

La música del grup diedral

Marc Sabaté Vidales

18 de maig del 2009

[illegible]

Índex

1	Introducció	3
2	Teoria de grups	3
3	El T/I-grup	6
3.1	Classes de <i>pitches</i> i el grup $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$	6
3.2	Transposició i inversió	7
3.3	Fuga de Bach	7
3.4	Acords tríades majors i menors	8
4	El PLR-grup	10
4.1	Relació entre el PLR -grup i el T/I -grup	13
4.2	Un exemple, el PLR -grup i <i>Stand by me</i>	14
4.3	El PLR -grup i el tor: la novena simfonia de Beethoven	15
5	Conclusions	16
6	Referències	17
7	Annex	17

1 Introducció

Tal i com hem anat veient durant el curs, la música i les matemàtiques estan profundament relacionades: hem estudiat com vibra un corda o com vibra l'aire a través d'un tub, hem estudiat la teoria de la dissonància, la teoria d'escala... Tot i això, és evident que no existeix cap equació que doni un model d'una obra, o que pugui predir com seguirà una obra... Existeixen, però certes estructures matemàtiques inherents en les obres musicals, que no vénen donades per equacions matemàtiques. En efecte, la teoria de grups ens proporciona unes eines conceptuales que ens permeten entendre d'una altra manera algunes parts de peces musicals. Així, en aquest treball, estudiaré dos grups: el T/I -grup i el PLR -grup, tots dos grups diedrals d'ordre 24.

La teoria neo-Riemanniana és la que ens permet, a partir d'aquests dos grups, estudiar i classificar les operacions d'un acord a un altre. És a dir, estudiarem què passa quan passem d'un acord a un altre. Utilitzarem, però, uns acords determinats: el conjunt format pels acords tríades (de tres notes) majors i menors. Amb algun exemple veurem que, efectivament, gràcies a aquests dos grups podem donar una estructura tant a cançons modernes com a alguna obra clàssica; sobre tot destaca l'exemple de la novena simfonia de Beethoven, on es barregen tant la teoria de grups com la topologia, per identificar un fragment del segon moviment de la simfonia amb un camí sobre un tor.

2 Teoria de grups

En aquesta secció faré un breu resum de les diferents eines que necessitarem de la teoria de grups.

Definició: Un grup G és un conjunt on hi ha definida una operació $*$ amb

$$\begin{aligned} * : G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 * g_2 \end{aligned}$$

tal que:

- És associativa: $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$.
- Existeix un element $e \in G$ neutre, o sigui $\forall g \in G, e * g = g * e = g$.
- Tot element té invers, o sigui $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ tal que $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.

A més, si l'operació $*$ és commutativa, direm que el grup G és abelià. D'altra banda, es diu *ordre* del grup al nombre d'elements del grup, i també denotem l'ordre d'un element com el menor nombre de vegades que cal operar-lo amb si mateix per a obtenir el neutre.

Un subgrup de $H \subseteq G$ és un subconjunt de G tal que amb l'operació heretada de G continua sent grup. Denotarem l'índex $[G : H]$ com el cardinal del conjunt quocient G/H . Si els ordres de G i de H són finits, aleshores $[G : H] = |G| / |H|$. Finalment, definirem el centralitzador del subgrup H com tots els elements de G que commuten amb tots els elements de H , és a dir:

$$C_G(H) = \{g \in G \mid gh = hg \ \forall h \in H\}$$

Notacions: L'operació $*$ pot representar diferents operacions segons quin grup estiguem estudiant. Les notacions més habituals que s'utilitzen són les notacions additiva (l'operació es denota per $+$, el neutre pel 0, i l'invers d'un element a per $-a$), i multiplicativa (l'operació es denota per $\cdot$, el neutre per 1 i l'invers d'un element a per a^{-1}). Tot i això, a nosaltres a nosaltres ens interessarà una altra notació. En efecte, com que treballarem amb el grup diedral, els elements del qual són isometries, la nostra operació serà la composició $\circ$, el neutre serà la Id i l'invers d'una isometria f serà f^{-1} .

Existeixen un munt de grups, tots amb diferents propietats i amb diferents aspectes per estudiar. Alguns dels grups més característics són els grups cíclics (generats per un sol element), el grup simètric (el grup de permutacions de $\{1, 2, \dots, n\}$), i finalment el grup diedral, que és el que ens interessa:

Definició: El grup diedral D_{2n} d'ordre $2n$ és el grup de les isometries del pla euclidià que deixen fix un polígon regular de n costats. Llevat de translacions i d'homotècies, podem suposar que el polígon està centrat en l'origen i que té un vèrtex en el semieix real positiu. Aleshores, els elements del grup diedral són les rotacions al voltant de l'origen d'angle múltiple de $2\pi/n$, i les reflexions respecte de les rectes que passen per l'origen i per vèrtexs o punts mitjans de costats del polígon.

Denotem la rotació d'angle $2\pi/n$ per r i s la simetria respecte de l'eix d'abscisses; observem que $r^n = Id$ i $s^2 = Id$, i és fàcil demostrar que $s \circ r = r^{-1} \circ s$. D'aquesta manera, els elements del grup diedral s'escriuen de manera única com $r^x s^y$ amb $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ i $y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Per aquesta raó, l'ordre del grup diedral és $2n$. Així doncs, el grup diedral és el grup generat per les isometries r i s (és a dir qualsevol element de D_{2n} es pot expressar com a composicions de r 's i de s 's). Ho denotem de la següent manera:

$$D_{2n} = \langle r, s : r^n = s^2 = Id, sr = r^{-1}s \rangle$$

Finalment, en algun moment també ens serà útil pensar en el grup diedral com un subgrup del grup simètric S_n . En efecte, es tracta d'un subgrup perquè si numerem cadascun dels vèrtexs del polígon des de l'1 fins a n , fer una isometria que deixa fix el polígon és el mateix que fer una permutació de la n -tupla $[1, 2, \dots, n]$.

□

Un altre concepte que ens apareixerà també més endavant és el d'**acció d'un grup en un conjunt**.

Definició: Sigui G un grup i S un conjunt. Aleshores, una *acció de G sobre S* és una aplicació

$$\begin{aligned} G \times S &\longrightarrow S \\ (a, x) &\longmapsto ax \end{aligned}$$

L'acció m compleix:

$$a(bx) = (ab)x \quad 1x = x \quad \forall a, b \in G, x \in S$$

Observació: Per a definir $m(a, x)$ hem usat notació multiplicativa, però $m(a, x)$ pot estar definit per a qualsevol altra operació.

D'altra banda, per cada $a \in G$, tenim una aplicació induïda

$$\begin{aligned} m_a : S &\longrightarrow S \\ x &\longmapsto m(a, x) = ax \end{aligned}$$

que és una permutació de S . Ara, l'aplicació $a \mapsto m_a$ és un morfisme de G en el grup S_S (el grup de permutacions del conjunt S). Per tant, donar una acció de G en S és el mateix que donar un morfisme de grups $m : G \longrightarrow S_S$ amb $m(a) = m_a$. I a més, si aquest morfisme és injectiu, aleshores podrem identificar G amb un subgrup de S_S (la imatge del morfisme $G \longrightarrow S_S$). Aquest fet l'usarem a l'hora d'identificar el T/I -grup i el PLR -grup amb un subgrup del grup de permutacions dels acords tríades consonants (majors i menors).

Necessitarem alguns conceptes més sobre les accions:

Definició: Es diu que l'acció m és transitiva si $\forall x, y \in S, \exists a \in G$ tal que $ax = y$.

Definició: L'òrbita de $x \in S$ és el conjunt $Gx = \{ax \mid a \in G\} \subseteq S$.

Definició: L'estabilitzador de $x \in S$ és el subgrup $G_x = \{a \in G \mid ax = x\} \subseteq G$

I finalment un petit teorema:

Teorema: L'aplicació

$$\begin{aligned} Gx &\longrightarrow G/G_x \\ ax &\longmapsto aG_x \end{aligned}$$

és bijectiva, i per tant, $|Gx| = [G : G_x] = |G/G_x|$

Dem: Cal veure 3 coses: que està ben definida, que és injectiva i que és exhaustiva:

- Ben definida: $ax = bx \Leftrightarrow b^{-1}ax = x \Leftrightarrow b^{-1}a \in G_x \Leftrightarrow b^{-1}aG_x = G_x \Leftrightarrow aG_x = bG_x$
- Injectivitat: és el mateix procediment que per demostrar que està ben definida, però al revés.
- Exhaustivitat: Clar, perquè el que en realitat es mou és a dins de G i per tant obtenim totes les classes d'equivalència.

□

El que realment ens serà útil d'aquest teorema és la segona part, que ens diu que $|Gx| = [G : G_x] = |G/G_x|$.

Aquests seran els resultats més importants que necessitarem.

3 El T/I -grup

3.1 Classes de *pitches* i el grup $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

Tal i com vam definir, un *pitch* (o altura sonora) és l'atribut de la sensació auditiva en termes del qual el so es pot ordenar en una escala que s'extén dels més greus als més aguts. D'altra banda, els grecs ja van observar que dos sons separats per un nombre enter d'octaves són percebuts com a equivalents. Està clar que aquest fet ens proporciona una relació d'equivalència: dos *pitches* x i y estan relacionats, $x \sim y$, si estan separats per un nombre enter d'octaves. Per tant, si treballem amb el temperament igual (12 divisions de l'octava), aleshores podrem identificar el conjunt de classes d'equivalència amb $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ de la manera següent: identifiquem el 0 amb el *Do*, l'1 amb el *Do#*/*Reb*,... i finalment el *Si* amb l'11.

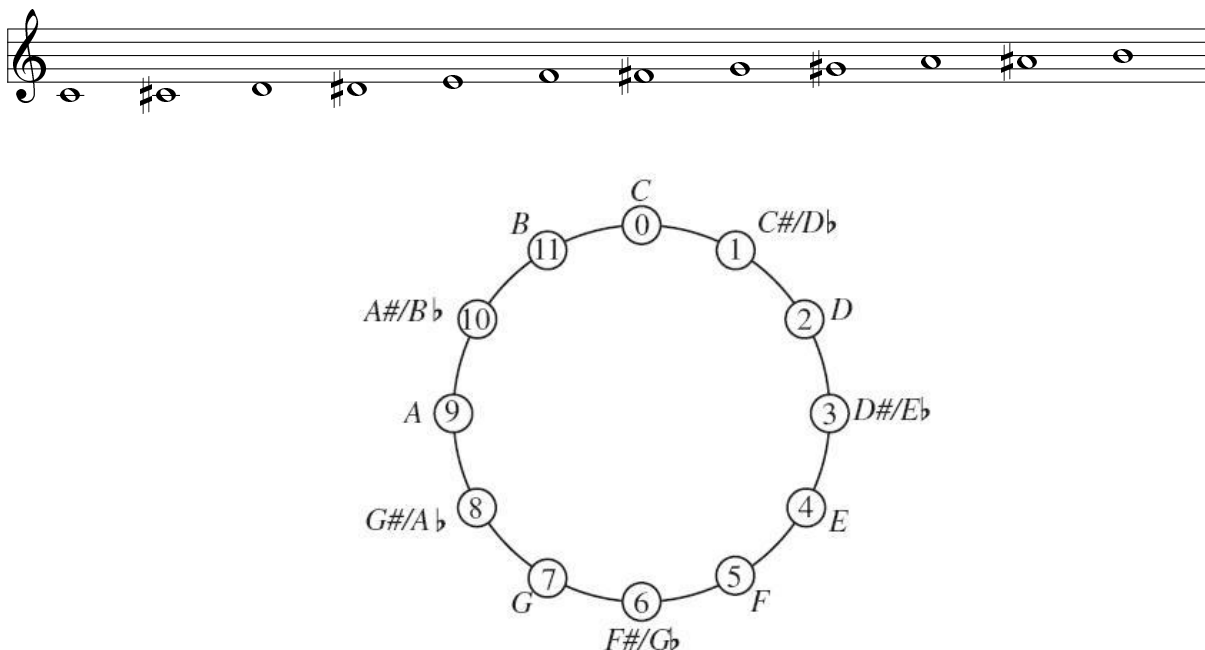


Figura 3.1: Relotge musical

Així doncs, amb aquesta identificació, ens podem escriure per exemple el tema principal (subjecte) d'una fuga de Bach amb elements de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (més tard posaré aquesta fuga com a exemple de transposició):



$$\langle \text{Re}, \text{Mi}, \text{Fa}, \text{Sol}, \text{Mi}, \text{Fa}, \text{Re}, \text{Do}\sharp, \text{Re}, \text{Si}\flat, \text{Sol}, \text{La} \rangle = \langle 2, 4, 5, 7, 4, 5, 2, 1, 2, 10, 7, 9 \rangle$$

on utilitzo els símbols $\langle \cdot \rangle$ per denotar que l'ordre dels elements importa.

D'altra banda, en aquest dibuix ja ens ha aparegut el polígon de 12 costats; així, ja podem intuir que el T/I -grup tindrà molt a veure amb el grup diedral D_{24} . De fet, serà el grup diedral. Així doncs, la identificació de les classes de *pitches* amb el grup $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ens permetrà l'ús de l'àlgebra abstracta per a descriure i modelar alguns fragments musicals.

3.2 Transposició i inversió

Durant la història de la música, els compositors s'han servit de diferents eïens musicals per a les seves obres, entre les quals podem trobar la *transposició* i la *inversió*. A grans trets, la transposició mou una melodia cap amunt o cap avall, conservant l'interval entre cadascuna de les notes, mentre que la inversió crea el simètric d'una melodia respecte d'un eix fixat. Per a definir-ho rigorosament, utilitzem la identificació que hem definit en l'apartat anterior, obtenint les següents definicions:

Definició. La transposició per un enter n és el morfisme

$$T_n : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

tal que $T_n(x) = x + n \pmod{12}$.

Definició. La inversió per un enter n és el morfisme

$$I_n : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

tal que $I_n(x) = -x + n \pmod{12}$.

Clarament, tant la transposició com la inversió tenen una fàcil interpretació si ens les mirem sobre el *rellotge musical*. La transposició T_1 es correspon a una rotació d'1/12 de volta en el sentit de les agulles del rellotge, mentre que la inversió I_0 es correspon a una simetria axial respecte de l'eix que passa per 0 i per 6. Així doncs, T_1 i I_0 generen el grup diedral d'ordre 24 D_{24} . A més, com que $(T_1)^n = T_n$ i $T_n \circ I_0 = I_n$, els elements del grup $D_{24} = \langle T_1, I_0 \rangle$ són les 12 transposicions i les 12 inversions: $\langle T_1, I_0 \rangle = \{T_n, I_n | n = 0 \dots 11\}$. Anomenarem aquest grup el **T/I -grup**.

Més endavant veurem una altra manera de pensar aquest grup: com un subgrup del grup de permutacions d'acords consonants. Vegem abans però un exemple

3.3 Fuga de Bach

Com bé sabem, l'obra de Johann Sebastian Bach és extensíssima, i cada peça admet un anàlisi minuciós que ens pot portar a resultats sorprenents. Buscarem exemples de transposició i inversió en la fuga 6 en re menor del *Primer llibre del clave ben temperat* de Bach. Està clar que jo només em fixaré en els fragments que ens interessin per al nostre objectiu, i que aquesta peça admet un anàlisi molt més profund que jo no faré. Així doncs, fixem-nos que el subjecte de la fuga, que anomenaré P , és

$$P = \langle Re, Mi, Fa, Sol, Mi, Fa, Re, Do\sharp, Re, Sib, Sol, La \rangle = \langle 2, 4, 5, 7, 4, 5, 2, 1, 2, 10, 7, 9 \rangle$$



que comença en el primer compàs. És curiós observar que aquest subjecte conté 12 notes. Ara, en el 3r compàs, la segona veu entra amb la melodia

$$\hat{P} = \langle La, Si, Do, Re, Si, Do, La, Sol\sharp, La, Fa, Re, Mi \rangle = \langle 9, 11, 0, 2, 11, 0, 9, 8, 9, 5, 2, 4 \rangle$$

Observem que, efectivament, $\hat{P} = T_7P$. Al 6è compàs, el baix entra amb el mateix subjecte però traslladat un octava més a baix (per tant, en termes de classes d'equivalència, és el mateix que P).

Al 8è compàs, la primera veu torna a cantar el subjecte:

$$\langle Mi, Fa, Sol, La, Fa, Sib, Sol, Fa\sharp, Sol, Mib, Do\sharp, Re \rangle = \langle 4, 5, 7, 9, 5, 10, 7, 6, 7, 3, 1, 2 \rangle$$

Aquí veiem que la transposició no és ni de bon tros tan clara com en els casos anteriors: les 4 primeres notes són la imatge de T_2 , la cinquena es correspon a la transposició T_1 . Les següents 5 notes corresponen a la transposició T_5 , igual que l'última nota, mentre que l'onzena es correspon a T_1 . Al compàs 13 de nou tenim

$$\langle La, Si, Do\sharp, Re, Si, Do\sharp, La, Sol\sharp, La, Fa, Re, Sol \rangle = \langle 9, 11, 1, 2, 11, 1, 9, 8, 9, 5, 2, 4 \rangle$$

que de nou es correspon a T_7P excepte pels 1's. En els compassos 17,18 i 21 tenim transposicions similars del subjecte T_7P . Fixem-nos en que la transposició T_7 apareix molt sovint, ja que es tracta de la transposició d'una quinta perfecta.

Vegem ara si la inversió apareix en aquesta obra: efectivament, en els compassos 14 i 22 ens trobem amb les frases

$$\langle Mi, Re, Do\sharp, Si, Re, Do\sharp, Mi, Fa, Mi, La, Do, Sib \rangle = \langle 4, 2, 1, 11, 2, 1, 4, 5, 4, 9, 0, 10 \rangle$$

$$\langle Mi, Re, Do\sharp, Si, Re, Do\sharp, Mi, Fa, Mi, Sol, Sib, La \rangle = \langle 4, 2, 1, 11, 2, 1, 4, 5, 4, 7, 10, 9 \rangle$$

Ara, si calculem I_6P obtenim

$$I_6P = \langle 4, 2, 1, 11, 2, 1, 4, 5, 4, 8, 11, 9 \rangle$$

que gairebé coincideix amb les frases dels compassos 14 i 22, excepte per les 3 últimes notes, que suposadament són diferents per a que soni millor.

Nota: en l'annex hi ha la partitura d'aquesta fuga, i en el cd que va junt amb aquest treball també estan gravats els primers 8 preludis i fugues del primer llibre del clave ben temperat de Bach

3.4 Acords tríades majors i menors

En aquesta secció intentarem interpretar el T/I -grup en funció del conjunt S d'acords tríades majors i menors, per a poder comparar després el T/I -grup i el PLR -grup.

Un acord tríade consisteix amb tres notes tocades simultàneament. És major si la segona nota està a 4 semitons de la primera, i la tercera a 7 semitons de la primera. Per exemple, l'acord tríade de Do major és $\{0, 4, 7\} = \{Do, Mi, Sol\}$. Amb aquest exemple podem veure que un acord tríade és un subconjunt del grup $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, i com que hem definit les transposicions i les inversions en $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ podem definir per exemple $I_0(\{0, 4, 7\}) = \{5, 8, 0\} = \{Fa, Lab, Do\}$, que és l'acord de fa menor (un acord de tres notes amb la segona nota a 3 semitons i la tercera nota a 7 semitons de la primera). Denotarem per S el conjunt de tots els acords tríades majors i menors. Així doncs, S és un conjunt de cardinal 24, tal i com es veu en la següent taula:

Nota: Utilitzem les notes en majúscules per a designar els acords majors, i les notes en minúscules per a designar els acords menors.

Acords Majors	Acords Menors
$DO = \{0, 4, 7\}$	$\{0, 8, 5\} = fa$
$DO\sharp = RE\flat = \{1, 5, 8\}$	$\{1, 9, 6\} = fa\sharp = sol\flat$
$DO = \{2, 6, 9\}$	$\{2, 10, 7\} = sol$
$RE\sharp = MI\flat = \{3, 7, 10\}$	$\{3, 11, 8\} = sol\sharp = lab\flat$
$MI = \{4, 8, 11\}$	$\{4, 0, 9\} = la$
$FA = \{5, 9, 0\}$	$\{5, 1, 10\} = la\sharp = sib\flat$
$FA\sharp = SOL\flat = \{6, 10, 1\}$	$\{6, 2, 11\} = si$
$SOL = \{7, 11, 2\}$	$\{7, 3, 0\} = do$
$SOL\sharp = LA\flat = \{8, 0, 3\}$	$\{8, 4, 1\} = do\sharp = reb\flat$
$LA = \{9, 1, 4\}$	$\{9, 5, 2\} = re$
$LA\sharp = SI\flat = \{10, 2, 5\}$	$\{10, 6, 3\} = re\sharp = mib\flat$
$SI = \{11, 3, 6\}$	$\{11, 7, 4\} = mi$

Aquesta taula, a part de mostrar-nos tots els elements de S , també està ordenada de forma que poguem veure quina és l'acció del T/I -grup sobre S . En efecte, el morfisme T_1 aplicat a un acord de la taula dóna l'acord immediatament inferior. Per exemple,

$$T_1(\{0, 4, 7\}) = \{T_1(0), T_1(4), T_1(7)\} = \{1, 5, 8\}$$

En general, si identifiquem l'acord de Do major com l'entrada 0, aleshores l'entrada n -èsima de la primera columna és

$$T_n(\{0, 4, 7\}) = \{T_n(0), T_n(4), T_n(7)\}$$

i l'entrada n -èsima de la segona columna és

$$I_n(\{0, 4, 7\}) = \{I_n(0), I_n(4), I_n(7)\}$$

Així doncs, no estem fent més que donar una acció de del grup diedral $D_{24} \cong T/I$ -grup, sobre el conjunt d'acords S , amb

$$\begin{array}{ccc} D_{24} \times S & \longrightarrow & S \\ (T_n, \{a, b, c\}) & \longmapsto & \{T_n(a), T_n(b), T_n(c)\} \\ (I_n, \{a, b, c\}) & \longmapsto & \{I_n(a), I_n(b), I_n(c)\} \end{array}$$

Nota. L'acció del T/I -grup (que denotarem ara per G) sobre el conjunt S és transitiva: efectivament, com que per qualssevol dos acords Y, Z tenim que existeixen $g_1, g_2 \in G$ tals que

$g_1 DO = Z$ i $g_2 DO = Y$, aleshores tenim que $gY = Z$ amb $g = g_1 g_2^{-1}$. Però a més a més, aquesta g és única. Vegem-ho:

Considerem l'òrbita de Y que denotem per GY . Aleshores, com que l'acció és transitiva, $|GY| = |S| = 24$. Considerem també l'estabilitzador de Y , G_Y . Per l'últim teorema que he enunciat en la primera secció, tenim que

$$|G| / |G_Y| = |GY|$$

Ara, com que $G = D_{24}$, $|G| = 24$. Per tant, $|G_Y| = 1 \Rightarrow G_Y = \{1\}$. Això vol dir que si existissin $g, g' \in G$ tals que $gY = Z = g'Y$ aleshores $g^{-1}g'Y = Y \Leftrightarrow g^{-1}g' = 1 \Leftrightarrow g = g'$.

En conclusió, hem vist que l'acció de $D_{24} \cong T/I$ -grup és transitiva i de regal, hem vist que l'aplicació $m : G \longrightarrow S_S$ (de G al grup de permutacions de S) és injectiva. Per tant, podem identificar el T/I -grup amb la seva imatge per m , que és un subgrup de S_S .

4 El PLR -grup

Fins ara, el que hem fet ha estat estudiar l'acció del grup diedral d'ordre 24 D_{24} sobre el conjunt d'acords tríades S via el T/I -grup (transposicions i inversions). En aquest apartat estudiarem una nova acció de D_{24} sobre S a partir d'un nou grup, el PLR -grup. Matemàticament, podem definir aquest grup com el centralitzador del T/I -grup (vist com a subgrup del grup de permutacions de S , S_S). És a dir, els elements del PLR -grup són tots els elements de S_S que permuten amb els elements del T/I -grup. Més endavant concretaré una mica què vol dir això.

D'altra banda, també podem definir el PLR -grup com el subgrup del grup de permutacions de S , S_S , generat per les tres permutacions P , L i R . Veurem que, efectivament, el PLR -grup és isomorf al grup diedral d'ordre 24, i també en donaré una curiosa interpretació comparant-lo amb un tor.

Així doncs, considerem les permutacions $P, L, R : S \longrightarrow S$ definides per:

$$\begin{aligned} P(\langle y_1, y_2, y_3 \rangle) &= I_{y_1+y_3}(\langle y_1, y_2, y_3 \rangle) \\ L(\langle y_1, y_2, y_3 \rangle) &= I_{y_2+y_3}(\langle y_1, y_2, y_3 \rangle) \\ R(\langle y_1, y_2, y_3 \rangle) &= I_{y_1+y_2}(\langle y_1, y_2, y_3 \rangle) \end{aligned}$$

Els noms d'aquestes tres permutacions provenen de *parallel*, *leading tone exchange* i *relative*. A priori, la definició d'aquestes tres permutacions és una mica obscura, però veurem que cadascuna té una fàcil interpretació. D'altra banda, fixem-nos amb què les permutacions P, L, R no estan definides component a component, i això és el que les distingeix de les inversions i les transposicions I_n , T_n . A més, per aquesta raó, ara ens interessa en quin ordre està escrit l'acord (no com en el cas de les transposicions i les inversions) i per això denotem un acord per $\langle y_1, y_2, y_3 \rangle$. I una última observació és que aquestes transposicions estan definides a partir d'una inversió l'eix de simetria de la qual depèn de cada acord. Així, si tenim un acord tríade major o menor $\{y_1, y_2, y_3\}$, aleshores l'eix de simetria per cada permutació P, L, R és el següent:

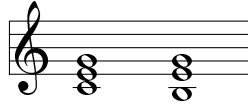
Permutació	Extrems de l'eix de simetria
P	$\frac{y_1+y_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2} + 6$
L	$\frac{y_2+y_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2} + 6$
R	$\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} + 6$

Tenim, però, una interpretació molt més clara de a on ens porta cadascuna de les permutacions P, L, R . Efectivament, si considerem el fet de ser major o menor com una paritat, aleshores:

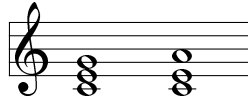
- La permutació P porta un acord tríade a un altre acord de paritat oposada, i conserva tant la primera com la tercera component, però intercanviant-les. Per exemple, $P(\langle 0, 4, 7 \rangle) = (\langle 7, 3, 0 \rangle)$. Que és el mateix que dir que la imatge per P de l'acord de DO major és l'acord de do menor.



- La permutació L porta un acord tríade a l'únic acord de paritat oposada conservant la segona i la tercera components però intercanviant-les. Així, per exemple, $L(\langle 0, 4, 7 \rangle) = (\langle 4, 7, 11 \rangle)$ que és el mateix que dir $L(DO) = mi$, i $L(\langle 4, 7, 11 \rangle) = (\langle 0, 4, 7 \rangle)$, o sigui $L(mi) = DO$.



- La permutació R porta un acord tríade a l'únic acord de paritat oposada conservant la primera i la segona components, però intercaviant-les. Per exemple, $R(\langle 0, 4, 7 \rangle) = (\langle 9, 0, 4 \rangle)$, és a dir, $R(DO) = la$, i $R(\langle 9, 0, 4 \rangle) = (\langle 0, 4, 7 \rangle)$, és a dir $R(la) = DO$. Observem que el que en realitat fa R és transportar un acord major al seu relatiu menor, i viceversa.



Observació. Amb aquestes definicions alternatives que hem fet de les permutacions P, L i R , és directe observar que aquestes tres permutacions tenen ordre 2, és a dir, $P^2 = L^2 = R^2 = Id$.

Nota: en el cd que va jut amb aquest treball, he gravat com sonen aquestes seqüències d'acords.

El grup generat per P, L, R l'anomenarem, doncs, el **PLR-grup**, o el grup neo-Riemannià, ja que el va introduir al segle XIX el musicòleg Hugo Riemann (que no el famós matemàtica

Bernard Riemann). A més, aquest grup, com ja hem avançat abans, té una estructura ben coneguda: és isomorf al grup diedral d'ordre 24. Ho enunciem en el següent teorema:

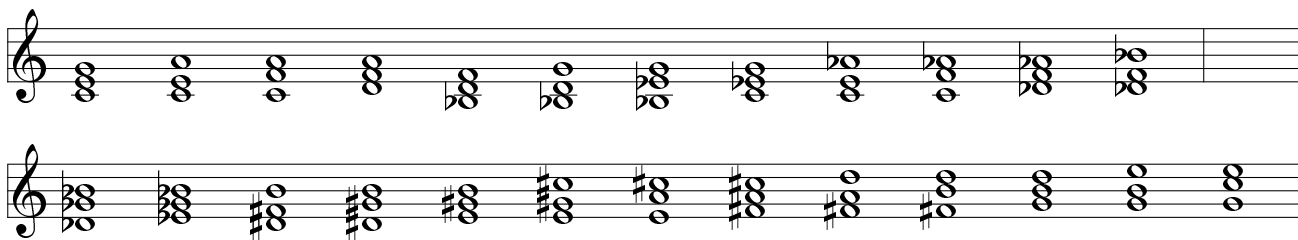
Teorema. El PLR -grup està generat per L i R i és un diedral d'ordre 24.

Dem. Si comencem des de l'acord tríade de Do major i anem aplicant alternativament R i L , aleshores obtenim la següent seqüència d'acords tríades:

$DO, la, FA, re, SI\flat, sol, MI\flat, do, LA\flat, fa, RE\flat, sib$

$SOL\flat, mib, SI, sol\sharp, MI, do\sharp, LA, fa\sharp, RE, si, SOL, mi, DO$

Recordem que estem utilitzant les lletres majúscules per a designar els acords majors, i les lletres minúscules per als acords menors.



Això ens està dient que les 24 permutacions $R, LR, RLR, \dots R(LR)^{11}$ i $(LR)^{12} = Id$ són diferents, i per tant, el PLR -grup té almenys 24 elements, i a més, la permutació LR té ordre 12. A més, fixem-nos en què $R(LR)^3(DO) = do$; per tant, tenim que $R(LR)^3 = P$, i per tant, el PLR -grup està generat únicament per les permutacions L i R .

Denotem $r = LR$, i $s = L$. Aleshores $r^{12} = Id$ i $s^2 = Id$. Ja podem intuir doncs que r és la rotació d' $1/12$ de volta del grup diedral, i s la simetria. Hem vist, doncs, que el PLR -grup té ordre més gran o igual que 24, i que està generat per una rotació i per una simetria. Per tant, per veure que efectivament és el grup diedral, només queda veure que l'ordre del PLR -grup és exactament 24. Vegem-ho: tenim que

$$srs = L(LR)L = LLRL = IdRL = RL = r^{-1}$$

ja que si $r = LR$, aleshores $rRL = LRRL = L(Id)L = LL = Id \Rightarrow r^{-1} = RL$. Tenim doncs que

$$srs = r^{-1} \Rightarrow sr = r^{-1}s$$

i ja estem, perquè això implica que qualsevol element del PLR -grup és de la forma $r^x s^y$ amb $x \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ i $y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Per tant, l'ordre del PLR -grup és 24 i per tant, $PLR\text{-grup} \cong D_{24}$

Corol·lari. L'acció del PLR -grup sobre el conjunt d'acords tríades S és transitiva.

Dem. Tal i com hem vist en la demostració de l'apartat anterior, l'òrbita de l'acord DO és tot S . Ara, com que el PLR -grup té 24 elements, repetint l'argument que hem utilitzat per veure que el T/I -grup actua transitivament sobre S , també veiem que el PLR -grup actua transitivament sobre S .

4.1 Relació entre el PLR -grup i el T/I -grup

Fins ara hem vist que el grup diedral d'ordre 24 actua sobre el conjunt S d'acords tríades transitivament via dos grups: el T/I -grup i el PLR -grup. Per tant, podem considerar aquests dos grups com a subgrups del grup de permutacions de S , S_S . Aleshores, els podem relacionar: dins de S_S , el PLR -grup és el centralitzador del T/I -grup i el T/I -grup és el centralitzador del PLR -grup.

Efectivament, usant les definicions rigoroses que hem fet de P , L i R , podem veure que aquestes 3 permutacions commuten amb les tranposicions T_n i les inversions I_n . Amb això veiem que un grup està inclòs en el centralitzador de l'altre.

Per demostrar la igualtat denotarem el PLR -grup únicament per PLR i el T/I -grup per T/I . Així doncs, partim del fet que $PLR \subseteq C_{S_S}(T/I)$. Considerem ara l'acció de $C_{S_S}(T/I)$ sobre S :

$$C_{S_S}(T/I) \times S \longrightarrow S$$

. Considerem ara un acord qualsevol de S , que li direm Y . La nostra intenció és veure que l'estabilitzador de Y , $C_{S_S}(T/I)_Y$, és el grup trivial $\{1\}$. Observem abans, però, que abans hem dit que l'acció del T/I -grup sobre S és transitiva. Per tant, l'òrbita de l'acord Y és tot S , és a dir $\forall Y' \in S, \exists g \in T/I$ tal que $gY = Y'$. Així doncs, per veure que l'estabilitzador de Y , $C_{S_S}(T/I)_Y$, és el grup trivial, prenem $h \in C_{S_S}(T/I)_Y$. Aleshores:

$$\begin{aligned} hY &= Y \\ ghY &= gY \\ hgY &= gY \end{aligned}$$

i com que es tracta d'una acció, només pot ser $h = 1$. Per tant, $C_{S_S}(T/I)_Y = \{1\}$. Ara, aplicant l'últim teorema de la primera secció, tenim

$$\frac{|C_{S_S}(T/I)|}{|C_{S_S}(T/I)_Y|} = |C_{S_S}(T/I)Y| = |\text{Orbita de } Y| \leq |S| = 24$$

Però com que el PLR -grup és un subgrup del centralitzador $C_{S_S}(T/I)$ i $|C_{S_S}(T/I)_Y| = 1$, aleshores concloem que

$$|PLR| \leq |C_{S_S}(T/I)| \leq 24$$

Però com que sabem que $|PLR| = 24$, aleshores tot són igualtats i per tant, $PLR = C_{S_S}(T/I)$, que és el que volíem demostrar. Per demostrar que el $T/I = C_{S_S}(PLR)$ es segueix el mateix procediment però invertint els papers.

□

Vegem què vol dir aquesta dualitat en termes una mica més musicals: per a fer-ho, utilitzem l'acord tríade de DO major: $L(T_1(DO)) = fa$, mentre que $T_1(L(DO)) = fa$. Efectivament, com que els elements del T/I -grup i els del PLR -grup commuten, aleshores el següent diagrama és commutatiu.

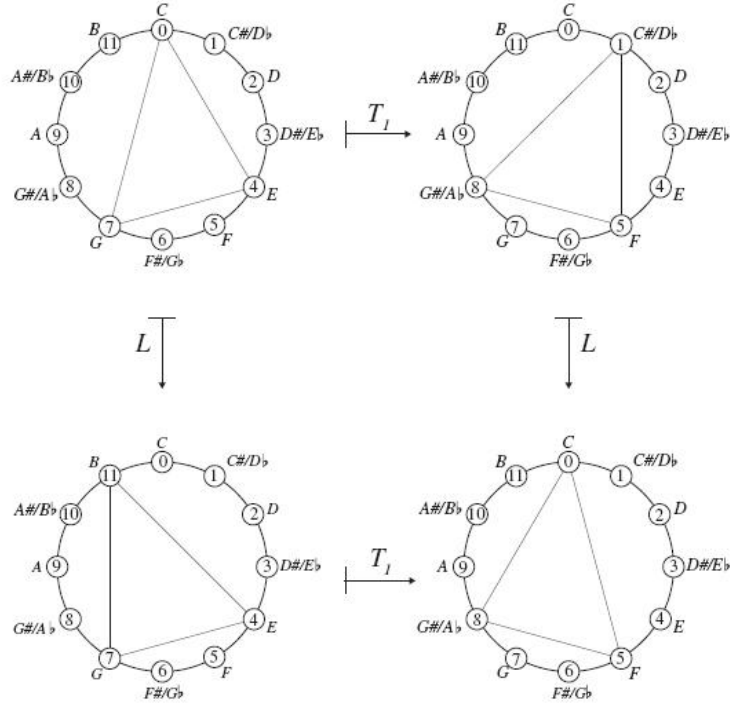


Figura 4.1: El diagrama és commutatiu

Això vol dir que per arribar d'un acord a un altre, sempre tindrem dos camins, utilitzant alternativament elements del *PLR*-grup i del *T/I*-grup.

4.2 Un exemple, el *PLR*-grup i *Stand by me*

Un cop definit el *PLR*-grup, podem pensar que és poc intuïtiu o molt rebuscat. Tot i això, és un grup que dona molt de si. Ho veurem en dos exemples. El primer és un exemple senzill que es basa en una seqüència d'acords que se li atribueix a Elvis Presley i que és molt característica del rock dels anys 50. La seqüència és la següent:

$$\bigcirc \xrightarrow{R} \bigcirc \xrightarrow{L} \bigcirc \xrightarrow{R \circ L \circ R \circ L} \bigcirc \xrightarrow{L \circ R} \bigcirc$$

on les $\bigcirc$ són els acords corresponents.

Així, per exemple, en la cançó *Stand by me* apareix aquesta seqüència amb els següents acords:

$$LA, fa\sharp, RE, MI, LA$$



Nota: en el cd que va junt amb aquest treball he gravat tant la seqüència d'acords com la cançó Stand by me.

4.3 El PLR -grup i el tor: la novena simfonia de Beethoven

Un tor és una segona bonica interpretació del PLR -grup; recordem que si en un quadrat identifiquem els costats paral·lels dos a dos, aleshores l'espai quocient resultant és un tor:

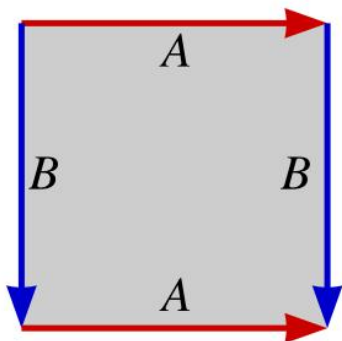


Figura 4.2: Relació d'equivalència

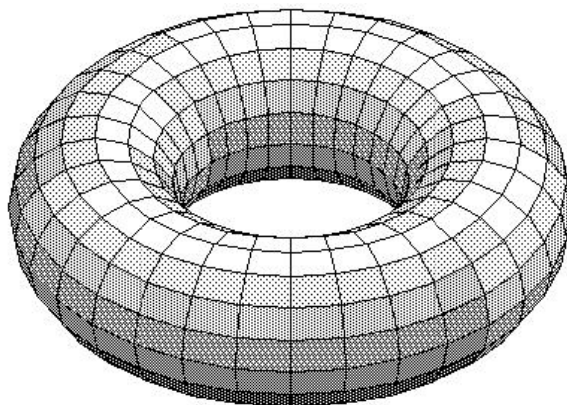


Figura 4.3: Tor

Tornant als acords, podem construir un graf infinit, on els vèrtexs són els acords tríades majors i menors, i les arestes són les permutacions P, L, R , i on dos vèrtexs estan relacionats si un és la imatge de l'altre per una de les tres permutacions. Aleshores, el graf és infinit, i a més a més és periòdic tant horitzontal com verticalment. Així doncs, en podem agafar una part, on els vèrtexs superiors coincideixin amb els inferiors, i els vèrtexs laterals també coincideixin (tot i que amb una translació):

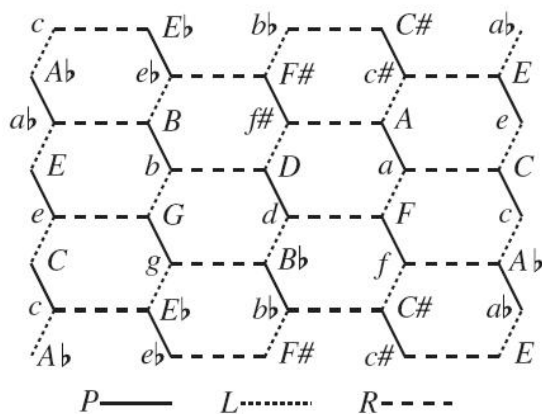


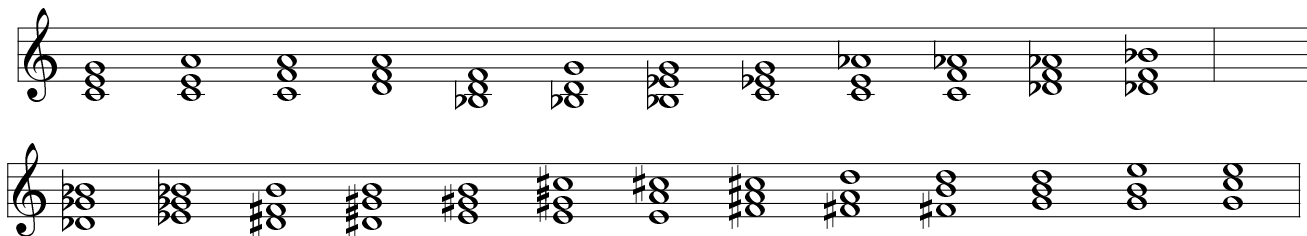
Figura 4.4: Graf

Enganxant els vèrtexs superiors amb els inferiors, obtenim un cilindre que, després de fer-lo girar (només per un costat) un terç de volta, també podem enganxar les dues bases obtenint així un tor. El resultat és un graf dins del tor, de manera que una seqüència d'acords pot recórrer un camí dins del tor sempre i quan aquesta seqüència sigui compatible amb les relacions que hi

ha dins del graf. Així, per exemple, la seqüència d'acords que hem utilitzat per demostrar que el *PLR*-grup és un diedral traça un camí dins del graf, i per tant, dins del tor.

DO, la, FA, re, SI♭, sol, MI♭, do, LA♭, fa, RE♭, sib

SOL♭, mib, SI, sol♯, MI, do♯, LA, fa♯, RE, si, SOL, mi, DO



És més, precisament els 19 primers acords d'aquesta seqüència apareixen entre els compassos 143 i 176 del segon moviment de la novena simfonia de Beethoven.

Es tracta, doncs, d'un exemple molt sorprenent on barregem la teoria de grups, la topologia i el mateix Beethoven. Després de sentir aquest fragment podrem dir que hem escoltat com sona un tor.

Nota: A l'annex hi ha un fragment de la partitura del segon moviment de Beethoven, i al CD que va junt amb aquest treball està gravada tota la simfonia de Beethoven.

5 Conclusions

Resumint, hem vist que el grup diedral d'ordre 24 actua en el conjunt d'acords tríades majors i menors de dues maneres: mitjançant el *T/I*-grup i mitjançant el *PLR*-grup. I encara més, també hem vist que aquests dos grups són duals, o sigui, un és el centralitzador de l'altre. D'altra banda, també hem vist que podem descriure el *PLR*-grup com un tor. En definitiva, hem vist que un grup important com és el grup diedral d'ordre 24 té un destacat paper sobre un conjunt, que és el conjunt d'acords tríades majors i menors, i a més aquest paper desemboca a una interpretació topològica.

La pregunta natural que ens podem fer és, doncs, si podem trobar altres conjunts sobre els quals també actuï el grup diedral o algun altre grup. I efectivament, existeixen estudis on es consideren les permutacions anàlogues a *P, L, R* aquest cop sobre els acords amb sèptima dominant o sèptima disminuïda.

El que vull dir és que la teoria de grups ens pot ajudar a donar una estructura global a diferents obres o, almenys a diferents parts d'alguna obres, i ens dona una explicació rigorosa de què és el que passa quan passem d'un acord a un altre, o quan passem d'un motiu a un altre. I sobretot, la relació més gran que he vist amb aquest treball entre la música i les matemàtiques és que, sense voler-ho i sense ser-ne conscient, Beethoven va escriure una de les seves obres més famoses que després en algun tros ha resultat tenir una sorprenent estructura matemàtica.

6 Referències

- <http://arxiv.org/abs/0711.1873>: En aquesta web podem trobar l'article *Musical actions of dihedral groups*.
- <http://www.math.uchicago.edu/~fiore/1/musictotal.pdf>: En aquesta web podem trobar l'article *Music and mathematics*
- <http://math.ucr.edu/home/baez/week234.html>. En aquesta web hi trobem l'article *This week's finds in mathematical Physics*, i en aquesta web hi ha enllaços cap a les dues webs anteriors.
- <http://jan.ucc.nau.edu/~tas3/bachindex.html>. Pàgina web molt interessant sobre Bach, on podem escoltar moltes de les seves obres, en particular la fuga que surt en el meu treball.
- <http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/maths-music.html>. Pàgina web on hi ha el llibre del Benson.
- [http://imslp.org/wiki/Symphony_No.9_\(Beethoven,_Ludwig_van\)](http://imslp.org/wiki/Symphony_No.9_(Beethoven,_Ludwig_van)). Web on podem trobar partitures de la 9a simfonia de Beethoven.

7 Annex

En aquest annex hi podem trobar:

- Les partitures de la 6a fuga del primer llibre del Clave ben Temperat de J.S. Bach.
- Les partitures d'un fragment del segon moviment de la 9a simfonia de Beethoven.

A més, també he gravat un CD amb totes les peces i cançons que he anat citant durant el treball. Així, en el cd hi podem trobar:

- Els primers 8 preludis i fugues del primer llibre del Clave ben Temperat de J.S. Bach.
- La 9a simfonia de Beethoven
- El vídeo *PLR*, on toco 3 seqüències de dos acords cadascuna que mostren un exemple de les permutacions P, L, R
- El vídeo *Stand by me acords* on toco els acords de *Stand by me*
- El vídeo *Tor*, on toco els acords que formen un camí dins del tor del *PLR*-grup.