L’Harmònica de vidre.

Música i Matemàtiques.

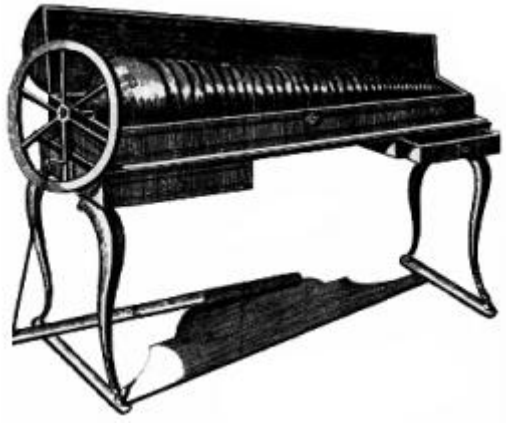
Carles Hoyo Fornés.

Harmònica de vidre.

Utilitzar gots de vidre, plens de diferents quantitats d'aigua per a alterar l'altura dels sons que s'obtenien al colpejar-los amb varetes era una tècnica ja utilitzada en temps dels perses, els xinesos, els japonesos i els àrabs.

Però aquesta tècnica va experimentar un canvi radical en 1743, quan l'irlandés Richard Puckeridge va tenir la idea de posar els gots de vidre, a sobre una taula, i acariciar les seves vores amb dits humits.

Benjamin Franklin va veure per primera vegada aquest últim instrument, que també tocava el compositor Gluck, en un concert donat pel virtuós anglès Delaval. Es coneixia com l'òrgan angèlic, més tard gots musicals o serafí. Franklin, fascinat pel "so suau i pur dels gots musicals", els va modificar per a augmentar el seu potencial. En una carta de 1762 al científic turinés Giovanni Battista Beccaria, li explicava com els havia millorat. Al nou instrument ho va anomenar harmònica, pels seus harmoniosos sons. Consistia en gots que havien estat construïts amb diferents diàmetres, cadascun corresponent a una nota, en comptes d'omplir-los amb aigua. Quan aquests bols estan ajustats cromàticament, uneixo dintre d'un altre, però sense tocar-se, amb una barra central que els travessa pel centre i els hi fa girar controlats per un pedal, es poden tocar acords complexos i augmenten les possibilitats d'interpretar música com un veritable virtuós. Des de llavors s'ha construït gran quantitat d'instruments derivats de l'harmònica de cristall: el melodión, la eumelia, el clavicilindro, la transponierharmónica, el sticcardo pastorale, la spirafina, l'Instrument del Parnàs, la glasharfe, el piano-harmònica de Tobías Schmidt, constructor també de la primera guillotina, el uranión, l'harmònica hidrodaktulopsíquica i altres. L'harmònica de cristall va ser molt popular des dels seus començaments. Es van escriure unes quatre-centes obres per a ella, moltes d'elles desafortunadament s'han perdut, i en el termini d'uns setanta anys es van construir uns quatre mil instruments.



Prototipus de l'harmònica de B. Franklin.

Antigament, s'utilitzaven vidres amb un percentatge molt elevat de plom, que al temps produïa intoxicació per plom als seus intèrprets, amb els respectius símptomes que això produeix.

Això va provocar, conjuntament amb el desconeixement d'aquest fet, que l'harmònica de vidre desapareixés, considerada un intrument quasi diabòlic. Ja que, feia "embogir als homes que osaven interpretar la seva musica."

Les harmòniques de cristall pertanyen a la família dels instruments autòfons fregats. Els gots comencen a vibrar segons un principi de relaxació: quan un dit frega una copa, hi ha una alternança entre la fricció i el lliscament sobre la superfície. Això crea una sèrie d'impulsos que fan que la copa vibri. És un fenomen complex, pel que el mestre bufador de vidre necessita gran destresa per a dotar a l'instrument d'un caràcter singular. Poden entrar en joc una sèrie de paràmetres que modifiquen el to, la manera i la composició harmònica de les copes. Així, dues copes que donen la mateixa nota tindran timbres diferents segons quins materials s'hagin usat, la seva forma, grossor, dimensions i defectes ocults.

Un estudi rigurós de la vibració i del comportament del liquid dins d'una copa és un problema molt complex. Inclós en una copa buida, és difícil treure una conclusió rigurosa del seu mode de vibració perquè canvia també per a cada tipus de got. I a més, el gruix del vidre varia progressivament de més gruixut a la part de la base a més prim a la part alta de la copa.

Tot i això podrem treure'n d'aquest estudi una sèrie de conclusions que s'aproximen força al comportament que presenta una copa qualsevol, en el moment en que la fem vibrar.

Mode fonamental de vibració:

Podem definir tres tipus de copes segons la seva forma, que es comportaran de manera diferent.

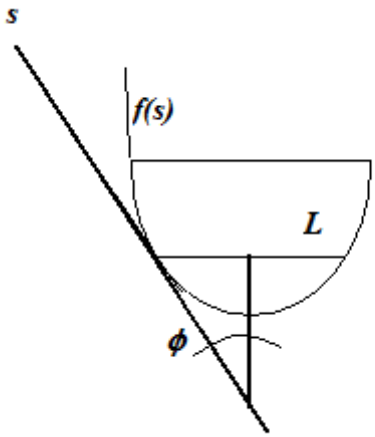
De forma una paràbola de revolució (copa de vi)

De forma cilíndrica (un got de refresc)

De forma cònica (copa de martini p. e.)

El mode fonamental, respon a una deformació elíptica senzilla de la secció de la copa, les aproximacions generals poden ser estodiades suposant la coordenada tangencial, medida des de la base de la copa, sigui s, la coordenada angular de la inclinació sigui ϕ,

i la longitut total de la superficie de la copa sigui L.



El mode fonamental de vibració es pot escriure com:

$\psi(s,\phi,t)= f(s) \cos 2\phi \sin \omega t$ **(1)**

On ω es la freqüència angular de vibració i f(s) és una funció desconeguda de la coordenada s.

Per determinar una aproximació a aquesta funció procedirem de la següent manera;

La subjecció de la base de la copa implica que f(0)=0,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{s=0} = 0, \quad \textbf{(2)}$$

Mentres el fet de que l'extrem superior estigui lliure fa que

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right|_{s=L} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^3 f}{\partial s^3}\right|_{s=L} = 0. \quad \textbf{(3)}$$

Dit això podem dir que una bona aproximació seria tractar f(s) com si fos una successió de forces i només estigués subjecte, i per tant, retinguda, en el primer terme, així, serà de la forma;

$f(s) = s^2/L^2$

Això satisfà la condició (2), tot i que no compleix la (3).

Ens trobem amb la necessitat de convertir la coordenada tangencial s en una coordenada vertical z, i això depén en gran mida, de la forma de la copa.

En els nostres tres suposats casos, tindrem que:

Cilindre; en una copa cilindrica; **z=s** i aquí no ens sorgeix cap tipus de problema.

Con; Per a la forma cònica de la copa tindrem: **z=A s cosθ** on θ és el semi-angle del con, i A és una constant.

Paràbola; per a la forma parabólica podem aconseguir una aproximació propera que es comporta de la forma $\mathbf{z=As^2}$ prop de la base on la inclinació del vidre és petita i de la forma **z=As** a la part alta de la copa on la inclinació és elevada.

Sabent que la part central de la copa es comportarà entre aquests dos extrems, i que el gruix del vidre no és constant, una aproximació adequada, per a aquest motiu, és escriure la funció modal f(s) (1) com zβ per lo que (1) es converteix en;

$$\psi(z,\phi,t)= z\beta \cos 2\phi \sin \omega t \qquad (5)$$

Ara estodiarem com l'addició de líquid dintre de la copa influeix en el seu comportament i en el mode de vibració de la mateixa.

La conclusió a la que arribem és que no té un efecte significatiu sobre el mode de vibració. Aquesta és la suposició normal de la teoría de la perturbació de primer ordre. Però en el cas d'un tracte més acurat, el de segon ordre, l'efecte del líquid ha de ser inclós.

En qualsevol vibració harmònica simple, la energía cinètica principal i l'energia elástica produïda per la tensió (energía potencial), són iguals. Si això ho assumim com a una primera aproximació, la forma de vibració del mode fonamental és independent de la carga de líquid que hi apliquem a la copa, i llavors, l'energia elàstica per a una amplitut donada (energia potencial) pot atribuïr-se-li el valor constant E.

L'energia cinètica de la vibració de les "parets" de la copa serà $\mathbf{K\omega^2}$, on **K** és una constant i **ω**, és la freqüència de vibració.

L'energia cinètica del líquid que es troba a dins de la copa, el podrem escriure com a $\mathbf{W\omega^2}$, on **W** dependrà de la profunditat del líquid contingut, o sigui, h, i serà proporcional a la densitat del líquid. Sabent això, podem deduïr que:

$$\omega^2=E/K+W(h) \qquad (6)$$

La funció de l'energia cinètica del líquid W(z) depén a l'hora de la forma que tengui la copa i a l'hora de la forma del mode de vibració. I ambdues són complicades. Per a una aproximació del mode fonamental, prendrem la funció **(5)**, incloënt-hi el fluxe intern de l'amplitud proporcional (això dona dues dimensions).

La masa de líquid en moviment d'una alçada donada z, és proporcional a la secció S(z) de la copa en aquesta secció, i depén de la forma de la copa.

L'expressió general per a W(h) és:

$$W(h) \propto \int_0^h S(z) z^{2\beta}\, dz$$

(7)

I llavors, haurem de calcular per a cada forma de la copa.

Cilindre; S(z) és una constant, independent de z.

Parabola de revolució; S(z) és proporcional a z

Con; S(z) és proporcional a z^2.

La integral llavors, passarà a ser de la forma, βhn, on β és una constant que depén de les dimensions de la copa, i n pren els següents valors, segons la forma de la copa:

Cilindre; n=2β+1

Una semiesfera; n=2β+2

Con; n=2β+3

Substituïnt això en la funció (6) obtindrem:

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \alpha h^n},$$

(8)

On ω_0 és la freqüència per a una copa buida, α és una constant proporcional a la densitat del líquid i també depén de la forma de la copa i del gruix del vidre, i **n** serà tal com exposem a continuació.

S'ha de dir, que només podrem predir de forma aproximada, els valors de **n** per a cada cas.

Cilindre; 3<=n<=5,

Parabola; 4<=n<=6

Con; 5<=n<=7

I el límit superior, és més acurat com a més uniformes són les parets de vidre de la copa. (gruix constant)

Arribats a aquest punt, hi ha dues teories interessants pel que fa al líquid que omple la copa:

Segons Rossing:

Una afinació exacta pot ser aconseguida afegint aigua gradualment (...) però el rang d'afinació és petit. Omplint diferents copes a ¼ de la seva capacitat, les freqüències obtingudes decreixen, i varien de un 0.3% a un 0.9%.

Omplint les mateixes copes a la meitat de la seva capacitat, les freqüències obtingudes decreixen, i varien de forma més notable, fins a un 6%.

Segons Roger F. Gans:

(Referint-se a Rossing).

Tot i això, podem demostrar que la influència del líquid, es fa més notable, quan omplim les copes de la meitat de la seva capacitat cap amunt, i que el el rang d'una copa pot arribar fins a una octava sencera. La freqüència és menor quan la copa està plena, i incrementa linealment respecte a la distància entre la vora superior de la copa i el nivell del líquid fins que la copa passa a estar a menys de la meitat de la seva capacitat. L'explicació per a aquest fenòmen és que el líquid incrementa la inèrcia efectiva del sistema.

I a continuació ens exposa el seu experiment. On utilitzarà quatre tipus de copes diferents:

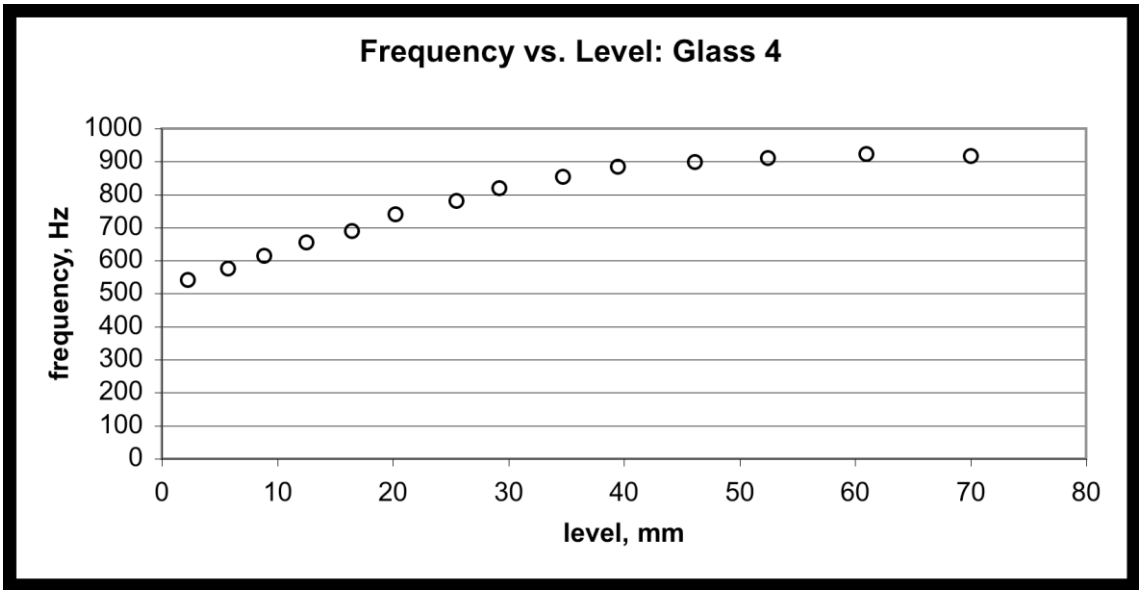
Dues copes de vi, una copa cilíndrica, i una copa de cocktail, que respondria a la forma cònica.

I prossegueix:

La forma de la copa aparentment no afecta a com el líquid modifica la freqüència fonamental.

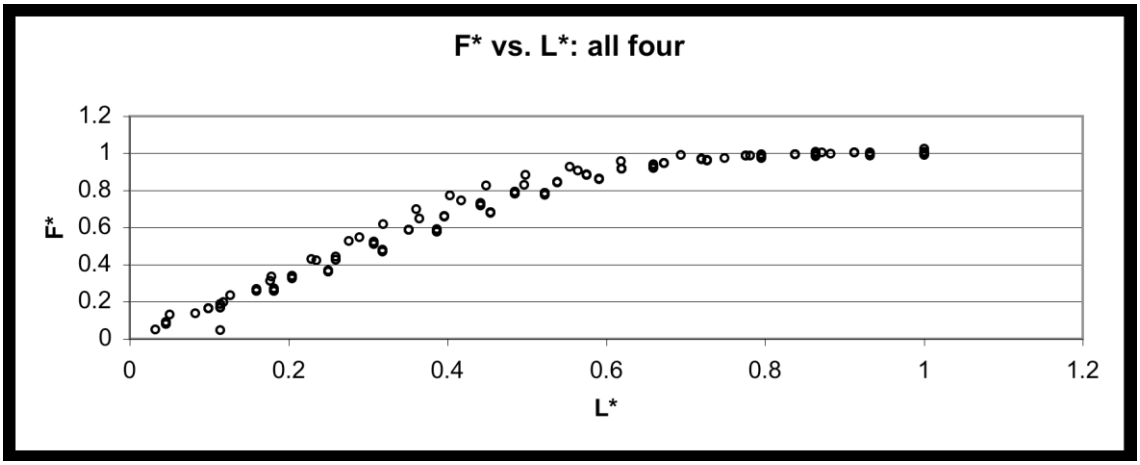
El procediment és el següent, es va afegint líquid amb una xeringa, de 30ml, com la que apareix a la fotografia, i això fa que l'error d'addició de líquid sigui menor de 0.1 ml.

I a partir d'aquí, mesura la freqüència amb un equip adequat per a tal efecte, obtenint els següents resultats:



L'autor, ens fa l'observació, que aquest gràfic, és el corresponent a la copa 4, i ens comenta, que les altres gràfiques presenten uns resultats similars. (Ens el creurem)

I finalment ens mostra una gràfica comparativa dels quatre casos, que verifiquen que el comportament de les 4 copes és similar.



-la mida de l'alçada del líquid que es fa servir és des de la vora superior cap avall.-

Cal resaltar que en els resultats obtinguts, els que es troben propers a la copa buida, ténen una freqüència constant. La influència del líquid comença a ser important quan la copa està mig plena, i des d'aquest moment, fins a estar plena del tot, la dependència és lineal.

La taula adjunta ens mostra les mides en profunditat de les quatre copes amb els resultats obtinguts del rang de les freqüències respectives.

Copa	Profunditat, hM mm	Freqüència max., fM, Hz	Freqüència min., fm, Hz
1	81.3	835	358
2	58.62	931	471
3	115.2	883	437
4	70.0	921	521

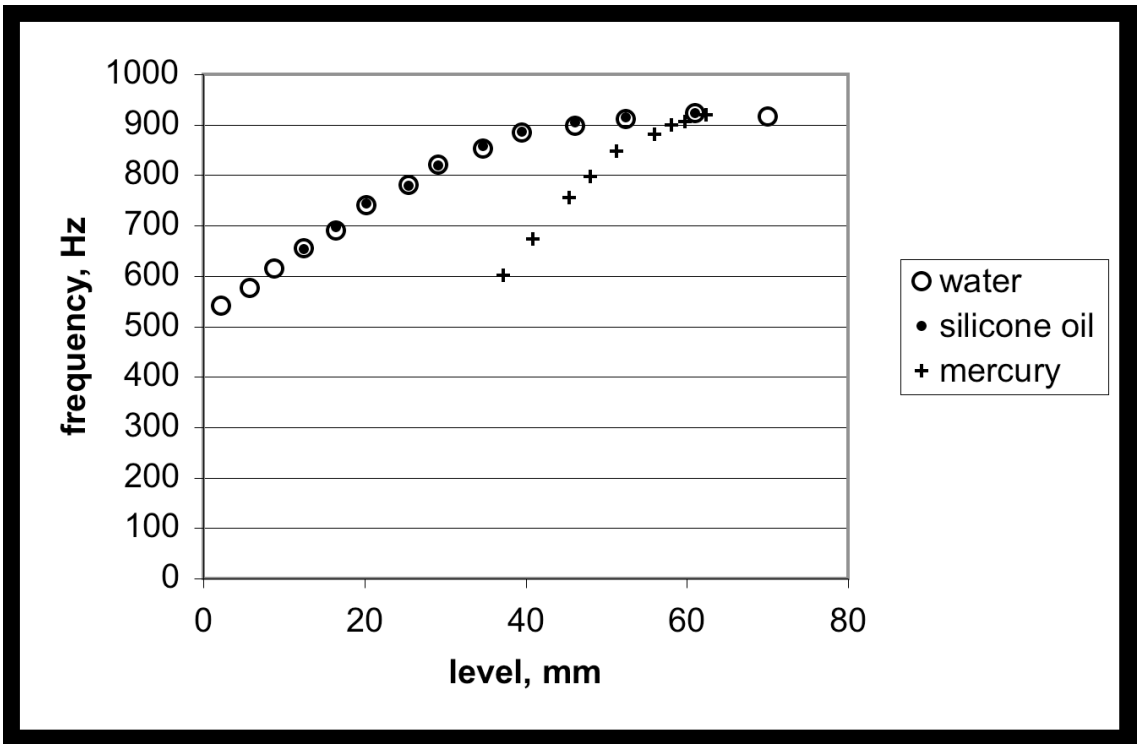
Com que la forma de la copa, no implica un rang de freqüències molt llunyanes entre sí, Podem centrar-nos en una sola copa, per estodiar el comportament del tipus de líquid i com afecten les seves propietats a les freqüències obtingudes.

Es procedeix a introduïr com a líquids:
Mercuri (Hg), aigua, oli.

Observarem en els resultats, que és molt dificil aconseguir una nota quan la copa està plena del tot de mercuri, i això s'expresa en el final de la curvatura dels resultats.

L'oli ajuda a que obtinguem una nota molt facilment, ja que procura un bon lliscament del dit.

I el que podem concloure dels resultats obtinguts, és que la viscossitat juga un paper molt petit, però la densitat en canvi esdevé important.

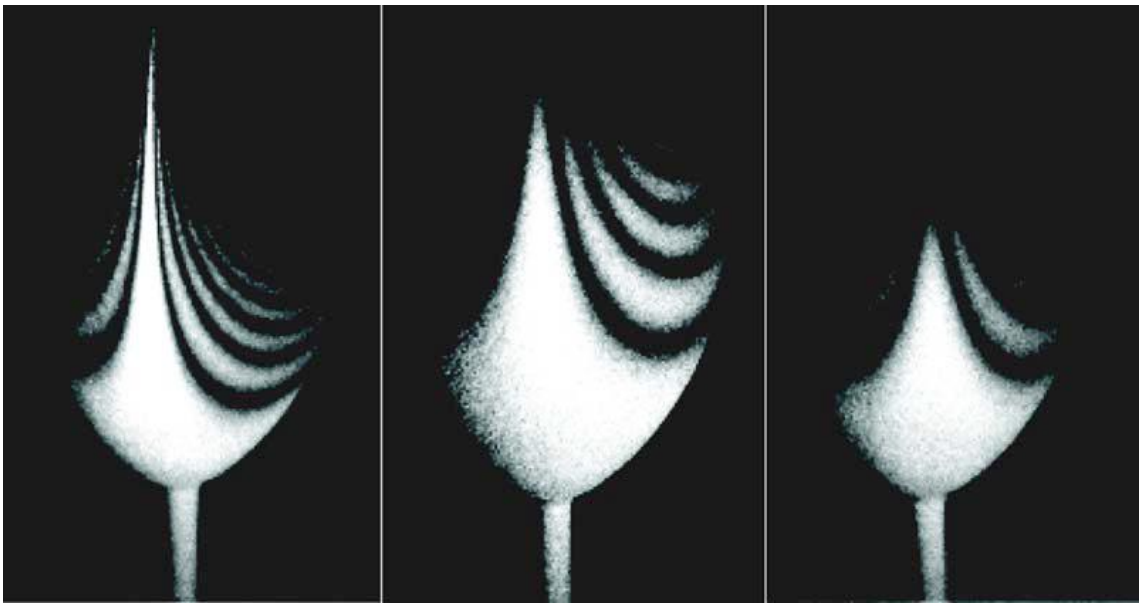


Resultats de la copa amb els tres líquids diferents.

El líquid modifica la freqüència canviant la inèrcia del sistema.

CONCLUSIO

En conclusió podem demostrar que la presència de líquid no varia l'estructura vibrant de la copa fins a ¼ de la seva capacitat, però a mida que anem omplint la copa a partir de la meitat de la capacitat, el líquid esdevé important, i és comença a fer obvi que la freqüència de ressonància decreix. Cal destacar, que el moviment de vibració de la copa continua força igual per sota del nivell del líquid.



Fotografies de les imatges hologràfiques de les vibracions d'una copa.
(a) Buida, (b) Mig plena amb aigua, (c) Plena del tot.

La franja més brillant correspon a la linia de vibració. Aquestes copes, són posades a prova, intentant provocar la seva rotura per excitació, la seva linia de rotura molt probablement correspongui a la linia antinodal de vibració, lo que provoca una major vibració, que acaba per no soportar el propi material i és trenca.

De les fotografies, es pot deduïr, les amplituts de vibració. Llavors, un punt de la copa, que anomenarem M, vibra sinusoidalment amb una amplitut A, i una pulsació ω.

Això ens torna a portar al cas que ens ocupa.

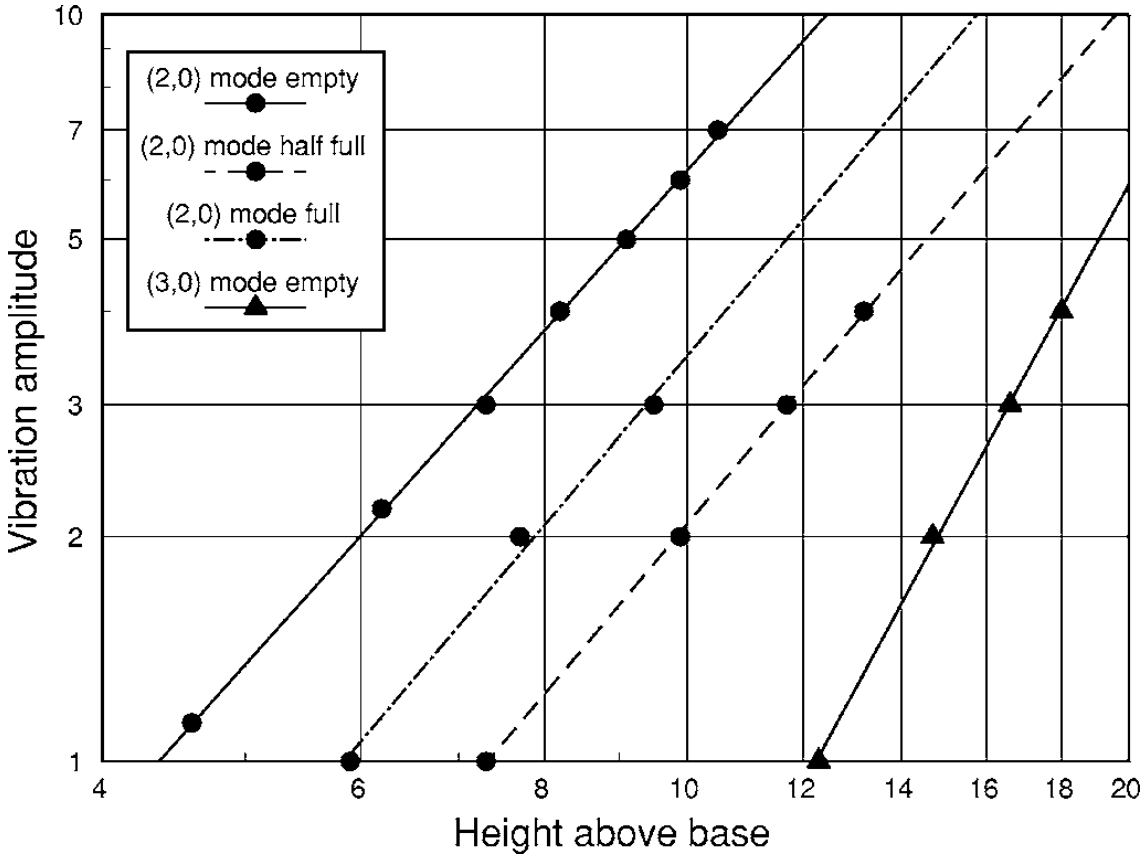
Aquest desplaçament de les linies, estan donades per:

$$x(M,t)=A(M)\sin(\omega t).$$

Per a un temps d'exposició T >> 1/ω, la intensitat I(M) de l'holograma obtingut és donat per;

$$I(M) \propto I_S(M) J_0^2\left(\frac{4\pi}{\lambda}A(M)\right)$$

On I_s(M) és l'intensitat de l'holograma obtingut per al punt M quan no està vibrant, J_0 es la funció de Bessel de primer tipus d'ordre zero. Les franges oscures están conseqüentment centrades en cada punt de la superficie de l'objecte on la funció de Bessel és zero per a una amplitud de vibració A(M).



Aquesta gràfica ens mostra l'amplitut normal de vibració a la superficie de la copa buida f, respecte l'alçada z.

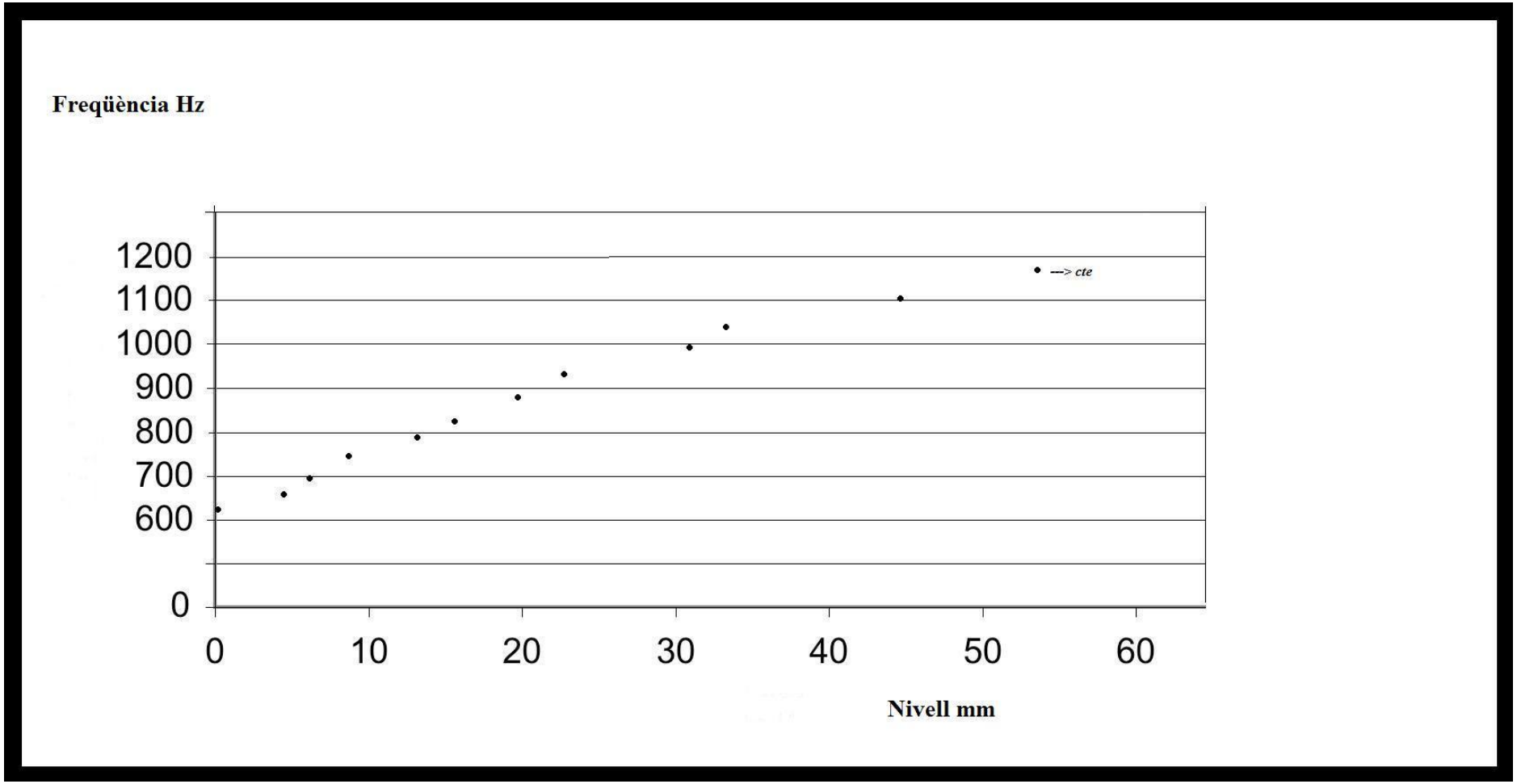
Finalment, utilitzant una copa de vi, les alçades obtingudes per a cada nota amb les freqüències corresponents están descrites a continuació. La conclusió és que la corba si que es correspon amb el que hem anat veient en l'estudi i en els resultats anteriors. Amb la copa plena, és difícil produïr el so, i gairebé arribem a obtenir un rang d'una octava. A més cal destacar que el que ens comenta Gans, sobre l'altura de la nota es compleix (a partir de que la copa està mig plena, la freqüència va disminuïnt molt més notablement a mida que anem omplint la copa.)

A continuació, adjunto la gràfica corresponent a l'experiment realitzat a casa amb una copa de tipus parabòlic;

Els resultats obtinguts han sigut els següents:

(Veure gràfica adjunta)

Re#	0.00cm	Mi	0.50cm	Fa	0.70cm	Fa#	0.90cm
Sol	1.40cm	Sol#	1.60cm	La	2.00cm	La#	2.30cm
Si	3.10cm	Do	3.40cm				
Do#	4.50cm	Re	5.30cm				


Freqüència Hz
1200
1100
1000
900
800
700
600
0
0
10
20
30
40
50
60
---> cte
Nivell mm

Bibliografia i consultes:

Rossing T D 1994 Acoustics of the glass harmonica *J. Acoust. Soc. Am.* 95 1106–11

T. D. Rossing and N. H. Fletcher, *Principles of Vibration and Sound*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York, 2004.

On the Role of the Liquid in a Glass Harmonica Roger F. Gans Department of Mechanical Engineering University of Rochester, NY 14627-0132 March 2005.

Tuning the pitch of a wine glass by playing with the liquid inside.
EUROPEAN JOURNAL OF PHYSICS
Matthieu Courtois, Boris Guirao and Emmanuel Fort