

Propietats rítmiques

Alba Granados

20 de gener de 2008

Índex

1	Introducció	3
2	Notacions rítmiques	3
2.1	Notacions no geomètriques	3
2.2	Notacions geomètriques	4
3	Propietats	6
3.1	Uniformitat	6
3.2	Espectre intervàlic	7
3.3	Assimetria i contratemps	9
4	Similaritat	11
4.1	Distància de Hamming	11
4.2	Distància de permutació	11
4.3	Distància de permutació dirigida	11
4.4	Distància cronotònica	12
4.5	Arbres filogenètics	12

1 Introducció

Que un monocicle i una bicicleta són diferents, és evident. Ara bé, sota quins criteris podem explicitar aquesta diferència? Un home de circ ens diria que el monocicle dóna més espectacle que no pas la bicicleta; un empresari diria que la bicicleta té sortida al mercat, i el monocicle no; un físic, que la bicicleta és més estable que el monocicle; un matemàtic ens podria parlar de les diferències geomètriques existents entre tots dos objectes. I de ben segur que unes propietats se segueixen de les altres. Aquest mateix procés el podem repetir per a dos ritmes diferents.

L'estudi matemàtic de la part rítmica d'una melodia requereix despullar-la de tota component més "musical", evitant així comentaris més propis d'un músic. En aquest treball s'han presentat un seguit de conceptes, propietats i eines que permeten, entre d'altres, fer estudis comparatius de caire matemàtic dels ritmes, determinant així la proximitat o llunyania present entre ells. Tanmateix, no pretenem buscar cap relació entre els resultats que exposarem i les diferents percepcions musicals a què donen lloc els ritmes treballats.

Amb aquesta finalitat, cal deixar clar primer de tot amb quin significat de ritme treballarem, donat que pot prendre diversos sentits. Un ritme serà doncs un *patró d'atacs* (accens) executats sobre una selecció d'un conjunt de *batecs* (pols) regulars, invariants i indivisibles. És a dir, s'entendrà que cada atac coincideix amb un batec.

Malgrat que no és un concepte primordial per desenvolupar aquest treball, remarquem que s'entén per compàs com a l'organització d'aquests citats batecs per mitjà d'accens distribuïts regularment. Per exemple, si disposem de 6 batecs, els podem distribuir en dos grups de 3 batecs emfasitzant la primera de cada grup, o bé agrupar-los en tres grups de 2 batecs emfasitzant igualment la primera de cada grup. També es pren el significat de compàs consistent en el conjunt d'aquests 6 batecs.

2 Notacions rítmiques

Segons la finalitat de la lectura d'un determinat patró rítmic, s'han anat dibuixant diferents representacions dels mateixos. Aquí en presentem tot un seguit.

2.1 Notacions no geomètriques

Els músics solen utilitzar la notació musical, on es fa constar el compàs en què ha estat escrit el fragment, un pentagrama, les figures rítmiques, que són l'abast de cadascun dels atacs, les línies divisòries, que marquen físicament els grups determinats pel compàs... En són un exemple les primeres quatre línies de la figura 1. Val a dir que en certs tipus de composicions musicals de finals del S.XIX en endavant, es prescindeix de tot aquest pautat, i es deixa en mans de l'interpret l'elecció del compàs i figures rítmiques.

La resta de representacions intenten mostrar l'essència d'un cert patró rítmic, prescindint de melodies i altres components musicals.

La cinquena representació va ser introduïda per Philip Harland de la Universitat de Califòrnia al 1962, coneguda com *Box Notation Method*, o també per

TUBS (*Time Unit Box System*). Només mostra els atacs del patró rítmic, sense determinar-ne la durada (l'abast).

La sisena i setena representació són una variant del TUBS: reemplaçant atac per “x” i la resta “.”, i reemplaçant atac per “1” i la resta “0”, respectivament. Aquesta segona és una representació binària. Això ens permet entendre un patró rítmic de manera matemàtica, com una funció $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0, 1\}$, on $f(x) = 1$ si hi ha un atac al batec x , i $f(x) = 0$ altrament. Si f representa un patró rítmic periòdic de període p , és a dir, cada p batecs és repeteix el patró rítmic, és clar que podem prendre com a domini de f el conjunt $\mathbb{Z}_p$. Dos patrons rítmics periòdics f_1 i f_2 seran equivalents si $f_1(x) = f_2(x - k)$ per un cert $k \in \mathbb{Z}$ i per tot $x \in \mathbb{Z}_p$.

La representació de la vuitena línia ens mostra el nombre de batecs existents entre atac i atac d'un patró rítmic determinat.

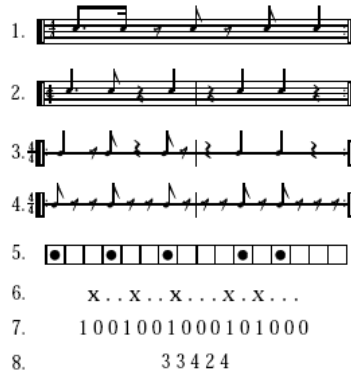


Figura 1: Vuit maneres de representar ritmes segons l'objecte d'estudi

2.2 Notacions geomètriques

Com veurem més endavant, existeixen certes propietats dels patrons rítmics difícils d'apreciar en les representacions no geomètriques. Les representacions que ara tractarem pretenen, doncs, corregir algunes deficiències de caire informatiu de les anteriors representacions. Així, s'introdueix una nova manera de notar el ritme mitjançant gràfics, o el que és el mateix, mitjançant contorns geomètrics. De fet, aquesta mètode ja s'emprava segles enrera: un llibre àrab escrit per Safi-al-Din al 1252 representava els ritmes dividint un cercle en tantes parts iguals com batecs tingués el patró rítmic. El mateix exemple de l'apartat anterior, seria representat com en la figura 2. Una de les principals mancances en la representació tipus TUBS, i derivats, és la poca claredat a l'hora de mostrar successos importants, tals com el principi, el final o l'abast de l'atac. Al 1987 Kjell Gustafson de la Universitat d'Oxford, proposa introduir una nova dimensió en la representació dels patrons rítmics que donés cabuda a aquest tipus d'informació. Els ritmes queden representats en un pla, on l'eix x mostra la longitud (batecs) entre els diferents atacs (informació present en les anteriors representacions), i l'eix y la durada relativa conseqüent dels diferents atacs (duració relativa dels intervals). El resultat s'anomena TEDAS (*Temporal Elements Displayed As Squares*) on, com veiem en la figura 3, cada element temporal és

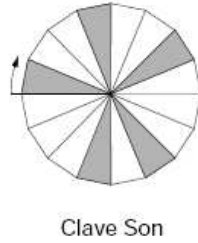


Figura 2: Notació cíclica àrab

representat per un quadrat.

D'una altra manera, si a cada batec (unitat de l'eix x) li assignem una coor-

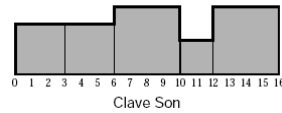


Figura 3: Representació en TEDAS

denada y igual a la duració relativa de l'atac que el precedeix immediatament, s'obté una funció contínua definida a trossos. Aquesta corba poligonal es coneix com *cadena cronotònica*. La figura 4 ens mostra un exemple.

L'últim mètode consisteix en representar un patró rítmic mitjançant un polígon



Figura 4: Cadena cronotònica

convex inscrit en una circumferència, de manera que la longitud relativa (arestes) entre atacs (vèrtexs) és fàcilment apreciable, tal i com veiem a la figura 5. En contraposició als mètodes ja presentats, el fet de representar el ritme d'una manera circular s'ajusta més al concepte cíclic que es té d'un patró rítmic. Per altra banda podem determinar a primer cop d'ull aspectes com la simetria del ritme respecte un cert eix (en la figura 5 apareix com a línia discontinua) que contingui un parell de batecs, coincidents o no amb atacs, o l'existència de dos atacs diametralment oposats. Més endavant dedicarem un capítol a aquesta última propietat.

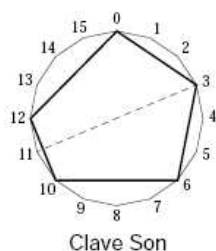


Figura 5: Representació com a polígon convex

3 Propietats

3.1 Uniformitat

Donats els dos patrons rítmics $[x.x.x.x.x.x.]$ i $[x...xx.xxx.]$ és clar que en el primer els atacs estan distribuïts més uniformement (ben espaiats) al llarg dels 12 batecs que en el segon. Però, com mesurem el grau de uniformitat?

A principis dels anys 90 es comencen a introduir diverses mesures per determinar la uniformitat d'una escala musical representada en un cercle. Una d'elles consisteix, simplement, en sumar la longitud de tots els arcs de circumferència marcats per cada parell d'altures (*pitches*) de l'escala a estudiar. Evidentment, podem aplicar aquest mètode als patrons rítmics, representant-los en polígons inscrits en un cercle unitat (figura 5). Si calulem la uniformitat de $[x...x...x...x...]$ i $[x.x.x.x.x.....]$ amb aquesta mesura, obtenim els valors de 32 i 23 respectivament. Tot i així, patrons rítmics molts semblans com ara $[x..x...x..x...]$ i $[x..x...x...x..]$ es comprova fàcilment que tenen el mateix grau de uniformitat (48), malgrat que intuïtivament el primer és més irregular que el segon. Aquest tipus de mesura tendeix a ser grollera com a mètode comparatiu entre patrons rítmics semblants.

Una altra manera de mesurar la bona distribució d'un ritme és prenent la longitud de les línies rectes delimitades per cada parell d'atacs (o altures en el cas de les escales), i fent-ne la suma. Aquest mètode és més fi en el tractament de ritmes similars. Cap al 1960, Fejes Tóth demostra que donats n punts sobre la circumferència, aquesta distància es màxima quan aquests punts determinen un polígon regular de n costats. En el nostre cas, diem que els arcs entre atac i atac (batecs) tenen la mateixa longitud. Aquest resultat sembla immediat quan pensem en un ritme màximament uniforme, que per altra banda sol ser força aburrit.

També Michael Keith en el llibre *From Polychords to Pólya* presenta una alternativa per a la mesura de la bona distribució de les altures d'una escala donada. Nosaltres traduirem la idea a patrons rítmics. Considerant el ritme $[x...x..x.x.x...]$ el representarem en el pla de la manera següent: l'eix x denotarà els batecs del patró rítmic (en aquest cas constarà de 16 unitats iguals), i l'eix y els atacs (5 en l'exemple). Així, per cada atac y li fem correspondre el batec x on s'executa. El resultat és la figura 6. La longitud dels segments en negreta

amb extrems un punt i la intersecció de la recta corresponent a l'atac amb la recta diagonal, mesura la desviació respecte el punt idoni per obtenir màxima uniformitat. La suma de totes aquestes longituds és el grau de irregularitat del patró. Aquesta mesura és coneguda com *uniformitat regressiva* d'un ritme, per la seva semblança amb la regressió lineal d'estadística.

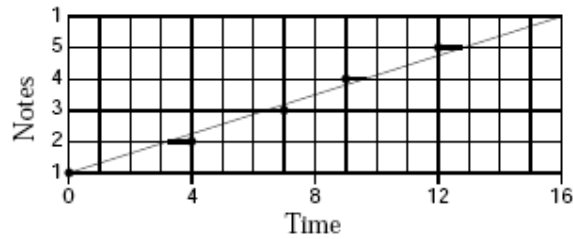


Figura 6: Mesura d'uniformitat regressiva

3.2 Espectre intervàlic

En aquesta secció estudiem l'espectre de les freqüències amb les què apareixen els diferents intervals (mesurats en batecs) compresos entre atac i atac d'un patró rítmic. Aquest espectre s'anomena *vector d'intervals*. Vegem un exemple clarificant: el vector $[0,1,2,2,0,3,2,0]$ és el vector d'intervals del ritme de la figura 5, on el nombre de la i -èssima posició ens indica el nombre d'arcs de longitud i determinats pels parells d'atacs del patró rítmic. Hi ha 8 posicions ja que el ritme consta de 16 batecs i l'entendem com a cíclic, per tant, la màxima longitud dels arcs mesurada en batecs és 8. Observem que donat un patró amb n atacs, el nombre total d'arcs que podem formar es calcula fent $(n-1)+(n-2)+\dots+1$. Per tant, la suma dels elements d'un vector d'intervals ha de coincidir amb aquest nombre. Podem representar aquests mateixos vectors com a histogrames, com en la figura 7.

El patró *Gahu* que mostrem en la figura 7, que es correspon amb la representació $[x..x..x...x...x..]$, és sovint considerat un ritme potent i enginyós. Observem que és l'únic que el seu vector d'intervals només conté 2, 1 i 0. Ens preguntem, doncs, si hi ha alguna relació directa entre un ritme musicalment ben acceptat, i un vector d'intervals del ritme amb nombres petits. Tot seguit estudiem aquest tipus de vectors.

Notarem per $R[k,n]$ el conjunt de tots els patrons rítmics d' n batecs i k atacs. Observem que no tots els conjunts tenen algun ritme amb vector d'intervals constituït només per 1's, com per exemple $R[5,16]$, ja que hi ha vuit possibles distàncies diferents i tenim un total de 10 arcs (5 atacs), per tant, almenys un ha d'estar repetit. Per altra banda, existeixen conjunts R amb patrons que contenen almenys una de totes les longituds d'arc possibles. Per exemple $R[5,16]$ conté $[xx...x.x.....x..]$ i té vector $[1,1,1,2,1,2,1,1]$. Tanmateix, el ritme (a) de la figura 8 pertanyent al conjunt $R[4,12]$, té per vector d'intervals el idènticament 1. Però al seu torn, és preferible minimitzar els intervals de si-

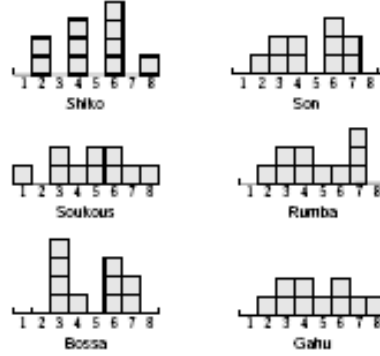


Figura 7: Representació del vector d'interval·ls en histogrames

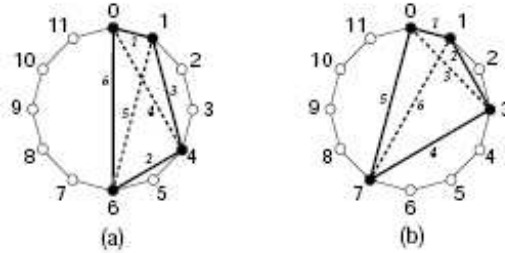


Figura 8: Dos exemples de ritmes pertanyents a $R[4,12]$

lencis (batecs sense atacs). La figura 8 (b) és l'exemple d'un patró amb vector $[1,1,1,1,1,1]$ (elements petits i totes les longituds possibles presents) pertanyent a $R[4,12]$ i amb interval·ls de silencis de longitud prou petita.

Tractarem ara els elements de $R[k,n]$ que compleixin la propietat de que per tot $i = 0, \dots, k-1$ existeixi una distància entre dos atacs que es repeteixi i vegades en el mateix patró. Els ritmes que ho compleixen s'anomenen *Erdős-deep*. El mateix val per a les escales, representades en cercles, i en tal cas són conegudes com *deep-escales* (escales profundes). L'escala diatònica n'és una. Per altra banda, es prova que els ritmes d' $R[k,n]$ *Erdős-deep* compleixen el següent: són ritmes generables com els primers k múltiples (mòdul n) d'un valor m relativament primer amb n . La figura 9 mostra un patró rítmic d' $R[7,16]$ *Erdős-deep* prenent $k = 7$. Les línies de punts mostren com es genera el ritme a partir dels múltiples de $m = 5$.

Aquest aspecte de la multiplicitat dóna lloc a la propietat “ser homomètric a”. Dos ritmes seran *homomètrics* si la multiplicitat de les diferents longituds entre atacs són les mateixes. Sabent que tot polígon d' n vèrtexs coincidents amb els vèrtexs d'un polígon regular de $2n$ costats és homomètric al polígon complementari, obtenim un mètode de contrucció de ritmes homomètrics. Observem aquesta propietat a la figura 10

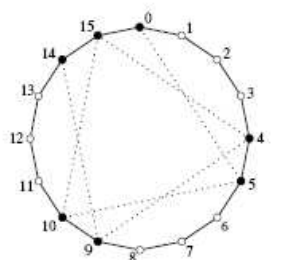


Figura 9: Patró rítmic Erdős-deep amb $k=7$

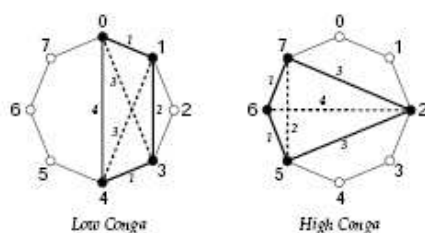


Figura 10: Dos patrons homomètrics

3.3 Assimetria i contratemp

Per estudiar el que és conegut com *assimetria rítmica* i *índex de contratemp* necessitarem la representació dels patrons en circumferències, i així poder relacionar-ho amb propietats geomètriques. Per exemplificar-ho, ens referirem a la figura 11.

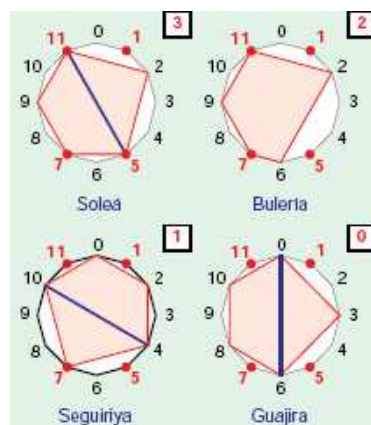


Figura 11: Patrons rítmics del flamenc

Un ritme *sincopat* és aquell que accentua batecs (atacs) que de manera natural no haurien de ser accentuats, és a dir, no es corresponen amb la tendència marcada pel compàs (ja s'ha comentat en la introducció). En aquest cas es diu

que l'atac és *a contratemps*. Tornant a la figura geomètrica, l'*índex de contratemps* és el nombre d'atacs que recauen en les posicions 1,5,7 i 11. En la figura estan marcats en vermell, i l'índex consta a la part superior dreta de cada patró.

Diem que un patró rítmic és *assimètric* si no conté dos atacs que divideixin el patró en dos semicercles. En la figura, només la Buleria és asimètrica: no podem traçar aquest diàmetre amb extrems en dos atacs. Ara bé, si considerem la representació d'un patró com a una funció que pren valors 1 o 0, aquesta propietat dona força joc. Vegem-ho.

Hem definit al principi del treball un patró rítmic com una funció $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \{0, 1\}$, on p denota el període del ritme (el nombre de batecs). Si considerem ara el conjunt de les funcions asimètriques, cal redefinir el domini de f com $\mathbb{Z}_{2n}$, ja que segons el que hem dit no podríem parlar d'assimetria amb un període senar. És clar, doncs, que un patró serà asimètric si $f(x) = 0$ implica $f(x+n) = 1$. Sigui ara S_2^n el conjunt de tots els patrons asimètrics de període $2n$, o sigui,

$$S_2^n = \{f : \mathbb{Z}_{2n} \longrightarrow \{0, 1\} ; f(x) = 1 \Rightarrow f(x+n) = 0\}$$

Per altra banda, vam dir que dues funcions f_1 i f_2 són equivalents si compleixen $f_1(x) = f_2(x-m)$ per tot x i per un cert m . L'objectiu és calcular el nombre de classes d'equivalències del conjunt S_2^n . Si prenem els n parells de la forma $\{\{0, n\}, \{1, n+1\}, \dots, \{n-1, 2n-1\}\}$, llavors és fàcil veure que S_2^n té 2^n elements. Considerem ara el subconjunt de S_2^n dels patrons amb r atacs. És a dir,

$$S_2^n(r) = \{f \in S_2^n ; |f^{-1}(\{1\})| = r\}$$

i comptem el nombre de classes d'equivalència:

observem que en tots dos casos, $S_2^n(r)$ i S_2^n , les classes d'equivalència són les òrbites induïdes per l'acció de $\mathbb{Z}_{2n}$ sobre S_2^n definida com,

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{2n} \times S_2^n &\longrightarrow S_2^n \\ (m, f(x)) &\longmapsto f(x-m) \end{aligned}$$

ja que si $f_2 \in \mathbb{Z}_{2n} f_1$ (òrbita de f_1), llavors existeix $m \in \mathbb{Z}_{2n}$ tal que $f_2(x) = f_1(x-m)$ per tot $x \in \mathbb{Z}_{2n}$. Ara, com que les classes d'equivalència hem vist que són òrbites, podem aplicar el que es coneix com el lema de Burnside.

Lema 1 (de Burnside) *Sigui G un grup finit que actua sobre un conjunt S . Per cada β de G es defineix $\text{fix}(\beta)$ com el nombre d'elements s de S tals que $\beta \cdot s = s$. Llavors, el nombre d'òrbites que indueix G sobre S ve donat per l'expressió*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\beta \in G} \text{fix}(\beta)$$

Ara, aplicant aquest lema a la nostra acció, en resulta el teorema següent:

Teorema 1 *El cardinal de S_2^n ve donat per*

$$\frac{1}{2n} \left[\sum_{d|n} \phi(2d) + \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ senar}}} \phi(d) 2^{n/d} \right]$$

on ϕ és la funció d'Euler.

Aplicant-ho a $S_2^n(r)$ enunciem,

Teorema 2 *El cardinal de $S_2^n(r)$ ve donat per*

$$\frac{1}{2n} \sum_{\substack{d|mcd(n,r) \\ d \text{ senar}}} \phi(d) \binom{n/d}{r/d} 2^{r/d}$$

4 Similaritat

Per a mesurar la semblança entre dos ritmes cal construir alguna distància. L'elecció d'una o altra distància per a comparar-ne dos, dependrà, entre altres, de la manera en què siguin representats aquests dos patrons. Tot seguit en presentem una relació.

4.1 Distància de Hamming

La *distància de Hamming* compta, simplement, el nombre de no coincidències entre els elements de dos patrons rítmics (representats com a vectors). És a dir, donats dos ritmes $X = (x_1, \dots, x_n)$ i $Y = (y_1, \dots, y_n)$ on $x_i \in \{0, 1\}$ i $y_i \in \{0, 1\}$ (forma binària d'un patró), la distància de Hamming es calcula fent

$$d_H(X, Y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

Aquesta distància no és, però, apropiada per a mesurar la dissimilaritat entre dos ritmes, ja que reflecteix l'existència de no coincidències, però no com d'allunyades es produeixen.

4.2 Distància de permutació

La *distància de permutació* entre dos patrons rítmics representats en dos vectors binaris X i Y compta el nombre de permutacions necessàries per a convertir un patró en un altre. Per exemple, els patrons $X = [101011010101]$ i $Y = [101101101010]$ necessita un mínim de quatre permutacions. Aquestes són: intercanviar el tercer, cinquè, sisè i setè atac pels respectius “silencis” que els precedeixen. Direm de $d_p(X, Y) = 4$. Tot i així, des d'un punt de vista de programació aquest mètode pot arribar a ser molt costós per a distribucions molt diferents i patrons de longitud considerable. Per a solucionar aquest problema, es proposa reescriure un patró rítmic d' r atacs com a un vector $V = (v_1, \dots, v_r)$ on v_i indica el batec on l' i -èssim atac recau. Doncs, donats dos patrons V i U representats com hem dit, la distància de permutació ve donada per

$$d_p = \sum_{i=1}^r |v_i - u_i|$$

4.3 Distància de permutació dirigida

La *distància de permutació dirigida* és una variant de la distància de permutació per a patrons rítmics amb un nombre diferent d'atacs, que no pas de batecs. Aquesta distància és el mínim de permutacions necessàries per a convertir un patró en un altre sota 3 condicions:

1. Cada “1” d’un patró X s’ha de moure a una posició “1” del patró Y .
2. Totes els “1’s” d’ Y han de rebre almenys un “1” d’ X .
3. Cap “1” pot moure’s entre la posició 0 i la n -èssima.

Notarem aquesta distància com d_{pd} . La figura 12 ens mostra un exemple.

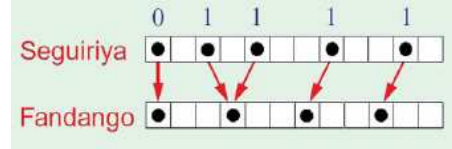


Figura 12: distància de permutació dirigida entre dos patrons rítmics típics del flamenc. $d_{pd}(S, F) = 4$

4.4 Distància cronotònica

La *distància cronotònica* utilitza la representació en TEDAS dels ritmes i les cadenes cronotòniques. Si ens referim a la frontera superior de la figura formada per la representació en TEDAS d’un patró (semblant a les cadenes cronotòniques) com a una funció f_1 , i fem el mateix amb un altre ritme obtenint f_2 , la distància cronotònica ve donada per la diferència entre les àrees de les dues figures que del·limiten. És dir, la distància cronotònica entre dos patrons A i B és

$$d_k(A, B) = \int |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

La figura 13 ens mostra l’àrea diferència entre dos patrons. Estudis determinen que aquesta distància s’ajusta prou bé a la percepció humana de dissimilaritat entre ritmes. Observem que la fórmula de càlcul de d_k coincideix amb la *distància variacional* de Kolmogorov d’estadística, sent $f_1(x)$ i $f_2(x)$ dues funcions de densitat.

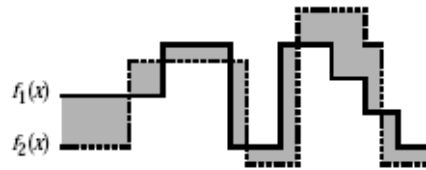


Figura 13: Distància cronotònica: àrea compresa entre dos patrons rítmics

4.5 Arbres filogenètics

L’*anàlisi filogenètic* de biologia té com a objectiu fer patent les relacions genealògiques entre sers mitjançant distàncies entre cadenes d’ADN. L’estudi dels patrons rítmics d’una regió amb una cultura determinada, recorre a aquest mètode

emprant les distàncies tractades en les seccions anteriors i exemplificant els resultats mitjançant els anomenats *arbres filogenètics*. Aquesta tècnica s'anomena *SplitsTree*.

Aquests arbres tenen la propietat de que la distància entre nodes (ritmes) reflecteix la distància real entre dos patrons rítmics. Així, la suma de les longituds de les arestes del camí més curt d'un patró a un altre, és proporcional a la distància real existent entre ells. És clar que per cada distància podem construir un arbre filogenètic. Un exemple és la figura 15, corresponent als patrons rítmics de la figura 14. L'ajust de l'arbre, és a dir, índex de bona correspondència entre



Figura 14: Patrons rítmics african i afro-americans

les longituds de les arestes i les distàncies real, es calcula dividint la suma de les primeres entre la suma de les segones. En la figura 15 apareix a la part superior esquerra. En els arbres filogenètics hi consten nodes sense etiquetar, anomenats *nodes primitius*, que suggereixen l'existència de patrons rítmic dels quals se'n deriven els altres. Els arbres construïts a partir de les distàncies cronotònica i de permutació solen tenir un bon ajust.

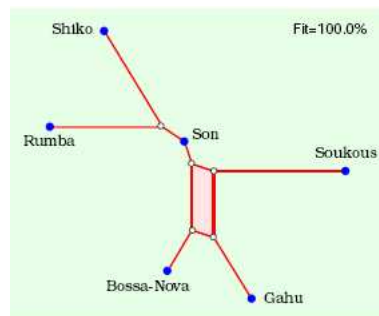


Figura 15: Arbre filogenètic amb la distància cronotònica

Bibliografía

- J. M. DÍAZ-BÁÑEZ, G. FARIGU, F. GÓMEZ, D. RAPPAPORT, G. T. TOUSSAINT, Similaridad y evolución en la rítmica del flamenco: una incursión de la matemática computacional, 2005.
- G. T. TOUSSAINT, A Comparison of Rhythmic Similarity Measures, 2004.
- G. T. TOUSSAINT, The Geometry of Musical Rhythm, 2002.
- G. T. TOUSSAINT, Algorithmic, Geometric and Combinatorial Problems in Computational Music Theory, 2003.
- E. D. DAMAINE, F. GÓMEZ-MARTÍN, H. MEIJER, D. RAPPAPORT, P. TASLAKIAN, G. T. TOUSSAINT, T. WINOGRAD, D. WOOD, The Distance Geometry of Deep Rhythms and Scales.
- R. W. HALL, PAUL KLINGSBERG, Asymmetric Rhythms and Tiling Canons, 2006.
- M. KEITH, From Polychords to Pólya: Adventures in Music Combinatorics, 1991.