



Música i Matemàtiques

Francesc Xavier Gràcia

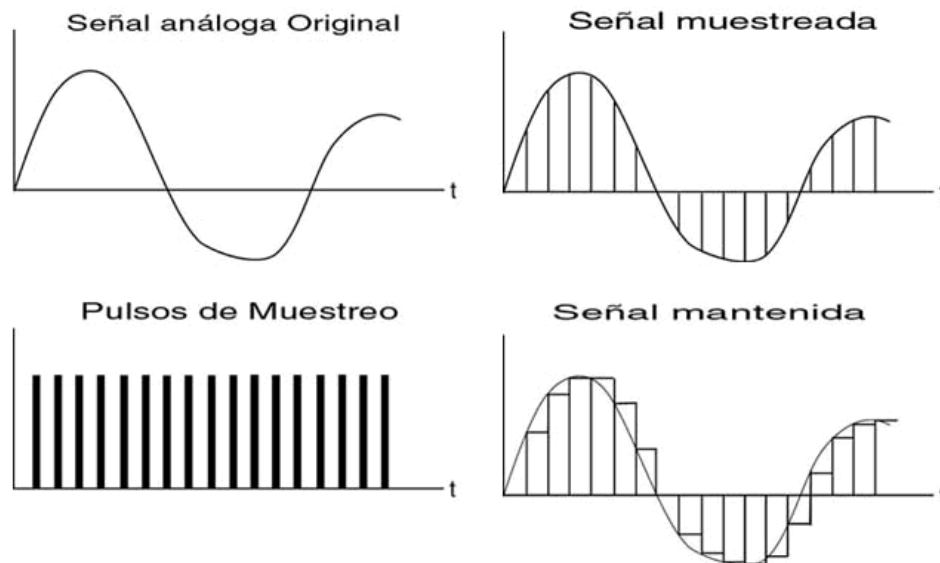
El so de la flauta – Distorsió

Ramon Gumara & Carlos González

Tractament del senyal

El senyal inicial:

Prèviament a la gravació, el so produït per un instrument musical pertany al domini del temps continu. Per poder emmagatzemar-lo es discretitza el senyal, de forma que valors numèrics ordenats constitueixen una aproximació del senyal original.



1. Mostreig i manteniment del senyal

D'aquesta manera la tria de la freqüència de mostreig es fa amb vistes a que la reproducció del senyal reconstruït per l'altaveu sigui el més fidel al senyal original.

Actualment, sabut que l'oïda humana, en promig, pot sentir freqüències en el rang 20 Hz a 20 kHz, pel teorema de Nyquist- Shannon el mostreig s'haurà de realitzar a una freqüència com a mínim del doble de la màxima (habitualment 44100 Hz). Amb aquesta freqüència (F_s) es procura que les freqüències no enregistrades (massa elevades per poder percebre-les) tampoc no siguin reproduïdes, amb el corresponent estalvi de memòria dels dispositius emmagatzemadors.

En els casos en que no es realitza un bon mostreig ($F_s < F_{\min}$) es produeix un fenomen d'emascarament, també conegut com *aliasing*, en el que les freqüències que es reproduiran no seran les correctes, percebent així un fals resultat.

Adquisició de dades:

Es farà servir el software Matlab per desenvolupar el tractament dels senyals. Les comandes d'adquisició de dades són:

Variable=wavread('Nom_arxiu.wav');

Les mostres ($-1 < \text{mostra} < 1$) de la gravació queden emmagatzemades en una matriu, les dimensions de la qual depenen de:

- Mono o estereo (1 ó 2 columnes de mostres)
- Freqüència de gravació (paràmetre intern de l'arxiu, típicament $F_s=44100$ Hz)
- Duració de la gravació

Tractament de dades:

Pel present treball es desenvoluparan 2 tractaments diferents:

- Determinació de l'espectre harmònic d'un senyal (anàlisi freqüencial)
- Modificació del senyal (anàlisi temporal)

Determinació de l'espectre harmònic:

Discrete Fourier Transform (fft):

Aquest procediment es fa servir per determinar el contingut harmònic d'una senyal periòdica:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}}$$

On:

- $x(n)$ és la matriu de mostres
- N és el nombre de mostres
- $k=0, \dots, N-1$
- $X(k)$ és el vector de dimensió N complex, on estan expressats en coordenades cartesianes el mòdul i la fase de cada freqüència.

$XK=fft(\text{Variable}, F_s);$

L'espectre és harmònic serà simètric degut al producte $k \cdot n$, trobant el mateix resultat quan $\{k=k_0 \text{ i } n=n_0\}$ i el cas contrari $\{k=n_0 \text{ i } n=k_0\}$.

Modificació del senyal:

Amb el tractament d'un senyal, en el domini del temps, la ona (en mostres) esdevindrà diferent, i lògicament el seu espectre també haurà variat.

D'aquesta manera, una primera forma d'alterar el contingut de la senyal és:

- Analitzar el seu contingut harmònic

- Aplicar una certa transformació a l'espectre obtingut (a determinades freqüències)
- Reconstruir el senyal a partir de l'espectre (*fft- inversa*)

Aquesta forma de procedir té diversos desavantatges:

- Mètode estàtic: per poder analitzar cada nota per separat s'han de fer particions de la matriu de mostres (com es decideixen aquestes particions?).
- La reconstrucció del senyal amb particions molt grans presenta un contingut considerable d'harmònics d'alta freqüència.
- Cal filtrar el nou espectre obtingut, afegint temps de càlcul.

Una altra forma de modificar el contingut harmònic de la senyal és alterar directament el valor de les mostres seguint determinats patrons.

A continuació es plantejen algunes transformacions possibles:

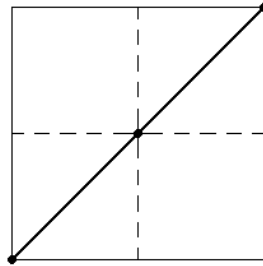
Quadratització de la ona:

Consisteix en una transformació simètrica que fa tendir totes les mostres cap als valors màxims o mínims. L'expressió per la qual es pot regular la variació de les mostres és:

$$x'(n) = \frac{(1+k) \cdot x(n)}{(1+k \cdot |x(n)|)}$$

Per a $k=0$ s'obté:

- Transformació identitat (trivial):

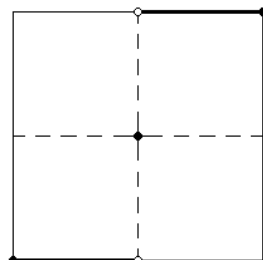


Per a $k \rightarrow \infty$ s'obté:

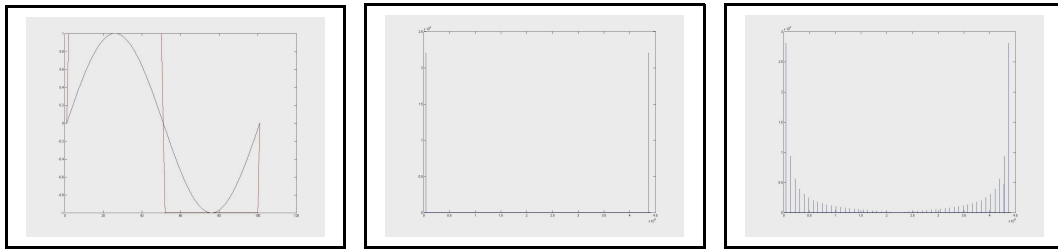
- Transformació quadrada (saturació total):

La transformació de cada mostra és del tipus:

- Si $x(n) > 0$, aleshores $x'(n) = 1$.
- Si $x(n) = 0$, aleshores $x'(n) = 0$.
- Si $x(n) < 0$, aleshores $x'(n) = -1$.

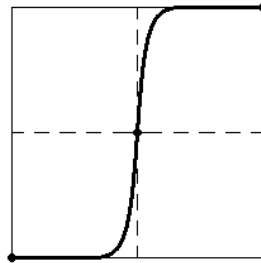


Comparació de la transformació que pateix una ona sinusoïdal: es crea un quadrat envoltant de la ona. Els espectres obtinguts per les dues ones són:

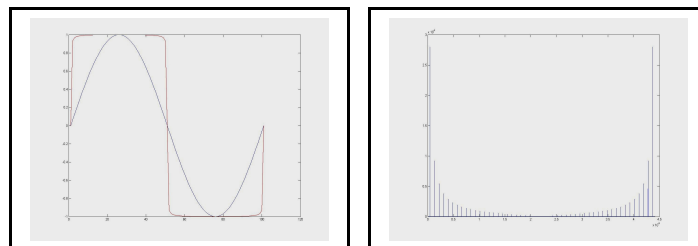


Per a valors de $k \sim 200$:

[s'obté una bona aproximació del so 'distorsió- overdrive' de la guitarra elèctrica, saturació elevada de la ona]

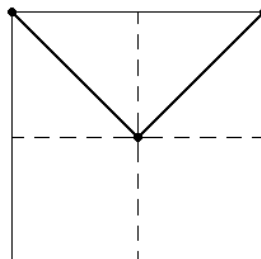


La forma d'ona obtinguda a partir d'una sinusoïdal i el nou espectre són:



Altres transformacions:

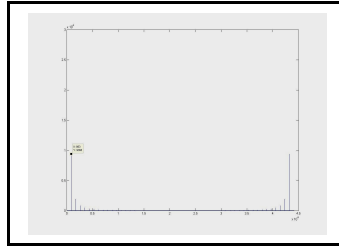
- Valor absolut. Correspon a una transformació del tipus:



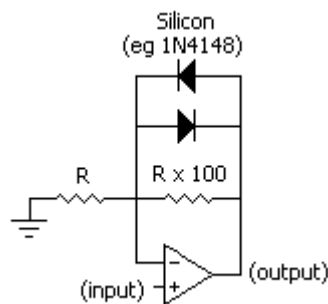
Aquesta transformació presenta dos canvis importants. Per una banda el valor mitjà és diferent de 0 (terme constant en el desenvolupament de Fourier) i per l'altra altera directament la freqüència fonamental del so,

esdevenint el doble de l'original.

L'espectre obtingut en aquest cas és:



Aprofitant aquest efecte de duplicar la freqüència base s'han construït pedaleres analògiques que empenen díodes en antiparal·lel per aconseguir el valor absolut de la senyal:

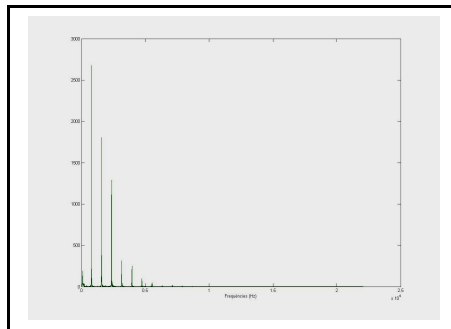


El so de la flauta

L'espectre harmònic d'un instrument no es manté constant al llarg del seu registre. Aquest fet és el que dóna coloració a les diferents notes de l'instrument.

Registre greu:

S'ha realitzat la transformada ràpida de Fourier, obtenint l'espectre de la flauta en 3 notes (Do 3, Re 3 i Sol 3). D'aquesta manera és visible l'evolució de l'espectre amb la freqüència:



Do 3			
Harmònic	Freqüència	Amplitud	Percentatge
1	265	607,50	100,00
2	530	670,80	110,42
3	795	254,00	41,81
4	1058	82,68	13,61
5	1324	94,30	15,52
6	1589	93,09	15,32
7	1850	34,99	5,76

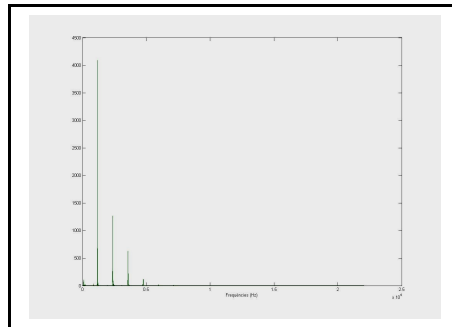
Re 3			
Harmònic	Freqüència	Amplitud	Percentatge
1	296	1799,00	100,00
2	592	1691,00	94,00
3	887	517,60	28,77
4	1182	212,20	11,80
5	1477	167,70	9,32
6	1774	170,20	9,46
7	2068	59,20	3,29

Sol 3			
Harmònic	Freqüència	Amplitud	Percentatge
1	396	2674,00	100,00
2	792	1803,00	67,43
3	1189	1289,00	48,20
4	1585	313,70	11,73
5	1980	247,80	9,27
6	2367	98,52	3,68

7	2762	51,39	1,92
---	------	-------	------

Registre mig:

En aquest registre es comença a veure com els harmònics superiors (el 7è sobretot) gairebé s'anula, i el segon es va reduint progressivament.



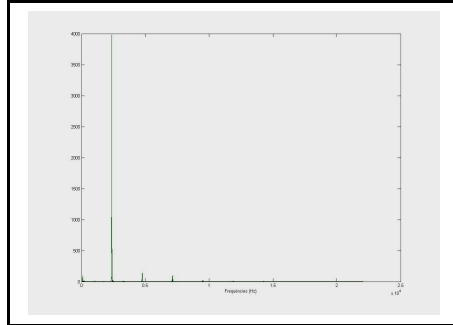
Do 4			
Harmònic	Freqüència	Amplitud	Percentatge
1	533	2069,00	100,00
2	1067	1369,00	66,17
3	1599	480,50	23,22
4	2132	142,90	6,91
5	2665	25,95	1,25
6	3195	17,29	0,84
7	3729	10,08	0,49

Re 4			
Harmònic	Freqüència	Amplitud	Percentatge
1	596	4090,00	100,00
2	1191	1264,00	30,90
3	1787	625,80	15,30
4	2382	117,40	2,87
5	2972	14,98	0,37
6	3566	10,46	0,26

Sol 4			
Harmònic	Freqüència	Amplitud	Percentatge
1	792	2108,00	100,00
2	1583	471,50	22,37
3	2374	195,70	9,28
4	3165	68,40	3,24
5	3957	36,19	1,72
6	4748	14,58	0,69

Registre agut:

L'espectre s'estabilitza, i el segon harmònic, ja oscil·la entorn del 5% de l'amplitud del fonamental.



Do 5			
Harmònic	Freqüència	Amplitud	Percentatge
1	1059	9214,00	100,00
2	2117	294,90	3,20
3	3175	225,60	2,45
4	4232	41,63	0,45
5	5290	36,19	0,39

Re 5			
Harmònic	Freqüència	Amplitud	Percentatge
1	1188	3981,00	100,00
2	2385	142,90	3,59
3	3561	96,50	2,42
4	4758	18,02	0,45
5	5935	13,57	0,34

Sol 5			
Harmònic	Freqüència	Amplitud	Percentatge
1	1596	3963,00	100,00
2	3191	253,70	6,40
3	4787	74,51	1,88
4	6380	21,39	0,54
5	7980	12,19	0,31

En el següent gràfic es pot intuir l'evolució de les amplituds de l'espectre al llarg del registre, i com a mesura que es passa del registre greu a l'agut el pes del segon harmònic va disminuint, així com els harmònics superiors van desapareixent:

