frac{d_0}{d_s} \right)^2 \right) \right] + \frac{D}{d_s^2 j\omega} \quad (27)$$

$$Z_{UU} = j\omega \cdot \left[m_u + m_0 \cdot \left(1 - \frac{d_0}{d_s} \right)^2 + m_0 \cdot \left(\frac{i_0}{d_s} \right)^2 \right] + \frac{s d_s^2 + D}{d_s^2 j\omega} \quad (28)$$

$$Z_{SS} = j\omega \cdot \left[\left(\frac{d_0}{d_s} \right)^2 + \left(\frac{i_0}{d_s} \right)^2 \right] + \frac{D}{d_s^2 j\omega} \quad (29)$$

Es poden simplificar les dues expressions generals com:

$$Z_{UU} \cdot v_u - Z_{SU} \cdot v_s = F_s \quad (30)$$

$$Z_{SS} \cdot v_s - Z_{SU} \cdot v_u = 0 \quad (31)$$

Substituint i aïllant les expressions anteriors s'arriba a la conclusió que:

$$\frac{F_s}{v_s} = Z_{YY} = \frac{Z_{UU} \cdot Z_{SS} - Z_{SU}^2}{Z_{SU}} \quad (32)$$

on Z_{YY} és la impedància que relaciona la velocitat amb la força aplicades a la part superior del pont, al contacte amb les cordes, ja que es consideren els peus rígids.

I tal com s'ha vist a l'apartat anterior (Eq. 3):

$$Z_{yy} \cdot v_s = F_{0y} \quad (33)$$

Concloent aquest estudi cinemàtic s'observa que quan $Z_{YY}=0$, la velocitat del punt superior del pont pot prendre qualsevol valor per una $F_{0y}=0$, entra en un moviment ressonant.

La freqüència d'aquest moviment ressonant es pot relacionar amb els paràmetres físics del pont; substituint a l'eq. 25 resulten dues freqüències ressonants:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{s}{m_0 + m_u}} \quad (34) \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D}{m_0(i_0^2 + d_0^2)}} \quad (35)$$

Els valors que se'n poden treure d'aquestes expressions són una molt bona aproximació dels valors calculats experimentalment, mitjançant tècniques apropiades.

Seguidament es procedeix a tenir valors quantitatius d'aquest resultat, substituint per valors reals, on les petites variacions de les magnituds de les dades entre diferents ponts no fan canviar significativament els resultats.

S'utilitzen dades orientatives d'un pont real amb unes masses de $m_0=5g$, $m_u=4g$ (el pont sencer sol pesar entre 7 i 9,5g), unes rigideses horitzontal i torsional de: $s = 3,6 \cdot 10^8 \text{ g} \cdot \text{s}^{-2}$, $D = 6,3 \cdot 10^9 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ (com més massa tingui el pont més gran seran aquests normalment), un radi d'inèrcia de $i_0=2,45\text{cm}$, i les distàncies representades a la figura 5 de: $d_0=1 \text{ cm}$ i $d_s=3\text{cm}$.

Substituint a les equacions 34 i 35 es troba que $\omega_1=6324 \text{ rad/s}$ i $\omega_2=13414 \text{ rad/s}$ que indiquen la velocitat en què es mou el punt superior del pont. Les freqüències que els corresponen són: $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1006 \text{ Hz}$ i $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 2135 \text{ Hz}$. Com es veurà al següent punt, són molt pròximes als valors calculats experimentalment.

4. Models experimentals per determinar les vibracions

Per verificar la certesa d'aquests càlculs s'haurien de corroborar experimentalment. Per la dificultat de recollir el material necessari i la precisió a l'hora de mesurar el treball conclou amb l'estudi físic-matemàtic del pont, i a continuació s'esmenten algunes tècniques experimentals per veure el comportament de les vibracions.

4.1 Holografia

Consisteix en veure els petits desplaçaments del pont quan aquest està vibrant.

L'holografia es basa en el fet que quan s'il·lumina un objecte amb un feix de llum, l'ona queda refractada, i hi ha ones de llum que queden desfasades. Mesurant aquesta refracció a l'incidir sobre el pont quan vibra es podrà saber quant s'ha deformat.

S'aconsegueix gràcies a que si s'il·lumina una capa fotogràfica aquesta pot rebre les ones tant les refractades com les que no i es podrà tenir una representació bidimensional del què s'ha deformat.

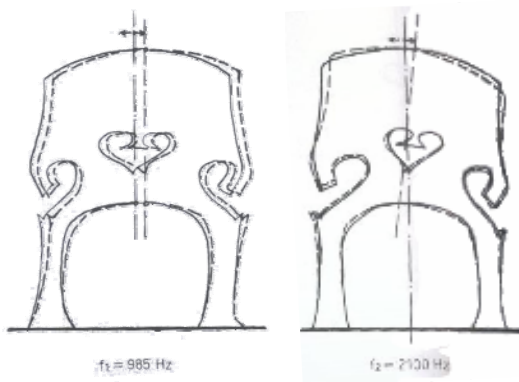


Fig. 6 Modes ressonants del pont del violoncel

Mitjançant aquest mètode es poden veure dos modes ressonants que té el pont. Les magnituds de la freqüència, òbviament depenen de les propietats del pont, tal com queda reflexat a les equacions 34 i 35.

4.2 Utilitzant sensors

Cal dir que en aquest cas el què es busca és la matriu d'admitàncies, que és la inversa de la matriu d'impedàncies.

$$V = Y \cdot F = Z^{-1} \cdot F = \begin{pmatrix} v_y \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{yy} & a_{y1} & a_{y2} \\ a_{1y} & a_{11} & a_{12} \\ a_{2y} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_y \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{yy} & a_{y2} & -a_{y2} \\ a_{y2} & a_{11} & -a_{12} \\ -a_{y2} & -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_y \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

S'han fet les mateixes suposicions que en l'eq. 3, on el pont es considera simètric

Connectant un peu del pont amb un camp magnètic d'un transductor electrodinàmic que sigui capaç de crear una força, (segons la figura 3 representaria la F_2), connectant la part superior del pont també en un camp magnètic que creï un voltatge induït i mesurant la velocitat en aquest punt superior (v_y), es podrà trobar el valor a_{y2} (fig. 7).

Per calcular la impedància, Z_{yy} , o la seva inversa (l'admitància a_{yy}), de la qual se n'ha obtingut la fórmula teòrica a l'anterior apartat (eq. 32), es pot procedir a excitar la part superior del pont, amb una força produïda mitjançant un camp magnètic i llegint la velocitat en aquest mateix punt. En aquest cas s'ha d'assegurar que v_1 i v_2 (les velocitats dels peus del pont siguin nul·les) (fig. 8).

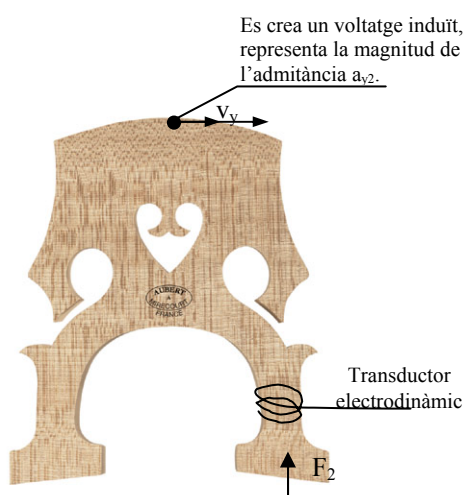


Fig. 7 Mètode experimental per calcular a_{y2}

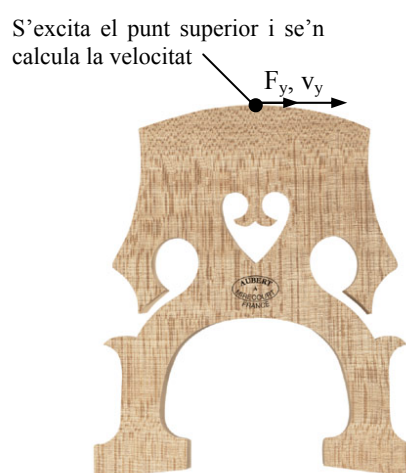


Fig. 8 Mètode experimental per calcular Z_{yy} . $v_1=v_2=0$

Aquests mètodes aplicats a ponts de violí i de violoncel, permeten veure que quan el pont està en ressonància, quan $Z_{yy}=0$, el pont de violí vibra a una freqüència 3 vegades més alta del què ho faria en un de violoncel. És a dir, si es toca la corda do (C2) del violoncel, que està a un extrem del pont; la corda que hi ha en el mateix extrem però en un pont de violí serà el Sol (G3) i la relació de les seves freqüències és 3:

$$\frac{f_{G3}}{f_{C2}} = \frac{196}{65,4} \approx 3 \quad (37)$$

Altrament dit, les freqüències ressonants en un pont de violí corresponen pels volts de 3000 Hz i 6000 Hz.

5- Conclusions

Les cordes no poden transmetre el so a l'aire per si soles, ja que no desplacen un volum d'aire prou gran perquè es pugui arribar a sentir el so plenament. Per això les vibracions necessiten ser transmeses a la caixa de ressonància mitjançant el pont, l'element estudiat.

Mitjançant les equacions de Lagrange s'ha pogut trobar matemàticament la impedància que relaciona la força amb la velocitat del punt de contacte amb les cordes. Bo hauria estat poder verificar els resultats experimentalment, però requereixen uns aparells específics de mesura de difícil abast. Tot i així, s'ha pogut veure que els resultats obtinguts s'adiuen força amb experiments ja realitzats.

Aquest camp de l'acústica és força complex, però no deixa de ser interessant. L'estudi realitzat només correspon a una petita part del conjunt de l'acústica del violoncel, ja que experiments semblants es poden fer amb la caixa de ressonància.