

Estudi Acústico Qualitatiu de la Trompeta

Xavier Casanovas

22 de desembre de 2005

Índex

1	Introducció	2
2	Sobre el programa	3
3	La trompeta	5
3.1	Els pistons	5
3.2	Els llavis	6
3.3	Espectre de freqüències	6
3.4	El final cònic, la campana i l'embocadura	8
3.5	Sordines	11
4	Codi del Programa	13

Capítol 1

Introducció

Les pretensions inicials d'aquest treball eren: crear un petit programa que analitzés l'espectre de freqüències d'un sò donat i usant aquest programa verificar allò après a classe sobre els espectres de diferents instruments i intentar anar més enllà deduint-ne algunes propietats no vistes a classe.

A falta de temps el treball s'ha quedat en minucies del que pretenia ser. La primera part ha estat assolida. Basicament consisteix en un petit codi implementat en el llenguatge del programa Matlab que analitza sons de forma una mica rudimentaria. Ara bé, l'extens estudi dels instruments vist a classe s'ha reduït a un estudi de la trompeta i per extensió dels instruments de vent metall.

El cos del treball consisteix en un estudi que podríem anomenar "acústico-qualitatiu" de la trompeta. Es tracta d'un repàs de les diferents parts de la trompeta i el perquè de la seva forma i llargada. Tor relacionan-t'ho amb l'espectre de freqüències obtingut usant el programa creat.

Tot i que l'estudi de l'instrument no és tant físic i matemàtic com musical, crec que podem seguir enmarcant aquest treball dins el món matemàtico-musical: l'anàlisi de freqüències seria impossible sense l'ajut de les matemàtiques.

Queda doncs pendent un treball més extens en que es podria perfeccionar el programa d'anàlisi de freqüències, es podrien treballar més instruments i des de més rigor físic.

Capítol 2

Sobre el programa

Per a poder fer un estudi més detallat de l'instrument i com a experiment he volgut fer un programa que estudiï sons prèviament gravats. Usant **Matlab** he implementat un petit algorisme que pren un arxiu en format *wav* i l'analitza tot detallant-ne la forma de l'ona i fent-ne la gràfica de l'espectre de freqüències. Em dispenso ha explicar aquells trets més importants de l'algorisme ja que això ens permetrà també entendre com funcionen certs aspectes informàtics del so que trobo interessants.

El programa llegeix els arxius en format *wav*, aquests no han de ser de llarga duració ja que l'excés de dades saturaria el programa. Com a regla general jo he pres sons d'1 segon de durada. Els sons presos han estat prèviament gravats amb un programa de gravació digital anomenat *Digital audio recorder* usant un micròfon de gamma baixa. Els arxius *wav* estan gravats de manera que prenen 44100 posicions de la ona sonora per segon, el que amb anglès s'anomena "sample rate" que aquí traduïm com a freqüència de mostreig. Usant la funció *wavread* del programa **Matlab** obtenim un vector amb les dades de l'ona sonora. Si el so durà x segons, aquests vector tindrà $44100x$ components. En aquests moments ja estem en condicions de fer un dibuix de l'ona. Per a poder observar bé la forma de l'ona usarem l'escala dels milisegons.

La part més interessant de l'estudi del so és l'ús de la transformada de Fourier. Aquest és un procés que ens permet prendre un senyal (una sinus, una ona periòdica,...) i obtenir l'amplitud de cada una de les freqüències d'aquest so. En definitiva és tracta de descomposar un funció en una base de funcions coneguda i a partir d'aquí estudiar quina és l'"importància" de cada element de la base. Això ho fem usant un potent algorisme anomenat *Fast Fourier Transform (FFT)*, que ens permet fer unes operacions d'ordre n^2 en ordre $n \log n$. Es tracta de la funció que en **Matlab** apareix com a *fft*. Aquesta funció ens retorna un vector amb les potències de totes les freqüències del senyal que nosaltres hem introduït. Això és el que ens permetrà dibuixar l'espectre de freqüències.

Un parell de consideracions a tenir en compte sobre la *FFT*. Abans hem comentat que la freqüència de mostreig en format *wav* és de 44100 Hz. Això ens està informant de que la freqüència màxima que obtenim a l'hora de gravar un so és de 44100 Hz (més del doble de la percepció humana). Aquí hi ha però un tema a considerar, és el que s'anomena el criteri de Nyquist.

Aquest criteri ens diu que per a qui no hi hagi solapaments en el so, la màxima freqüència que podem analitzar serà exactament la meitat de la freqüència de mostreig (es a dir 22050 Hz, molt proper al límit humà). Per tant la *FFT* ens donarà sempre informació sobre freqüències que estan exactament a la meitat de la freqüència de mostreig. Si prenem sons gravats a qualitat més baixa (p.e. 8000 Hz) només podem analitzar freqüències de fins a 4000 Hz!!

Una altra cosa a tenir en compte és que la *FFT* és òptima per a mostres que siguin potències de 2. Per tant mai prendrem els 44100 punts sinó només 32768. I el que és més important és que les potències que ens torna l'algorisme són complexos i per tant per a tenir una idea de la seva magnitud caldrà calcular-ne el valor absolut.

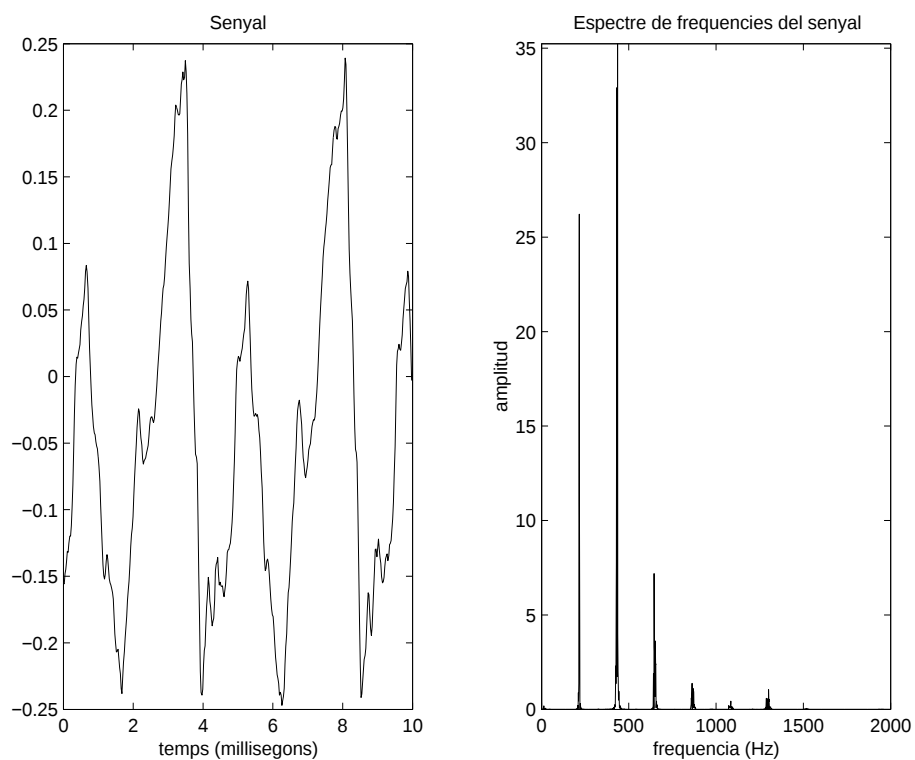


Figura 2.1: La 220 Hz cantat

Un cop obtingut el vector de potències de cada una de les freqüències en fem la gràfica.

Com a exemple tenim el dibuix de l'ona sonora i l'espectre de freqüències d'un La de 220 Hz cantat (figura 2.1).

Capítol 3

La trompeta

La trompeta és un instrument que pertany a la família dels instruments de vent metall. Es tracta d'un tub de metall cilíndric d'una llargada que oscil·la entre els 130 i els 190 centímetres. Aquesta llargada ve determinada per tres pistons que permeten modificar-la allargant el tub. Els últims 40 cm tenen forma cònica i acaben en un pavelló en forma de campana. La trompeta porta acoblada a l'inici del tub cilíndric una embocadura per a facilitar l'execució de notes.

3.1 Els pistons

Com ja sabem amb els instruments de vent, la freqüència de vibració depèn de la llargada del tub d'aire. A més llargada del tub la nota serà més greu. Això ens permet explicar el funcionament dels pistons suposant f la freqüència de vibració del tub d'aire sense cap pistó apretat:

- El segon pistó fa disminuir la freqüència inicial en aproximadament mig to. Es pot observar que la llargada del tros de tub del segon pistó és la més petita de totes.
- El primer pistó fa disminuir la freqüència inicial en aproximadament un to.
- El tercer pistó fa disminuir la freqüència inicial en aproximadament un to i mig. Per això és la que té el tros de tub més llarg.



Figura 3.1: Trompeta

Com és lògic els pistons es poden combinar. Si combinem per exemple el primer i el tercer pistó aconseguim que la freqüència disminueixi aproximadament 2 tons i mig. Això com ara veurem ens genera un problema en el cas en que vulguem apretar els tres pistons. Suposem que tenim una trompeta ideal de 100 cm en que la freqüència és inversament proporcional a la llargada. Si volem que la segona vàlvula disminueixi la freqüència en un semitò temperat caldrà que el segon pistó augmenti la llargada de la trompeta un 5,9% és a dir 5,9 cm. Ara imaginem que volem tocar una quarta temperada descendent respecte de la freqüència inicial, ens interessarà fer decreïxer un 33,5% la freqüència inicial i per tant augmentar en 33'5 cm la llargada de la trompeta. Això ens ha determinat la llargada en que augmenta la trompeta al apretar cada pistó.

Un cop determinats d'aquesta manera mirem que passa quan apremem els tres pistons. El que ens interessaria es que disminuís 6 semitons temperats. Al apretar el primer i el tercer pistó tenim 133'5 cm, i al apretar el segon augmentem 5'9 cm. Però resulta que $5,9/133,5$ ens dona un augment de 4,4%, per sota del 5,9% desitjat per a que es tracti d'un semitò temperat. Per tant aquesta nota ens quedarà aguda. Aquesta és la raó per la qual el tub del tercer pistó té un mecanisme que permet allargar-lo a voluntat del trompetista i així afinar la nota pertinent.

3.2 Els llavis

La vibració en els instruments de vent metall és produïda pels llavis de l'instrumentista. El cicle de vibració és el següent:

1. Els llavis del trompetista es troben tancats, la pressió de l'aire quan bufa el músic obliga els llavis a obrir-se.
2. Al obrir-se els llavis l'aire s'escapa. Això fa que la pressió sobre els llavis disminueixi.
3. Els llavis es tornen a tancar per la força que el músic exerceix i torna a començar el cicle.

Aquest procés no és senzill. Demana l'exercici d'una pressió molt semblant entre l'aire que lluita per sortir i els llavis que lluiten per tancar-se. Quanta més pressió exerceixin els llavis més ràpid tornaran els llavis a la posició inicial i per tant més alta serà la freqüència de vibració. Al afegir l'embocadura de la trompeta als llavis (de moment sense la trompeta) no es produeixen excessius canvis. L'embocadura permet fixar la regió dels llavis a vibrar i fa que la pressió de l'aire al sortir no sigui exactament l'atmosfèrica, això dirigeix molt més el so i l'amplifica però la seva curta longitud no permet grans canvis de freqüència.

Podem observar en les dos gràfiques (figures 3.2 i 3.3) com l'espectre de freqüències és l'armònic. El que ha ocorregut és que el so amb embocadura és més potent i amplifica alguns de les freqüències agudes.

3.3 Espectre de freqüències

Fins ara hem fet una ràpida explicació del funcionament de la trompeta. Anem ara a fer-ne un estudi des del punt de vista del seu espectre de freqüències. Veurem que aquest no és independent de la seva forma i que per tant caldrà seguir estudiant certes parts de la trompeta.

Quan estudiem els tubs d'aire separem en dos tipus: aquells que tenen els dos extrems oberts i els que tenen un extrem obert i l'altre tancat. La trompeta entra dins d'aquest últim grup. Entenem per extrem obert el de la campana i per extrem tancat els llavis del trompetista.

Per a obtenir-ne una equació genèrica haurem de resoldre l'equació d'ones prenen la condició de pressió 0 (l'atmosfèrica) a l'extrem obert i de pressió màxima (condició sobre la derivada) a l'extrem tancat. Recordem l'equació que resulta de resoldre aquest problema usant la teoria d'Sturm-Liouville:

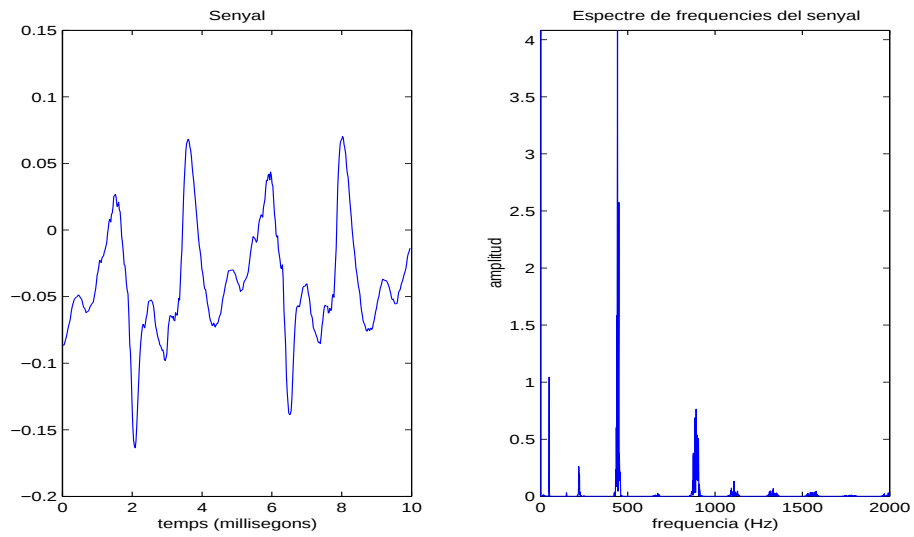


Figura 3.2: La 440 Hz fent vibrar els llavis

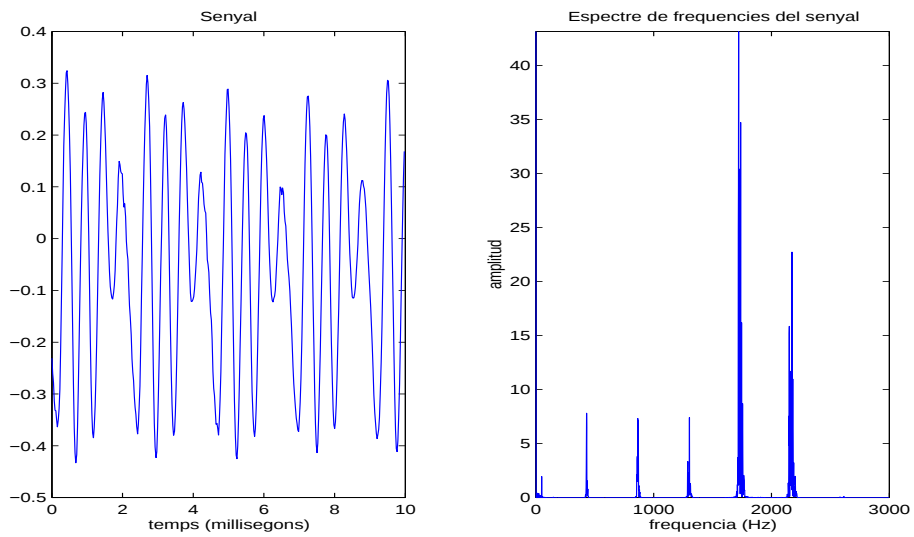


Figura 3.3: La 440 Hz fent vibrar els llavis amb una embocadura

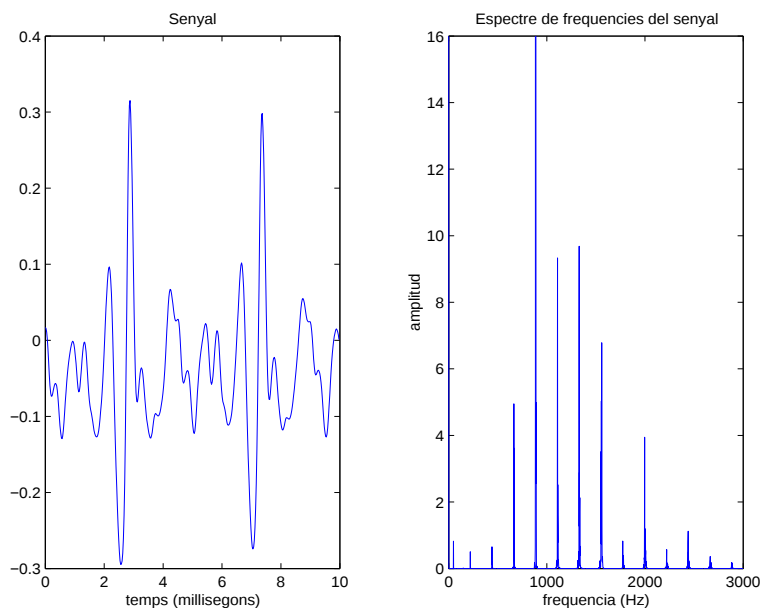


Figura 3.4: La 220 Hz de trompeta

$$u(x, t) = \sum \left(A_n \cos\left(\frac{c(2n-1)\pi t}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{c(2n-1)\pi t}{L}\right) \right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)$$

On u és la pressió en funció de la posició dins el tub i del temps, L és la llargada del tub i les amplituds A_n i B_n vindran donades per les condicions inicials. Com ja sabíem, les freqüències són inversament proporcionals a la llargada del tub i només trobem entre l'espectre de freqüències els harmònics imparells. El fet que l'espectre no sigui harmònic queda molt ben reflectit en l'explicació que és fa dels sobretons del tub d'aire usant diagrames de pressions.

Per a entendre com és formen els harmònics dins un tub d'aire podem pensar en la següent explicació més qualitativa que física. Quan la ona sonora original travessa el tub no tot l'aire surt fora del tub sinó que n'hi ha que torna a entrar a dintre. Aquest que entra dintre provoca una ona de pressions de diferent amplitud i sentit contrari a l'ona inicial (el que s'anomena freqüència de ressonància), i es suma a aquesta creant l'ona de pressions del primer sobreton. Igualment amb els següents sobretons. D'aquesta manera obtenim l'espectre de freqüències imparell d'un tub d'aire.

Ara bé, un senzill experiment com l'anàlisi de l'espectre de freqüències de la trompeta ens farà palès que de fet aquest és harmònic i té un espectre on apareixen totes les freqüències múltiples a la fonamental (figura 3.4). Perquè és així quan la teoria ens diu el contrari? Aquí és on entra en joc l'embocadura i l'original forma de campana del final de la trompeta.

3.4 El final cònic, la campana i l'embocadura

Si observem els instruments cònics veurem que aquests tenen ressonàncies les freqüències de les quals són més altes i menys separades en distancia que les d'un tub cilíndric. Per tant un podria pensar que introduint una forma cònica al final del tub cilíndric podríem augmentar les freqüències de ressonància de les ones més greus. La campana també contribueix a aquest efecte, les ones més llargues (les que corresponen a freqüències baixes) tenen més dificultats a l'hora de continuar la corba de la campana i

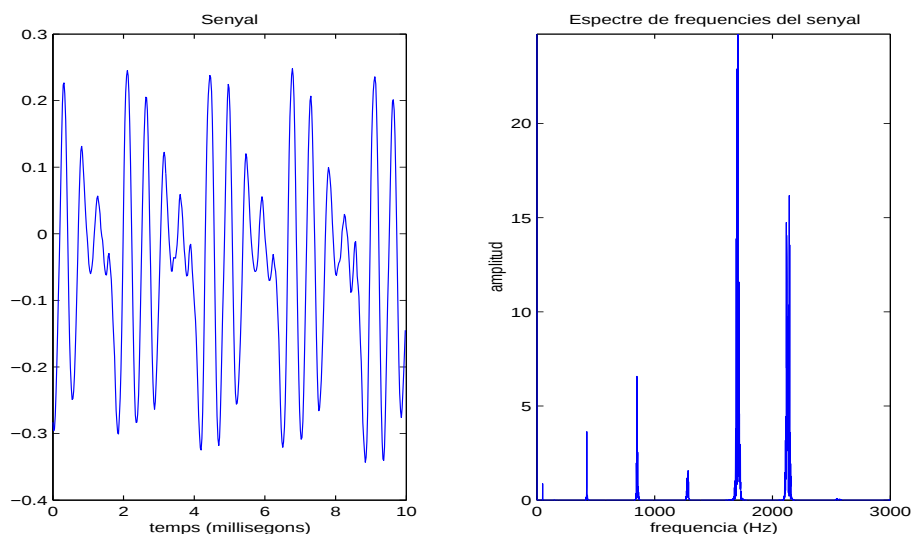


Figura 3.5: La 440 Hz amb una embocadura de copa petita

per tant son reflectides abans que les ones més curtes (corresponents a freqüències més agudes). Això és per que la longitud d'ona és molt més gran que el radi de curvatura de la campana. Això farà que totes les freqüències sonin més altes encara i que les freqüències altes siguin amplificades. Aquesta és la característica principal que fa que els instruments de vent metall tinguin aquest so tan brillant.

Pel que fa a l'embocadura, aquesta també contribueix a modificar l'espectre de freqüències. Hi ha una sèrie d'efectes acústics provocats per la forma de copa i per la petita constricció del diàmetre del tub de l'embocadura un cop aquesta està acoblada a la trompeta. La principal aportació és una disminució de la freqüència de les ressonàncies més agudes. Una copa molt gran donarà unes notes greus de gran amplitud però dificultarà tocar en els registres aguts. En canvi una copa més petita, ajudarà a tocar freqüències elevades però el so serà més "petit". En les grafiques (figures 3.5 i 3.6) observem clarament com la copa petita fa disminuir l'amplitud d'algunes freqüències baixes.

La suma dels tres efectes (forma cònica al final, campana i embocadura) fa que l'espectre de freqüències del que seria un tub cilíndric (freqüències imparells) passi a ser un espectre harmònic completament normal. Aquest efecte queda molt clar observant l'exemple següent.

Suposem un tub cilíndric de 130 cm amb una freqüència fonamental F que correspon a la nota C2. Com a tot tub cilíndric les seves ressonàncies corresponent amb els múltiples senars de la freqüència fonamental. Ara afegim una embocadura a l'inici i a final una secció de forma cònica i acabada en campana. Les ressonàncies augmenten la seva freqüència (efecte cònic i de la campana) i les ressonàncies més altes es veuen disminuïdes (efecte de l'embocadura) de la manera següent:

D'aquesta manera hem aconseguit que les ressonàncies en la trompeta siguin una sèrie harmònica completa amb l'excepció de la fonamental. La ressonància més baixa ha desaparegut de la sèrie. Tot i això, gràcies als llavis del trompetista, és possible de tocar com a nota pedal. El que ocorre és que les ressonàncies ($2F$, $3F$, $4F$,...) es combinen per ajudar als llavis a establir una vibració no lineal que tingui la freqüència de la fonamental. Aquest és un efecte físicament molt estudiat i molt característic dels oscil·ladors no lineals. Quan oscil·lacions de dos freqüències f_1 i f_2 són introduïdes en un sistema no lineal produeixen termes de suma i diferència: és a dir, vibracions amb un rang de freqüències que inclouen f_1+f_2 i f_1-f_2 . És fàcil trobar dos freqüències en les notes pedals que em produeixin la fonamental.

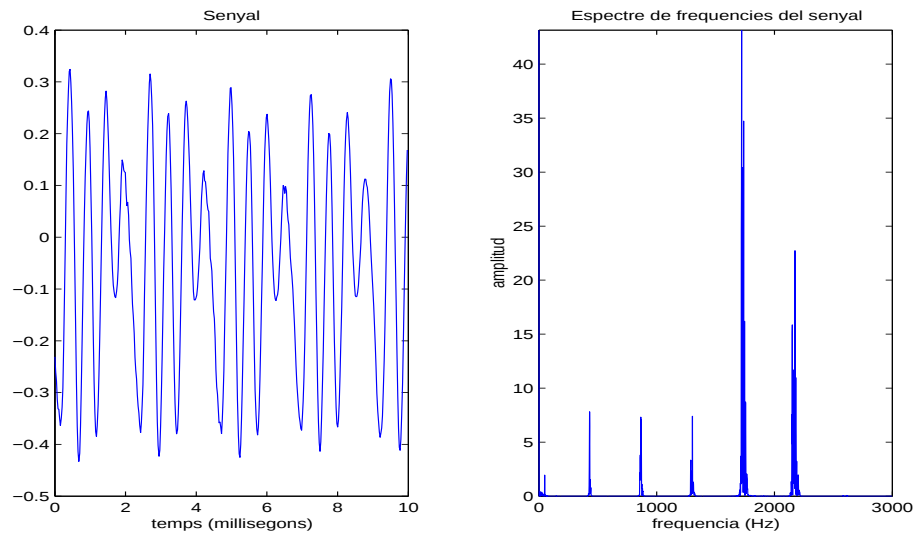


Figura 3.6: La 440 Hz amb una embocadura de copa mitjana

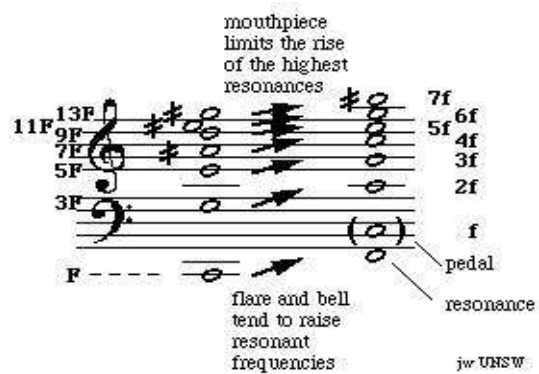


Figura 3.7: Efecte harmònic de la forma cònica, la campana i l'embocadura

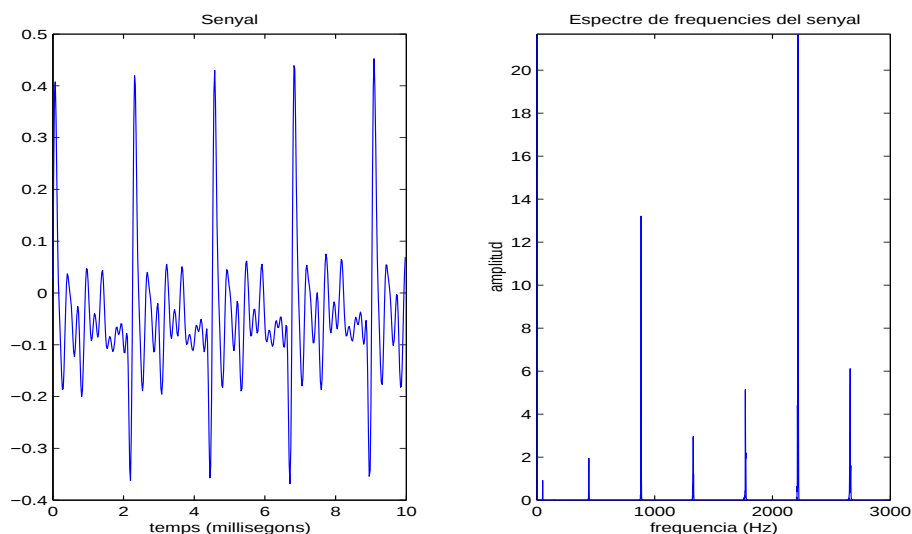


Figura 3.8: La 440 Hz de trompeta amb sordina Strike

3.5 Sordines

Un aspecte interessant a tractar dins el món de la trompeta és el de les sordines. Aquestes són un afegit que és col·loca a la campana de la trompeta per a modificar-ne el so. N'hi ha de molts tipus i molts tamanyes. En aquest cas n'estudiarem dos, la sordina Harmond i la Strike.

- Sordina Strike: Aquesta és la sordina més comú. Està feta de tal manera que redueix la radiació efectiva de moltes freqüències que ressonarien en la campana de la trompeta. Això produeix un efecte de disminució del volum del so. Tot i això no modifica excessivament el timbre de l'instrument (figura 3.8).
- Sordina Harmond: Aquesta és més especial. No sols disminueix el volum del so sinó que a més a més en canvia el timbre al modificar l'espectre de freqüències. Com podem observar (figura 3.9) l'espectre de freqüències del La a 440 Hz ha canviat completament. Les freqüències greus (entre les que es troba la fonamental i els primer harmònics) quasi bé han desaparegut, mentre que es disparen freqüències agudes que no surten a l'espectre normal de la trompeta. Dona un so molt característic que s'ha usat molt en el Jazz.

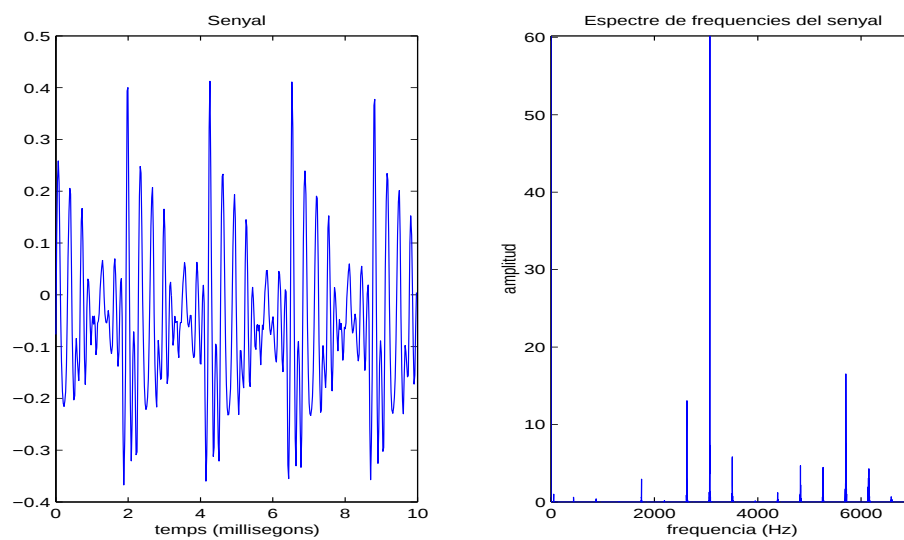


Figura 3.9: La 440 Hz de trompeta amb sordina Harmond

Capítol 4

Codi del Programa

En aquesta secció he copiat el codi en Matlab del programa per analitzar l'espectre de freqüències:

```
%%%%%%%%Entrada per arxiu
[y,fs,bits]=wavread('nom de l'arxiu.wav');
t= 0:(1./fs):0.5;
pas=32768;
%%%%%%%%%%%%Entrada analítica
%fs=44100
%t = 0:(1./fs):0.5;
%y=1./2*(sin(2*pi*880*t))+1./4*(sin(2*pi*1320*t))+1./8*(sin(2*pi*1760*t)) +1./16*(sin(2*pi*2200*t));
%y=sin(2*pi*440*t);
%%%%%%%%%%%%Dibuix de la ona
subplot(1,2,1)
plot(1000*t(1:fs/100),y(1:fs/100))
title('Senyal')
xlabel('temps (millisegons)')
%%%%%%%%%%%%Calcul de l'espectre de freqüències
Y = fft(y,pas);
Pot = Y.* conj(Y) / pas;
f = fs*(0:pas/2)/pas;
dB=10*log10(Pot);
%%%%%%%%%%%%Càlcul de dades interessants
[maxy,posicio]=max(Pot(3:(pas/2)+1));
posicio=posicio+2;
f(posicio)
%%%%%%%%%%%%Dibuix de l'espectre
subplot(1,2,2)
plot(f,Pot(1:(pas/2)+1))
axis([0 3000 0 maxy])
title('Espectre de frequencies del senyal')
xlabel('frequencia (Hz)')
ylabel('amplitud')
```

Bibliografia

- [1] Fletcher, N. i Rossing, T. "The physics of musical instruments, Second Edition". Springer, New York, 1998.
- [2] Benson, D. "Maths and Music" <http://www.math.uga.edu/~djb/html/math-music.html>
- [3] Casanovas, X. i Roca, J. "Acústica Musical" Treball per a l'assignatura Models Matemàtics de la Física