

La física de la guitarra

Música i matemàtiques

Eva Romero

21 de desembre de 2005

Índex

1	Introducció	2
2	Parts i característiques de la guitarra	3
3	Propagació del so en la guitarra	6
3.1	La força de les cordes	7
3.2	Modes de vibració de les parts components de la guitarra	11
3.3	Unió de la tapa i l'aire de la cavitat: model de doble oscil·lació	12
3.4	Unió de la tapa i l'aire de la cavitat i la tapa posterior: model de triple oscil·lació	12
3.5	Resposta de la força de les cordes	14
4	Trastes i compensació	15
5	Conclusió	18
6	Bibliografia	18

1 Introducció

La música es defineix com l'art dels sons. Però, més enllà d'aquesta senzilla descripció, s'han esdevingut i coincidit moltes circumstàncies de diferent rellevància i repercussió per arribar a configurar aquest art com a tal.

En renovació constant, la música és una manifestació de la humanitat que gaudeix d'una immesurable força expressiva, considerada en moltes ocasions superior a la del llenguatge corrent. L'incessant canvi és causat, en part, per l'evolució cultural, que es veu reflectida en tota la seva història. Per tant, les circumstàncies que condicionen i determinen les transformacions de la política i la societat atorguen una variable significació a cada una de les fases de l'evolució musical, constituint l'imprescindible teló ambiental fonament dels canvis d'una particular forma d'expressió immaterial en funció de l'univers social i mental.

Els instruments, eines a partir de les quals la música es compon, han evolucionat d'acord amb ella des del seu origen. Pas a pas, s'han modificat i adaptat a les necessitats musicals de l'època fins arribar a crear un alt nivell de complexitat, tant en la tècnica o en l'expressió com en la construcció de l'instrument, obligant, així, a una forta especialització per part de l'interpret i del constructor.

La guitarra no n'és un cas especial. Ha anat evolucionant conjuntament amb la cultura, la història política i social del país i amb els avenços musicals i tecnològics. Per tant, totes les variacions que ha sofert són conseqüència del marc cultural que l'ha envoltada.

Així doncs, l'objectiu d'aquest treball és relacionar la intenció i l'experiència musical amb les qüestions de disseny i tècnica. Com a conseqüència, s'ha intentat trobar el rerefons del resultat sonor obtingut en la seva pràctica, tot analitzant les seves característiques físiques.

Per tant, aquest treball és un estudi sobre la física de la guitarra.

2 Parts i característiques de la guitarra

Igual que no només hi ha un estil de música, tampoc no només hi ha un tipus de guitarra. Uns quants dels tipus són aquests: l'elèctrica (utilitzada en la música moderna, constituïda d'un cos massís no ressonador en el que el so s'amplifica electrònicament), l'acústica, l'espanyola, la baixa, el guitarrín, l'ukelele (hawaiana, la qual es col·loca al llarg de les cames de l'interpret),... Aquestes variacions han donat la possibilitat d'estendre l'instrument en contextos diferents, tot col·laborant en la seva permanència.

Al final de tota una evolució i així, després d'un cúmul de variacions, la guitarra clàssica al s.XXI es divideix en les següents parts:



La tapa harmònica és, sens dubte, la part principal de l'instrument. Aquesta s'acostuma a sostenir mitjançant set vares de fusta en forma de ventall (la posició depèn del luthier), les quals són d'arc o palosanto de la Índia o de Río, mentre que la tapa és de cedre, pi, avet o xiprer. El fons, és igual que la tapa harmònica, tot i que té menys importància. Per la construcció del fons no s'obeeixen exigències tècniques de la sonoritat sinó que la tria es porta a terme segons l'ornamentació que es vulgui obtenir, motiu pel qual s'acostumen a utilitzar fustes belles com les de palosanto, xiprer, jacaranda o caracolillo.

Tot i així, a part de tenir en compte l'arbre de que procedeix la fusta amb que s'elabora l'instrument, també cal tenir en compte la seva antiguitat. Això és causat pel fet que la fusta és higroscòpica, és a dir, té una gran facilitat en prendre el mateix grau d'humitat que

l'ambient i així mateix, es comporta igual alhora de torna a l'ambient la humitat assolida. Quan es talla un arbre, s'inicia un període en el qual es torna a l'ambient tota la humitat que tenia en vida l'arbre tallat. Aquesta etapa finalitza quan s'arriba a un cert grau de sequedat, en el que per molt més temps que passi el tronc ja no perd més humitat. Així doncs, la fusta es compon de dos estats de la cel·lulosa; un amorf, en el qual s'absorbeix i es desprèn humitat; i un cristal·lí, on no admet humitat. Així, quan s'acaba de tallar el tronc de l'arbre la major part de la seva cel·lulosa és amorfa, i conforme va passant el temps esdevé en un estat cristal·lí. Lògicament, una fusta antiga té una gran massa de cel·lulosa cristal·lina, fet que repercuteix en una disminució de l'elasticitat, en un augment de rigidesa, motiu pel qual pot vibrar amb una amplitud major.

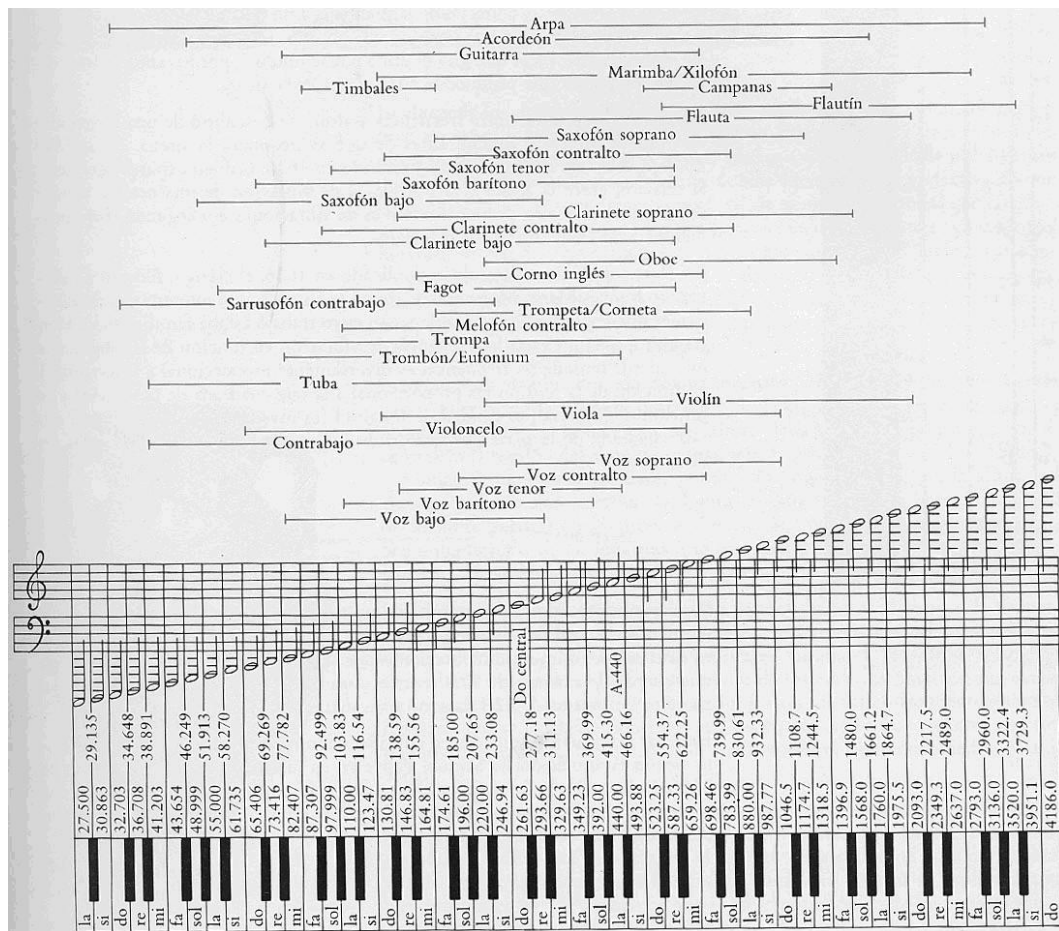
El pont, l'encarregat de subjectar les cordes i transmetre les seves vibracions a la tapa, acostuma a ser de palosanto o eben, fustes de gran resistència. Té sis foradets on passar les cordes i suporta una celleta de marfil, os o plàstic que serveix de recolzament perquè les cordes vibrin. El claviller, disposat en un petit angle respecte el mànec, conté les clavilles metàl·liques, les quals contenen dos talls verticals que reben petites peces de marfil o os per enrotllar les cordes i poder afinar l'instrument. És en el cap de la guitarra on el constructor pot expressar el seu propi segell.

El mànec requereix fustes de gran estabilitat dimensional i de baixa densitat perquè pesi poc. Aquests requisits els compleix perfectament la fusta de cedre centre-americà, el cedre d'Honduras. El diapasó exigeix una fusta molt dura, ja que el frec constant i els cops dels dits acaben produint petges relativament profundes. És per aquest motiu pel qual la fusta més adequada és l'eben guineà, també anomenat carboner pel seu aspecte mate. En el diapasó també s'hi troben els trasts, barres de metall d'alpaca o llautó que tenen el propòsit de posicionar correctament els intervals de cada nota. La distància adequada entre la corda i el diapasó dependrà, en part, d'allò que vulguem tocar. Amb una gran alçada, uns deu mil·límetres al trast dotze, s'obtenen sons de major intensitat però menor precisió en l'afinació. Per les guitarres clàssiques acostuma a haver una distància de quatre mil·límetres i mig en la sisena corda i tres en la primera. De les cordes cal recordar que les tres primeres des de la segona guerra mundial són de nylon, i les tres més greus, de filaments de seda envoltats de fil de plata o coure.

La massa d'un instrument pot variar en funció dels tipus de fustes utilitzades en la seva construcció. Si són guitarres d'un cert nivell, la massa acostuma a oscil·lar entre 1,150Kg i 1,750kg. Tanmateix, s'ha comprovat que no es pot mantenir la idea de que les millors guitarres són aquelles que menys pesen, no existeix una relació directa entre la massa i el so.

D'altra banda, si fem un estudi sobre les freqüències que la guitarra és capaç d'emetre,

veiem com està limitada a aquelles corresponents a les notes de l'escala temperada, perquè té trasts i així, perd la possibilitat de produir notes intermèdies com pot fer un violí. Tot i així, les freqüències emeses de la guitarra també es redueixen a un altre factor que és la seva extensió, constituïda per tres octaves i mitja. Per tant, segons l'afinació actual, pot produir un *mi*1 com a nota més greu (82.407 Hz) i com a més aguda, un *la*4 (880.00 Hz), encara que a vegades es consideri que el límit és el *mi*4, l'última nota que es pot produir en el mànec i no sobre el tram del diapasó situat sobre la tapa harmònica. Això mateix és el que es considera en el gràfic següent, en el qual es fàcil comparar l'extensió de la guitarra amb la d'altres instruments o veus humanes:



3 Propagació del so en la guitarra

El so és un tipus d'ona amb la virtut d'estimular l'oïda humana i generar sensació sonora, motiu pel qual en el seu estudi s'han de tenir en compte aspectes relacionats amb l'audició. Des d'un punt de vista físic, el so comparteix totes les propietats característiques del moviment ondulatori, tanmateix, des d'un punt de vista fisiològic, només existeix so quan l'oïda és capaç de percebre'l.

També es pot descriure el so com a un tipus d'ona longitudinal, que es pot transmetre a través dels sòlids, líquids i gasos. Les compressions successives del medi que envolta la campana vibrant de qualsevol timbre quan és picada pel seu martell corresponent, o la compressió longitudinal que pateix una molla poden ajudar a entendre la propagació del so. Quan aquest es propaga en un gas, ho fa en un medi fàcilment compressible, ja que un canvi de pressió comporta un canvi en el seu volum, de manera que si augmenta la pressió, disminueix el volum i viceversa. Així doncs, el so s'hi propaga amb un moviment ondulatori que consisteix en una successió de contraccions i dilatacions del gas, fet que provoca que la seva densitat fluctui, de manera que les ones mitjançant les quals la pertorbació es propaga s'anomenen ones de pressió longitudinals.

Quan es toca qualsevol instrument el que de debò s'està fent és generar-li vibracions transmetent-li energia. Aquesta força comunicada es propaga mitjançant diversos elements fins arribar a aquell que és l'encarregat de comprimir l'aire i així, crear so. Això és, en resum, el que també succeeix en la guitarra.

El primer element que intervé en aquests processos són les cordes. Reben la força que els hi transmeten els dits, motiu pel qual vibren. Aquesta vibració es dona verticalment en tots els punts, fet que evidencia la formació d'ones longitudinals, encara que contràriament, la pertorbació es transmet en la direcció horitzontal, creant així, una ona transversal. En una corda estirada, la tensió tendeix a rectificar les corbes de la corda. Per tant, gràcies a la tensió, una corda torna endarrera quan es pitja lateralment en un punt, encara que, degut a que té massa i així, també inèrcia, no torna a la línia recta un cop se la ha deixat, sinó que continua en el seu moviment corbant-se en el sentit oposat: vibra. La força de la tensió no és equivalent en totes les cordes, sinó que varia segons la massa, la freqüència de vibració i la llargada. No ens centrarem en l'estudi de les vibracions d'una corda ja que aquest ja s'ha fet a classe.

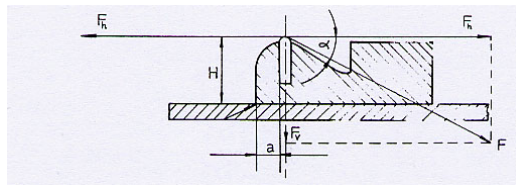
Un cop el pont transmet les vibracions, arribem a la tapa harmònica l'element principal de l'instrument. A aquesta peça es transmeten les vibracions de les cordes i se la obliga a vibrar amb la freqüència de la nota musical corresponent en cada moment. La tapa, al vibrar, mou l'aire contingut dins la caixa de ressonància i fa possible la percepció del so amplificat, ja

que l'aire de l'interior es comprimeix, creant així una nova pertorbació que es propagarà en totes direccions. La rigidesa i la densitat de la fusta utilitzada en la seva construcció són les característiques que cal tenir en compte alhora d'escollir la fusta amb que fabricar la tapa, perquè són propietats molt vinculades amb la velocitat de conducció del so. Així mateix, cal tenir en compte la posició de les vetes de la fusta, la qual ha de ser vertical per tal de oferir la mínima resistència a la conducció del so. Al mateix temps, ha de ser convexa per tal de poder suportar la constant tensió de les cordes. En la cara interna de la tapa s'hi troben les vares de fusta, les quals o bé proporcionen resistència a la caixa, o bé augmenten la massa de la tapa per aconseguir que la tapa entri amb ressonància amb les freqüències que emeten les cordes al vibrar. Les primeres, en general s'intenten situar allà on la vibració de la tapa és mínima, ja que així es donaria resistència sense por a afectar la qualitat del so. Tot i així, existeix una impossibilitat alhora de construir una tapa harmònica que doni exactament el resultat esperat, ja que petits canvis, per exemple, en la fusta, tenen conseqüències molt diverses.

En conclusió, la creació d'un so implica la vibració i ressonància d'una sèrie d'elements, dels quals cal fer-ne un rigorós estudi per tal d'intentar aconseguir la màxima qualitat de so de l'instrument.

3.1 La força de les cordes

La força exercida per una corda sobre el pont pot ser estimada. A continuació s'exposa una primera aproximació



En aquest esquema F_h és la tensió de les cordes; F , la força de reacció o d'ancoratge del pont; F_v la component vertical de la força, la qual tendeix a fixar el pont a la tapa. L'angle α és amb el que es torcen les cordes, i H l'alçada del pont amb l'os incorporat. La força F_h tendeix a fer lliscar el pont sobre la tapa, fet que obliga a col·locar dos claus per tal d'assegurar-se la seva immobilitat. En canvi, la força F_v ajuda a fixar-lo sobre la tapa. Les equacions següents són les que, mitjançant les raons trigonomètriques, ens permeten relacionar les forces amb l'angle:

$$F_h = F \cos \alpha$$

$$F_v = F \sin \alpha = F_h \tan \alpha$$

Amb aquestes equacions, es manifesta la rellevància que pel bon so que ha de tenir una guitarra té l'angle de les cordes, ja que com més gran sigui aquest més gran serà la força vertical que es transmet a la tapa, i així la guitarra podrà gaudir d'una intensitat major.

Fent-ne un estudi més exhaustiu, podem expressar la força normal i paral·lela a la tapa amb les mateixes equacions que en l'esquema previ:

$$T_h = T \cos \rho$$

$$T_v = T \sin \rho$$

sent aquest cop ρ l'angle entre la tapa i la corda en el punt que es trepitja (fins al pont). La tensió varia durant el cicle. Expressem ara la tensió en funció de l'àrea de la secció A i la constant elàstica de Young E :

$$T = T_0 + \Delta T = T_0 + \frac{EA}{L_0} \Delta L$$

Així per ρ petites la força longitudinal i transversal esdevé:

$$F_T = (T_0 + \Delta T) \sin \alpha$$

$$F_L = (T_0 + \Delta T) \cos \alpha \simeq T_0 + \Delta T = T_0 + \frac{EA}{L_0} \Delta L$$

La variació de la força transversal durant un cicle és degut fonamentalment al canvi de direcció. Si desplacem la corda una distància d al punt βL_0 des del pont i després la deixem anar tindrem:

$$\sin(\rho_1) \simeq \frac{d}{\beta L_0}$$

i

$$\sin(\rho_2) \simeq \frac{d}{(1-\beta)L_0}$$

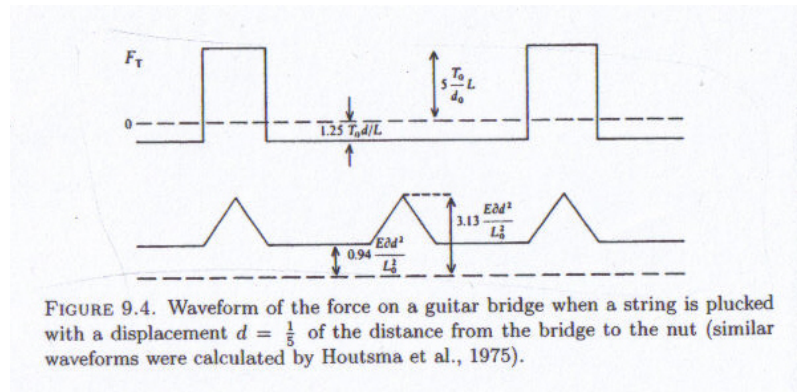
El canvi en la força transversal és deguda fonamentalment als canvis de llargada de la corda durant el període de vibració. El valor màxim de ΔL es dona per:

$$\Delta L_{max} = \sqrt{\beta^2 L_0^2 + d^2} + \sqrt{(1-\beta)^2 L_0^2 + d^2} - L_0 \simeq \frac{d^2}{2L_0} \times \frac{1}{\beta(1-\beta)}$$

$$\Delta L_{min} = \sqrt{4\beta^2 L_0^2 + \frac{(1-2\beta)^2 L_0^2}{(1-\beta)^2 L_0^2} d^2} + \sqrt{1 - 2\beta^2 L_0^2 \frac{(1-2\beta)^2 L_0^2}{(1-\beta)^2 L_0^2} d^2} - L_0 \simeq \frac{d^2}{2L_0} \times \frac{1-2\beta}{2\beta(1-\beta)^2}$$

Per $\beta = \frac{1}{5}$, $\delta L_{max} = 3.13 \frac{d^2}{L_0}$, $\delta L_{min} = 0.94 \frac{d^2}{L_0}$, $\sin \rho_1 = 5 \frac{d}{L_0}$ i $\sin \rho_2 = \frac{5}{4} \frac{d}{L_0}$. La representació d'aquesta força es mostra a continuació:

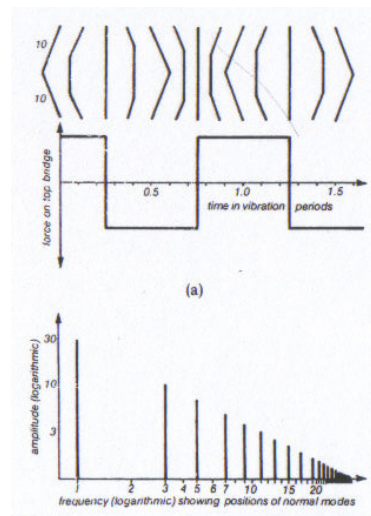
Per la primera corda, el mi de naylon, $L_0 = 65cm$, $A = 0.36mm^2$, $E = 5 \times 10^9 N/m^2$ i $T_0 = 82N$. Si $d = 3mm$, aleshores $\frac{T_0 d}{L_0} = 0.38N$ i $\frac{EA d^2}{L_0^2}$, per tant, la força transversal màxima és unes 16 vegades el màxim de la força longitudinal, l'amplitud dels 'bàtecs' o



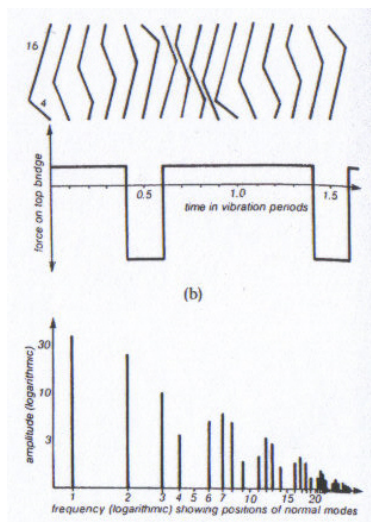
pulsacions de la força transversal són uns 40 vegades més que els de la longitudinal, i a més, es trasmeten més eficientment a la tapa. Tot i així, els bàtecs de la força longitudinal són proporcionals a d^2 i les transversal a d , la diferència disminueix incrementant aquesta distància.

El mòdul de Young pel metall és unes 40 vegades més gran que les de naylon, i la tensió d'una corda estàtica és el doble. Per tant, Les amplituds de les ones tranversals i longitudinals són aproximadament iguals. Notem que tant la força transversal com la longitudinal creix en l'amplitud conforme β disminueix; en efecte, per $\beta \ll 1$ les dos són proporcionals a $\frac{1}{\beta}$, així, tocant aprop del pont no només es proporciona una força major a aquest sinó que també es dona èmfasi als harmònics més alts.

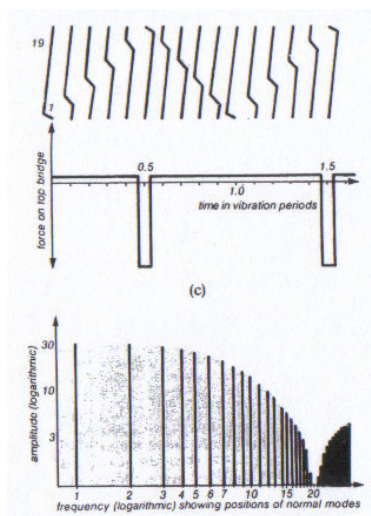
L'espectre i la forma de les ones de la força transversal del pont d'una corda ideal (per flexibilitat) toques a diversos punts de la corda es poden observar en les figures següents, conjuntament amb el període de vibració.



És la figura corresponent a una corda ideal pulsada al centre $\beta = \frac{1}{2}$; a continuació es representa una corda ideal pulsada a una cinquena part des del pont;



i la següent a una vintena de la seva llargada des del pont:



Notem que cada β -harmònic no el conté l'espectra. L'anàlisi de Fourier de la força transversal dona la següent expressió per l'amplitud F_n del n -harmònic:

$$F_n = \frac{2dT_0}{n\phi L_0} \frac{1}{\beta(1-\beta)} \sin(\beta n\phi)$$

Així el primer harmònic que no conté serà:

$$F_n = \frac{2dT_0}{L_0}$$

on $n\beta \ll 1$.

La tensió necessària per tal d'afinar una corda depèn òbviament de la massa d'aquesta, que al seu torn depèn del diàmetre. Les cordes de nylon requereixen una tensió de 50 a 80 N, i les de metall de 100 a 180 N.

3.2 Modes de vibració de les parts components de la guitarra

La tapa d'una guitarra vibra en diferents modes. Els de freqüències baixes s'assemblen als d'una placa rectangular ja descrits a classe. Els modes de vibració varien segons les condicions tècniques en què es fagin i les condicions ambientals. Així, seran diferents si es fixa la tapa, es recolza, s'agafa un costat, o si l'anàlisi es fa considerant que s'han col·locat les barilles a sota o no. També variarà segons com es col·loquin aquestes baretes.

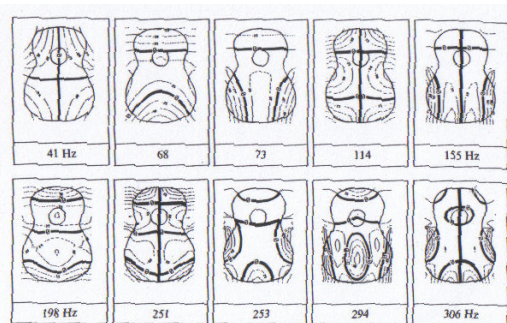


FIGURE 9.7. Vibration modes of a classical guitar top plate with traditional fan bracing (adapted from Richardson and Roberts, 1985).

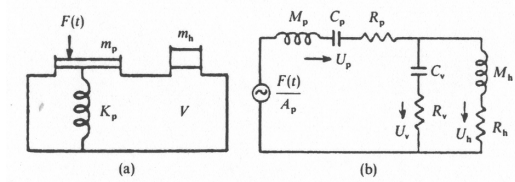
A la figura tenim la representació dels modes d'una tapa de guitarra clàssica amb barilles.

En general, la tapa posterior de la guitarra és més senzilla. Acostuma a haver una vareta al centre vertical i 3 més d'horitzontals.

En conclusió doncs, es comprova com la freqüència de vibració de la tapa, la tapa posterior i l'aire de la cavitat varia pels modes principals segons la guitarra que s'utilitzi, ja que segons la col·locació de les barilles obtenim freqüències més altes o més baixes.

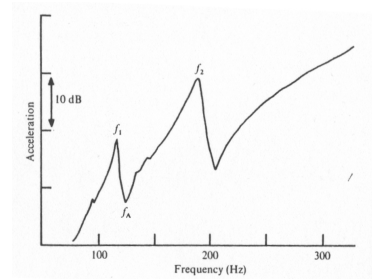
3.3 Unió de la tapa i l'aire de la cavitat: model de doble oscil·lació

Si s'ignora la tapa posterior i les baretes obtenim un sistema doble de vibració. Es pot considerar el circuit elèctric equivalent que correspondria al següent:



La vibració de les cordes, la $F(t)$ sobre la tapa. La seva massa i la seva rigidesa són representants corresponentment com a m_p i K_p . m_h fa referència a la massa de l'aire del forat de la guitarra, i V al volum de l'aire de dins la guitarra.

Aquest model descriu dues ressonàncies i una antiresonància entre elles. A ressonàncies baixes l'aire de l'interior de la guitarra surt en fase amb la vibració cap a dins de la tapa. A ressonàncies altes, l'aire entra conforme la tapa es mou cap endins.

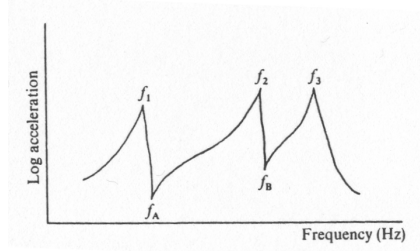
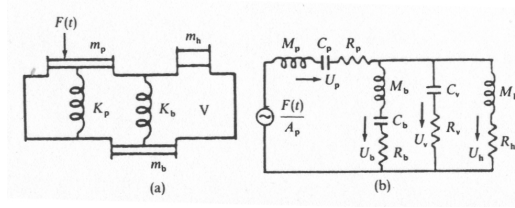


3.4 Unió de la tapa i l'aire de la cavitat i la tapa posterior: model de triple oscil·lació

El conjunt de la tapa, la tapa posterior i l'aire de la cavitat forma un oscil·lador triple. Podem observar-ne el seu esquema amb el circuit elèctric equivalent:

Les varetes estan immobilitzades així que la transmissió de la tapa a la tapa posterior es dona mitjançant l'aire interior. La corba corresponent a aquest model té tres ressonàncies i dues antiresonàncies.

Es mostra com $f_1^2 + f_2^2 = f_A^2 + f_B^2$. Aquesta relació ha estat verificada experimentalment.



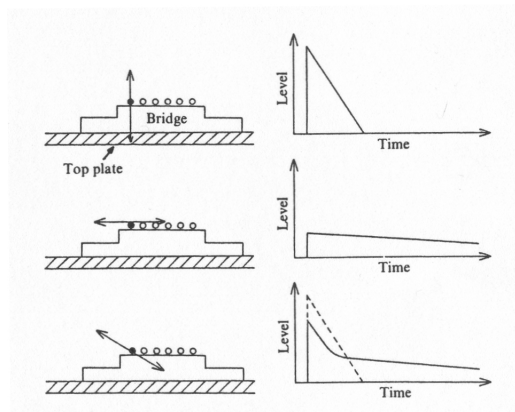
Així doncs, la freqüència d'una guitarra es caracteritza per una sèrie de ressonàncies i d'antiresonàncies. Per determinar la vibració de cada instrument ressonàncies grans s'acostuma a observar en forces punts mitjançant l'òptica, la mecànica o l'electricitat, sent el pont un punt d'observació ja que per algunes ressonàncies predominants hi ha una línia nodal aprop d'aquest.

3.5 Resposta de la força de les cordes

Considerem de nou la força paral·lela i normal mencionades a la secció 'la força de les cordes'. La força paral·lela de la freqüència fonamental de la corda és petita en les amplituds normals en que es toca. Creix quadràticament, per tant, pot ser un factor important tocant baix. Aquesta força crea una torsió la magnitud de la qual depèn de la altura del pont, i pot ser més rellevant en freqüències de ressonància de (0,1), (0,2) o modes similars amb nodes aprop del pont.

Així doncs, hi ha una infinitud de plans on la corda pot vibrar. Es consideraran les direccions paral·leles i perpendiculars al pont. Les forces paral·leles ajuden a vibrar ressonàncies del tipus (1,0). La força perpendicular pot cridar ressonàncies fonamentals com (0,0) i, aplicant-la en els costats més aguts o més greus, també pot aconseguir vibrar el (1,0).

L'efecte de les forces de varies cordes es difícil d'entendre. La distorsió de la tapa és el resultat de les forces perpendiculars i paral·leles del pont i les torsions de les cordes. Un intèrpret pot alterar el to de la guitarra ajustant l'angle amb què toca la corda. No només les forces del pont excitaran ressonàncies diferents sinó que els tons obtinguts decauran de maneres diferents. Quan una corda es toca perpendicular a la tapa, s'obté un so fort però curt, ja que decau ràpidament. Quan una corda es toca paral·lelament a la tapa resulten sons fluixos però llargs. Observem-ho:



Les guitarres clàssiques utilitzen bàsicament dues tècniques per tocar: l'apoyando' i a l'aire. Quan es toca una corda es converteix el moviment horitzontal del dit amb moviment vertical d'aquesta. L'apoyando' es basa en què el dit després de tocar una corda es recolza en la següent, a l'aire el dit després de tocar una corda surt sense tocar-ne cap més. L'apoyando tendeix a induir més moviment vertical a la corda. Així l'intèrpret pot fer canviar el balanç del moviment horitzontal i vertical de la corda variant l'angle en què toca la corda.

4 Trastes i compensació

La freqüència de vibració de les cordes depèn de quatre factors: la massa de la corda, la tensió, el mode de vibració i la llargada de la corda vibrant. Aquest últim element es determina mitjançant els trasts.

La situació dels trasts al llarg del diapàs no és fruit de la casualitat sinó que ha calgut la realització d'un estudi per tal de poder relacionar la llargada de les cordes amb la freqüència de so obtinguda. Un pas previ davant l'execució d'aquest estudi és saber quina és la distribució de l'octava en l'escala actual, és a dir, la nota que s'atribueix a cada freqüència.

Primerament a intentar establir una relació, cal saber l'equació que ens defineix la freqüència en que vibra una corda de longitud L . En "Harmonia Universal", publicat al 1836, el clergue, filòsof i matemàtic francès Marin Mersenne relacionà l'altura amb el número real de vibracions per segon. Com Galileu, Mersenne conegué com varia la freqüència de vibració en funció de la longitud d'una corda tensa (la freqüència és inversament proporcional a la longitud), en funció de la tensió (és proporcional a l'arrel quadrada de la tensió) i en funció de la massa per unitat de longitud. Reunint aquestes dades s'aconsegueix:

$$F = \frac{k\sqrt{Tensio}}{Longitud\sqrt{\frac{massa}{unitatdelongitud}}} = \frac{Q}{2L}\sqrt{\frac{T}{ds}}$$

on

Q = coeficient segons el material de la corda vibrant

L = longitud de la corda entre dos punts de suport

T = tensió de la corda

d = densitat del material de la corda

s = secció de la corda

Un cop definida l'equació, si plantegem una suposada corda de longitud L afinada en la natural (440 Hz), la qual escurcem una distància x (longitud entre el punt de suport superior i aquest suposat trasts 1) per tal de que la seva freqüència de vibració sigui F_1 , diferenciada de F per un semitò, la seva equació serà:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{\frac{Q}{2L}\sqrt{\frac{T}{ds}}}{\frac{Q}{2(L-x)}\sqrt{\frac{T}{ds}}}$$

d'on simplificant obtenim:

$$FL = F_1(L - x)$$

Tenint coneixença que $F_1 = FK$ (ja que F i F_1 es separen per un semitò i per tant, seguint el temperament igual la seva raó de proporcionalitat és $K = \sqrt[12]{2}$), existeix la possibilitat de crear un sistema, el qual resolent per substitució:

$$FL = FK(L - x) = FKL - FKx$$

Aïllant x i simplificant:

$$x = \frac{KFL - FL}{KF} = L - \frac{L}{K} = \frac{L(K - 1)}{K}$$

Mitjançant aquest procés s'ha obtingut la distància escurçada en funció de la longitud de la corda. Així doncs, aquesta fórmula serà la que regirà el càlcul del diapasó. En una guitarra de les dimensions habituals L equivaldria a 650 mm. Així, s'obtindrà com a distància x (que és la que separa el suport superior amb el primer traste):

$$x = \frac{L(K - 1)}{K} \approx 36.48mm$$

Pel segon traste obtindrem:

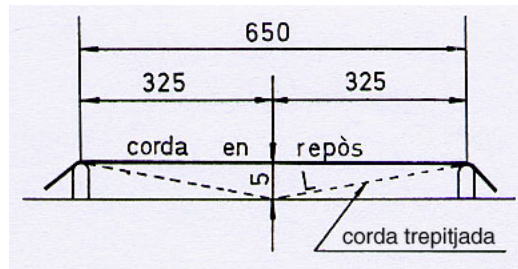
$$x = \frac{L(K^2 - 1)}{K^2} \approx 70.92mm$$

Aquest mateix càlcul el podem fer per tots els trastes, d'on s'observa que la distància entre trastes disminueix progressivament. Així mateix, estudiant una guitarra s'observa que trepitjant els trastes es redueix la llargada de la corda lliure, emeten intervals de semitò.

La posició de perpendicularitat dels trastes respecte les cordes és el motiu pel qual tan sols cal mesurar les distàncies en la primera corda, ja que en totes serà igual.

Un cop calculat el diapasó, existeix la possibilitat d'ampliar els conceptes entenent que tot i no haver comès cap error en els càlculs, la freqüència esperada de la corda trepitjada en qualsevol traste no és realment la que s'emet. La variació entre les freqüències emeses per les cordes trepitjades en els trastes i el que es pugui esperar segons la escala musical, es deuen a que les cordes no són elements infinitament rígids, sinó que s'allarguen quan són pitjades. Aquest increment de longitud comporta un augment de tensió i, en conseqüència, de to. Aquest efecte és més rellevant en les cordes metàl·liques que en les de nylon. Per compensar aquest canvi en la tensió s'engrandeix la distància entre el pont i l'os.

En la figura superior es representa esquemàticament la primera corda de la guitarra en repòs (línia continua) i trepitjada (línia discontinua) en el traste 12, en el que la corda es divideix en dos parts iguals. En ella es pot observar com la longitud de la corda L és major que la primera mesura de 325 mm. Com hipotenusa del triangle rectangle format, segons Pitàgores la nova longitud que adopta la corda serà: $L = \sqrt{325^2 + 5^2} = 325.04mm$ i així, 0.04 mm és l'increment sofert per la meitat de la corda, que serà de 0.08 mm per la corda



sencera.

Si es recorda que la freqüència amb que vibra una corda està regida per l'equació:

$$F = \frac{Q}{2L} \sqrt{\frac{T}{ds}}$$

La primera corda quan vibra emet a l'aire una nota mi corresponent a 329.64 Hz. Per tant:

$$329.64 \text{ Hz} = \frac{Q}{2 \cdot 650} \sqrt{\frac{7.325}{ds}}$$

ahora que si es busca la freqüència que emet la corda trepitjada en el traste 12 serà la que es planteja en la segona equació:

$$F = \frac{Q}{2 \cdot 325.04} \sqrt{\frac{7.325}{ds}}$$

Dividint membre a membre les dues equacions, simplificant i desenvolupant:

$$\frac{329.64}{F} = \frac{325.04}{650} \sqrt{\frac{7.325}{7.341}}$$

Per tant, obtenim que $F = 659.92 \text{ Hz}$

Tot i així, segons el temperament igual hauria d'obtenir-se una freqüència de $329.64 \cdot 2 = 659.28 \text{ Hz}$. Per tant, existeix una diferència de 0.64 Hz, que es remarca sobretot quan es toquen dues notes d'octava en cordes diferents.

5 Conclusió

La guitarra és un instrument més complex del que en un primer moment podem pensar. La seva construcció, el sentit físic de totes les seves parts,... són un món molt ampli i difícil de determinar en exactitud. Estudiant el recorregut de les vibracions transmeses inicialment a la corda d'una guitarra, les quals acaben propagant-se en l'aire, es posa de manifest.

Així doncs, en resulta la rellevància que tenen elements aparentment tan poc significatius com l'angle format per les cordes en el pont amb el sentit horitzontal de les cordes, la posició de les bates situades sota la tapa harmònica o la tensió que rep el pont. Un altre factor és la transcendència dels materials, més concretament de les fustes utilitzades, les quals cal que siguin diferents en cada part de la guitarra per tal d'aconseguir les propietats més adequades en la transmissió del so.

Definir els modes de vibració sobre una guitarra real torna a ser una dificultat. L'existència de les bates, d'estar fixada,.. en dificulten l'estudi teòric i l'allunyen de la realitat.

El motiu de la posició dels trasts en el mànec requereix un estudi força complex. Desajustos deguts a l'elasticitat de les cordes o l'altura d'aquestes respecte el màstil són problemes no trivials de solucionar.

Per tant, l'estudi teòric de les qualitats físiques de la guitarra ens apropa a aquesta força ajustadament però no exactament, de manera que tot un món de matissos no són definibles. En un teló ben afinat és un retrat difuminat.

6 Bibliografia

VILLAR RODRÍGUEZ, José. La guitarra española. Hospitalet de Llobregat: editorial Clivis. 1985.

N.H. FLETCHER and T.D. ROSSING, The physics of musical instruments. (2nd ed), Springer-Verlag, New York, 1999.

SERRA, Salvador; MERCADÉ, Joan; ARMENGOL, Montserrat. Física, crèdit 4, 5 i 6. Madrid: McGraw-Hill.

The university of New South Wales [en línia] . <http://www.phys.unsw.edu.au/music/guitar> [3.12.05]