



FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

Una equació unidimensional per modelitzar l'aire a l'interior d'un pavelló axisimètric amb perfil corbat

Música i Matemàtiques
22 de Desembre de 2010

Profesor: Xavier Gràcia Sabaté
 Lali Barrière

Autor: Oriol Bové Tous

Índex

1. Introducció	Pg. 3
2. Pavellons: definició i generalitats	Pg. 3
3. Equacions de pavellons	Pg. 5
3.1 Equació de Webster	Pg. 6
3.2. Equació d'ona integrada en un pavelló de revolució amb perfil curvilini i sense pèrdues.	Pg. 6
3.2.1. Límit de l'equació per a ones planes (Equació de Webster)	Pg. 11
3.2.2. Ús de coordenades locals	Pg. 11
3.2.3 Limitacions de l'equació	Pg. 16
4. Resum i observacions	Pg. 16
5. Bibliografia	Pg. 17

1.Introducció

Aquest treball encaixa dins del contingut de la assignatura de lliure elecció: *Música i Matemàtiques* de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC. Es pretén ampliar coneixements donats a classe. Concretament s'amplia el tema dedicat a la modelització d'instruments musicals de vent.

Tots els instruments de vent basen el seu comportament acústic en fer vibrar una columna d'aire. Es pot modelitzar una equació en derivades parcials per al comportament de columnes d'aire de longitud finita imposant condicions de frontera als seus extrems. Aquesta equació pot ser unidimensional, es a dir, que només consideri com a variables el temps i la posició longitudinal. La seva solució resulta separable. Pel que fa a la variable de sortida que es vol obtenir, hom pot considerar la deformació o bé la pressió. Resoldre la deformació o pressió per al cas unidimensional no representa una dificultat, si be quan es parla d'un nombre major de dimensions, aquestes depenen de la direcció considerada. Si se suposa la existència de superfícies equipotencials es pot considerar que la pressió és un camp escalar.

Tot seguit es comentarà breument com la vibració d'una estructura genera ones sonores. Per a que tal fenomen succeeixi cal, d'una banda, un medi de propagació per a les ones, i de l'altra, un cos o estructura que pertorbi aquest medi, tot generant una oscil·lació forçada d'aquest. En el cas d'un instrument de vent, l'estructura vibrant és la columna d'aire, mentre que el medi de propagació de les ones és l'aire (el que hi ha entre l' instrument i el receptor).

El pavelló és un element que es situa a l'extrem obert d'una columna d'aire. Aquest té per objectiu millorar l'eficiència amb que aquesta columna d'aire pertorba el medi.

Aquest treball tracta una modelització del comportament de l'aire a l'interior d'un pavelló de revolució, de perfil amb curvatura. L'equació a que s'arriba al final del treball és la plantejada per Agulló, Barjau i Keefe el seu article "*Acoustic Propagation in Flaring, Axisymmetric Horns: I A New Family of Unidimensional Solutions*" [1]

2.Pavellons: definició i generalitats

El pavelló és un element que, en menor o major mesura, acostuma a ser present en la major part dels instruments musicals de vent (en que la persona bufa per obtenir so).Tot seguit es mostra l'aspecte d'un pavelló en una tuba:



s'observen dues parts diferenciades, d'una banda el conducte de secció constant i de l'altre el de secció creixent (corresponent al pavelló)

L'objectiu del pavelló és de proveir d'una impedància acústica entre la font (columna d'aire del instrument de vent) i el medi exterior. En aquest treball no s'entra en detall amb el significat d'impedància acústica, però a grans trets, augmentar-la implica augmentar la pressió sonora d'un fluid a costa de disminuir la velocitat (o energia cinètica) de les partícules que el composen. Impedància acústica $\equiv Z = \frac{p}{v}$

Un pavelló acostuma a ser definit com un conducte tancat pels laterals, la longitud del qual acostuma a ser considerable enfront de les seves dimensions diametral. És digne d'esment que la solució d'una equació que modela un pavelló amb longitud finita i que incorpori la sortida d'aire al medi exterior es molt complicat i per tant, l'efecte radiant d'un instrument musical de vent no es modela. És a dir, les equacions de pavellons que s'estudien tenen longitud infinita.

3. Equacions de pavellons

Per tal de trobar equacions que modelin el comportament de l'aire dins dels pavellons, cal resoldre l'equació d'ones sota unes certes condicions de contorn en uns elements de volum determinats. Cal d'una banda, que la superfície del pavelló tingui un flux nul a través d'ella. Això s'obté imposant $\nabla p \cdot n = 0$ on p és el camp escalar de pressions i n el vector normal a la superfície que tanca el pavelló. Les condicions d'extrem (de problema de valor a la frontera) serien aplicades en el cas que el pavelló tingués longitud finita.

Aquest treball es concentrarà en trobar l'equació que modela l'aire a l'interior d'un pavelló de perfil curvilini. Per a la obtenció d'aquesta equació, se suposarà l'existència d'unes superfícies equipotencials (condició necessària per tal que es pugui considerar que la pressió és un camp escalar), en les que la pressió serà constant. Aquestes superfícies són, a més, invariants amb el temps. D'altra banda, caldrà trobar un sistema de coordenades en el qual una superfície amb una de les coordenades constant i de valor definit respongui al perfil del pavelló. També cal que una altra de les coordenades, feta constant respongui a les superfícies equipotencials. D'aquesta manera l'equació resultarà separable en aquest sistema. Vegem-ho:

Suposem el sistema de coordenades $\{u, v, w\}$, on la coordenada " $u=ct$ " correspon a les superfícies equipotencials. Llavors, la solució de l'equació és $p = F(u, v, w, t)$. Si derivem p respecte qualsevol variable les demés variables romanen constants, així doncs $\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial w} = 0$ donat que per $u=cte$ (superfície equipotencial) i $t=ct$ la pressió és constant al llarg d'una superfície equipotencial en un instant determinat. Per això es pot escriure $p = F(u, t)G(v, w)$. I a més, $G(v, w) = ct$ de tal manera que es pot introduir la constant dintre de l'expressió de F i s'arriba a que $p = F(u, t)$ (equació unidimensional). Caldrà veure quan es resolgui l'equació per un contorn i unes superfícies equipotencials particulars, si aquesta equació també és separable pel que fa a t i u (és a dir, si es possible expressar $p = F(u)G(t)$).

Pel que fa a aquests sistemes de coordenades, Helmholtz va estudiar que n'hi havia 11 de possibles si es restringien a aquells que portaven a formes quadràtiques confocals com a superfícies equipotencials (condició d'altra banda també necessària perquè la solució fos separable). De tots aquests sistemes per això, només els corresponents a coordenades el·lipsoïdals (amb perfil de pavelló en forma d'hiperboloide d'un full) i les esfèriques (que donen perfil cònic al pavelló i que no s'estudiarà) tenen interès.

També se suposa que no hi ha pèrdues de freqüència amb les parets del pavelló ni cap altra pèrdua d'energia (totes les potències seran conservatives). Finalment s'estudiarà l'equació d'Agulló-Barjau, en que, a més, es demana ortogonalitat entre superfície equipotencial i contorn del pavelló per a un perfil donat. Aquesta situació obliga a l'ús d'unes coordenades locals com es veurà més endavant.

Per al desenvolupament de tot plegat, es plantejarà una equació en derivades parcials unidimensional.

3.1. Equació de Webster

S'han proposat al llarg de la història (més o menys recent) diverses equacions que modelen la propagació d'ones a l'interior d'un pavelló.

Daniel Bernoulli, Lagrange i Euler en varen desenvolupar al segle XVIII i Al segle XIX Green i Helmholtz. A principis del segle XX Rayleigh i Webster van arribar a la següent equació:

$$\frac{\partial^2 p(z, t)}{\partial t^2} = \frac{c^2}{A(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[A(z) \frac{\partial p(z, t)}{\partial z} \right] \quad (1)$$

On $A(z)$ es l'àrea transversal en el punt z i c la velocitat de propagació del so en el medi. Aquesta equació modela la propagació d'ones planes (les superfícies equipotencials són plans) a través d'un pavelló de perfil variable. La propagació plana d'ones pot ser usat en una situació en que aquestes es propaguen a molt baixa velocitat. No s'entrarà en detall de com s'arriba a aquesta equació. Tot i que més endavant s'arribarà a ella com un cas particular de l'equació amb perfil curvilini de revolució.

3.2. Equació del pavelló amb superfícies equipotencials invariants en el temps amb perfil curvilini de revolució

Es defineix el camp escalar $p : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ com la pressió a cada punt de $\mathbb{R}^3$

L'equació d'ones en tres dimensions s'expressa com:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p \quad (2)$$

Es tracta d'integrar l'equació d'ones a través d'elements de volum limitats per dues superfícies equipotencials separades per una distància infinitesimal i el contorn del pavelló.

Es defineix una carta de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \phi: \quad U \subset \mathbb{R}^3 &\mapsto V \subset \mathbb{R}^3 & U &= \mathbb{R}^2 \times (0, 2\pi) \\ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) & & (x_1, x_2, x_3) & \quad V = \mathbb{R}^3 - \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0, x_3 > 0\} \end{aligned}$$

Cal comentar que tot i que la carta no ompli $\mathbb{R}^3$ això no presenta cap problema a l'hora d'integrar sobre la varietat donat que està definida a tot arreu excepte a un semiplà, que té una dimensió menys que $\mathbb{R}^3$.

Aquesta carta queda definida de manera les superfícies de l'estil $Im(\phi(a, \xi_2, \xi_3))$ són les superfícies equipotencials. Les de l'estil $Im(\phi(\xi_1, b, \xi_3))$ són superfícies de revolució al voltant de l'eix x_1 i per una 'b' determinada ($b=B$ per exemple) aquesta superfície representa el perfil del pavelló. Finalment les superfícies de l'estil $Im(\phi(\xi_1, \xi_2, c))$ són els plans que passen per l'eix de revolució del pavelló ($a, b \in \mathbb{R}$ constansts arbitràries $c \in (0, 2\pi)$). El següent gràfic il·lustra la situació.

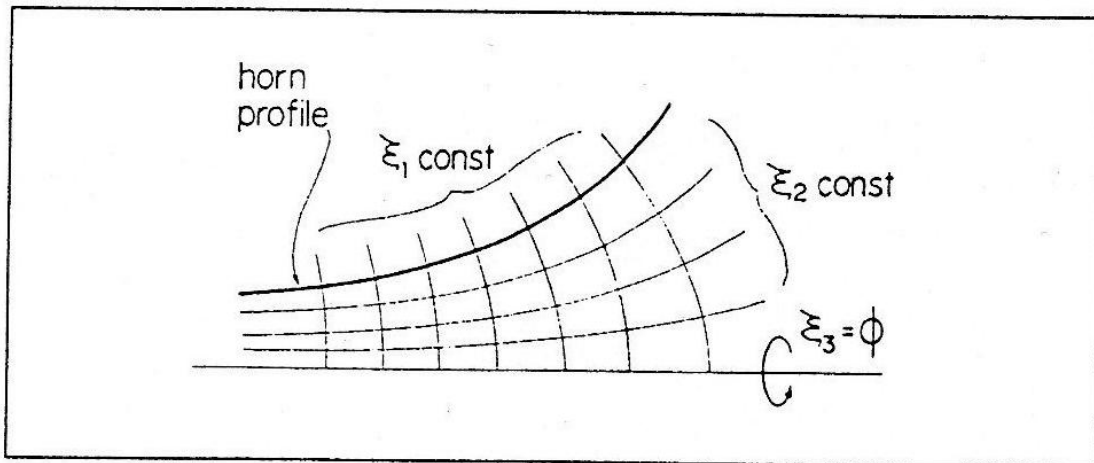
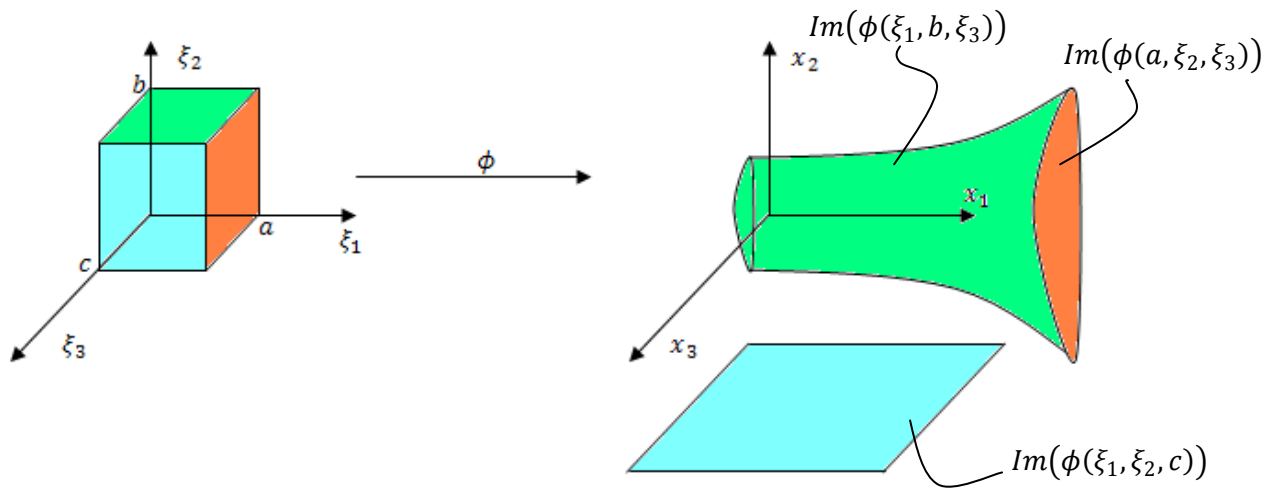


Figura 1

Així doncs els camps vectorials $(*) \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} : i = 1..3 \right\}$ generen l'espai tangent a $\mathbb{R}^3$ i defineixen un sistema de coordenades que s'utilitzarà per plantejar l'equació. Aquest sistema de coordenades serà ortogonal de cara a simplificar el problema, això implica que el producte escalar $\frac{\partial \phi}{\partial \xi_i|_p} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j|_p} = 0 \quad \forall i \neq j, \forall p \in U$. La mètrica de $\mathbb{R}^3$ en aquesta base és diagonal degut

a aquesta circumstancia. Tot seguit es mostren les expressions corresponents a l'element de longitud, element de superfície (superfície equipotencial) i element de volum expressants en components per a la base descrita pel sistema de coordenades (*). Les components no nul·les (corresponents a la diagonal) de la mètrica en aquest sistema de coordenades són $h_n^2(\xi_1, \xi_2)$. Aquestes no depenen de ξ_3 donat que s'imposa la condició d'axisimetria.

$$ds^2 = \sum_{n=1}^3 h_n^2 d\xi_n^2$$

$$dS_1 = h_2 h_3 d\xi_2 d\xi_3$$

$$dV = h_1 h_2 h_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

El gradient del camp escalar p s'escriu, en components del sistema de coordenades (*) com:

$$\nabla_n p = \frac{1}{\left| \frac{\partial p}{\partial \xi_n} \right|} \frac{\partial p}{\partial \xi_n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial p}{\partial \xi_n} \frac{\partial p}{\partial \xi_n}}} \frac{\partial p}{\partial \xi_n} = \frac{1}{h_n} \frac{\partial p}{\partial \xi_n}$$

Cal doncs, definir un element de volum que només depengui d'un paràmetre (l'equació és unidimensional) i integrar l'equació d'ones tot deixant-la només en funció d'aquest paràmetre.

Es considera $W = \{\phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 : \xi_2 \leq B\}$ el conjunt pertanyent al volum d'un pavelló de longitud infinita, $S_1(Q) = \text{Im}(\phi(Q, \xi_2, \xi_3)) \cap W$ una superfície equipotencial d'àrea $A(Q)$ i $S_1(Q+d\xi_1)$ la superfície separada $d\xi_1$ d'aquesta en la coordenada ξ_1 . En la següent figura es mostren els conjunts:

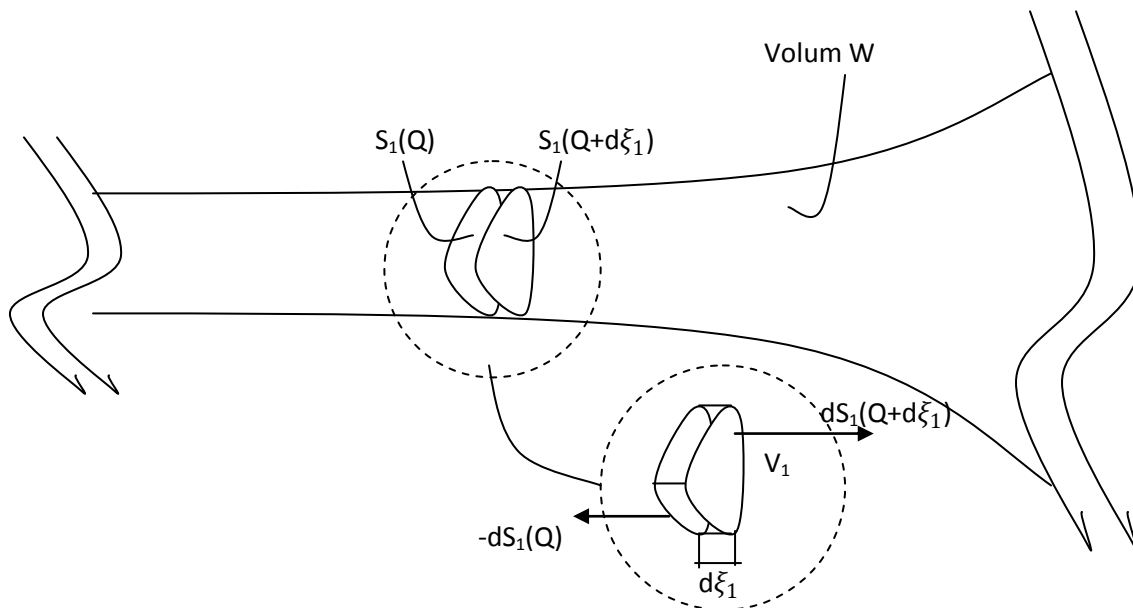


Figura 2 (les superfícies equipotencials estan dibuixades planes però no ho són a priori)

L'element de volum $V_1(Q)$ queda limitat per $S_1(Q)$, $S_1(Q+d\xi_1)$ i el contorn del pavelló. $dS_1(Q)$ es el vector normal a $S_1(Q)$. Així doncs:

$$V_1(Q) = \int_{V_1(Q)} dV = d\xi_1 \iint h_1 h_2 h_3 d\xi_2 d\xi_3$$

Tot seguit es procedeix a integrar l'equació d'ones a través d'aquest element $V_1(Q)$ per tal de trobar una equació que modeli el comportament de l'aire a l'interior del pavelló.

Es comença per integrar el membre esquerra de l'equació (2):

$$\int_{V_1(Q)} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dV = d\xi_1 \iint \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} h_1 h_2 h_3 d\xi_2 d\xi_3 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} d\xi_1 \iint h_1 h_2 h_3 d\xi_2 d\xi_3 \quad (3)$$

Com que p es constant al llarg d'una superfície equipotencial a cada instant (per definició), les derivades temporals successives també ho seran. D'aquesta manera, es pot treure $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ fora de la integral.

L'espessor de l'element de volum (depenent de ξ_2, ξ_3 , es a dir, el punt de $S_1(Q)$) té per valor mig :

$$\langle h_1 \rangle = \frac{\int_{S_1(Q)} h_1 dS}{\int_{S_1(Q)} dS} = \frac{1}{A(Q)} \iint h_1 h_2 h_3 d\xi_2 d\xi_3$$

I per tant:

$$\iint h_1 h_2 h_3 d\xi_2 d\xi_3 = \langle h_1 \rangle A(Q)$$

Substituint a (3) s'obté:

$$\int_{V_1(Q)} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dV = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \langle h_1 \rangle A(Q) d\xi_1 \quad (4)$$

Es procedeix a integrar el membre dret de l'equació:

$$\int_{V_1(Q)} \nabla^2 p dV = \int_{S_1(Q)} \bar{\nabla} p \cdot (-d\bar{S}) + \int_{S_1(Q+d\xi_1)} \bar{\nabla} p \cdot d\bar{S} \quad (5)$$

Per arribar a aquest resultat s'ha utilitzat el teorema de la divergència al llarg del volum $V_1(Q)$. Cal dir que la integral al llarg de la superfície del pavelló no apareix donat que $\bar{\nabla} p \cdot \mathbf{n} = 0$ essent $\mathbf{n}$ el vector normal a aquesta. És a dir, el gradient de pressió a través de la superfície del pavelló és nul, aquesta és una condició de contorn necessària per a arribar a l'equació.

Es procedeix a calcular $\bar{\nabla} p \cdot d\bar{S}$:

$$\bar{\nabla} p \cdot d\bar{S} = \sum_{i=1}^3 \nabla_i p dS_i$$

En les superfícies que es tracten, l'única component no nul·la de $d\bar{S}$ és dS_1 (perquè és el vector normal a S_1), i pren per valor $dS_1 = h_2 h_3 d\xi_2 d\xi_3$. Per tant:

$$\bar{\nabla} p \cdot d\bar{S} = \nabla_1 p dS_1 = \frac{\partial p}{\partial \xi_1} \frac{h_2 h_3}{h_1} d\xi_2 d\xi_3$$

Es calcula el valor mig de la funció inversa de l'espessor $\langle \frac{1}{h_1} \rangle$ al llarg de S_1

$$\langle \frac{1}{h_1} \rangle = \frac{\int_{S_1(Q)} \frac{1}{h_1} dS}{\int_{S_1(Q)} dS} = \frac{1}{A(Q)} \iint \frac{h_2 h_3}{h_1} d\xi_2 d\xi_3$$

Aïllant s'obté:

$$\iint \frac{h_2 h_3}{h_1} d\xi_2 d\xi_3 = \langle \frac{1}{h_1} \rangle A(Q)$$

S'anomena $\Omega(Q)$ a la següent funció:

$$\Omega(Q) = \int_{S_1(Q)} \bar{\nabla} p \cdot d\bar{S} = \iint \frac{\partial p}{\partial \xi_1} \frac{h_2 h_3}{h_1} d\xi_2 d\xi_3 = \frac{\partial p}{\partial \xi_1} \iint \frac{h_2 h_3}{h_1} d\xi_2 d\xi_3 = \frac{\partial p}{\partial \xi_1} \langle \frac{1}{h_1} \rangle A(Q)$$

Llavors, tornant a (5)

$$\begin{aligned} \int_{V_1(Q)} \nabla^2 p dV &= \int_{S_1(Q)} \bar{\nabla} p \cdot (-d\bar{S}) + \int_{S_1(Q+d\xi_1)} \bar{\nabla} p \cdot d\bar{S} = \Omega(Q+d\xi_1) - \Omega(Q) = \\ &= \frac{\Omega(Q+d\xi_1) - \Omega(Q)}{d\xi_1} d\xi_1 = \frac{\partial \Omega(Q)}{\partial \xi_1} d\xi_1 = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{\partial p}{\partial \xi_1} \langle \frac{1}{h_1} \rangle A(Q) \right] d\xi_1 \quad (6) \end{aligned}$$

Cal aclarir que si $d\xi_1$ és prou petit $d\xi_1 = \lim_{\Delta\xi_1 \rightarrow 0} \Delta\xi_1$ i per tant:

$$\frac{\Omega(Q+d\xi_1) - \Omega(Q)}{d\xi_1} = \lim_{\Delta\xi_1 \rightarrow 0} \frac{\Omega(Q+\Delta\xi_1) - \Omega(Q)}{\Delta\xi_1} = \frac{\partial \Omega(Q)}{\partial \xi_1}$$

Per la definició de derivada.

Finalment, s'escriu l'**equació del pavelló amb superfícies equipotencials invariants en el temps amb perfil curvilini de revolució** tot igualant (4) i (6):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\langle h_1 \rangle A(Q)} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{\partial p}{\partial \xi_1} \langle \frac{1}{h_1} \rangle A(Q) \right] \quad (7)$$

3.2.1. Límit de l'equació per a ones planes (Equació de Webster)

Pel que fa a l'equació de Webster, s'observa que s'hi pot arribar fent $\langle h_1 \rangle = 1$ i de fet, no només el valor mig és 1, $h_1(\xi_1, \xi_2) = 1$ (l'espessor diferencial $de = h_1 d\xi_1$). Es recorda que les ones que es propaguen pel pavelló corresponents a aquest model són planes i paral·leles.

$$\frac{\partial^2 p(z, t)}{\partial t^2} = \frac{c^2}{A(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[A(z) \frac{\partial p(z, t)}{\partial z} \right]$$

3.2.2. Ús de coordenades locals

Donat un perfil arbitrari d'un pavelló amb curvatura revolucionat al voltant d'un eix, si volem imposar que les superfícies equipotencials contigües $S_1(Q)$, $S_1(Q+dQ)$ hi siguin ortogonals en la seva intersecció, aquestes no tenen perquè provenir de fer una coordenada constant.

Posem un exemple: si les superfícies equipotencials són el·lipsoides provinents de les coordenades el·lipsoïdals centrades a l'origen, els hiperboloides d'un full que apareixen de fer que la coordenada corresponent sigui constant no són ortogonals als el·lipsoides sempre. En el cas on sí que succeeix això és en cas d'utilitzar coordenades esfèriques i que el perfil del pavelló sigui un con, però aquest no és un model prou acurat per als pavellons, que són curvilinis.

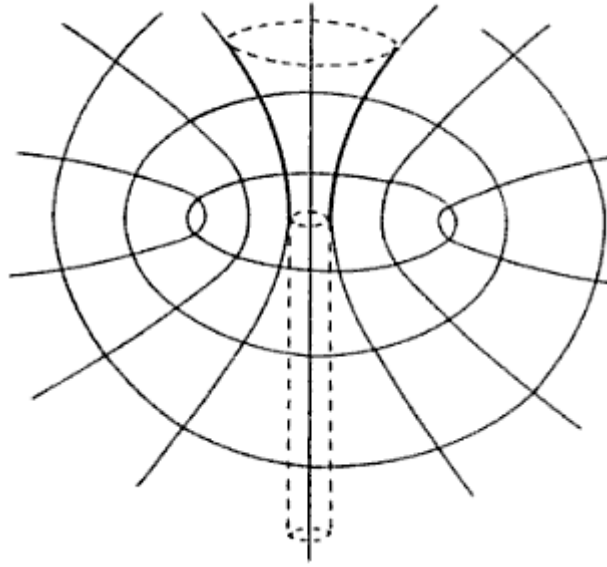


Figura 3: Superfícies resultants de fer constants dos paràmetres de les coordenades el·lipsoïdals (en resulten el·lipsoïdes i hiperboloides d'un i dos fulls, els d'un full poden ser usats contorn del pavelló i els el·lipsoïdes com a superfícies equipotencials)

Experimentalment esta comprovat que, assumint la no existència de frec amb les parets del pavelló, les esferes, o en tot cas els el·lipsoïdes de revolució, són un bon model de les superfícies equipotencials que es generen en un pavelló real i la ortogonalitat de les superfícies equipotencials amb les parets també es una hipòtesis prou aproximada (Observis que en la equació (7) el sistema de coordenades usat demana ortogonalitat entre superfícies coordenades, donat que $\left\{\frac{\partial \phi}{\partial \xi_i}\right\}$ és ortogonal). A part del problema de la no ortogonalitat entre hiperboloides i el·lipsoïdes, també es destacable el fet que els diferents perfils atribuïbles a un pavelló real poden ser molt diversos i el hiperboloide d'un full no s'aproxima prou a aquest perfil real.

Així doncs, la solució que finalment es dóna, és utilitzar un sistema de coordenades local per a cada superfície equipotencial. S'utilitzaran coordenades esfèriques o bé el·lipsoïdals centrades a un punt adient. D'aquesta manera, l'element de volum queda limitat per dues superfícies expressades en sistemes de coordenades diferents $S_1(Q)^Q$, $S_1(Q+dQ)^{Q+dQ}$. S'anomenen els sistemes de coordenades per expressar la superfície equipotencial que li correspon (segons Q) a $S_1(Q)^Q : (**) \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta_i}^Q \quad i = 1..3 \right\}$. Tot seguit es mostren les expressions corresponents a l'element de longitud, element de superfície (superfície equipotencial) i element de volum expressants en components per a la base descrita pel sistema de coordenades (**):

$$ds^2 = \sum_{n=1}^3 [h_n^Q]^2 (d\eta_n^Q)^2$$

$$dS_1 = h_2^Q h_3^Q d\eta_2^Q d\eta_3^Q$$

$$dV = h_1^Q h_2^Q h_3^Q d\eta_1^Q d\eta_2^Q d\eta_3^Q$$

Les següents imatges pretenen aclarir aquesta circumstancia:

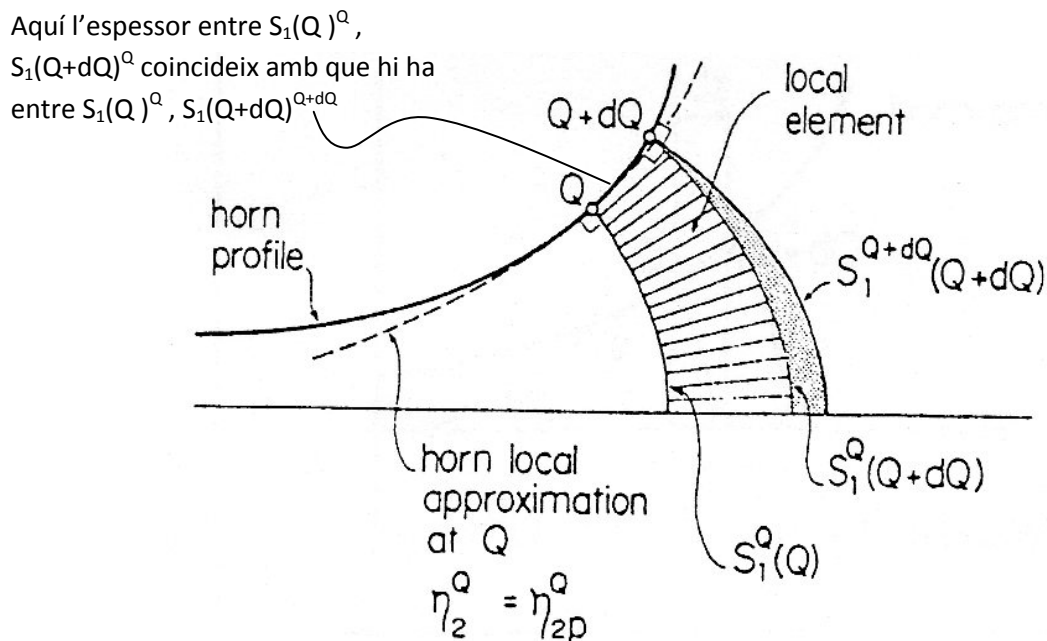


Figura 4: S'observa que donat un perfil qualsevol les superfícies $\eta_1^Q = ct$ poden ser ortogonals al perfil en un punt però no necessàriament a un punt allunyat dQ d'ell, en canvi si definim un sistema de coordenades diferent a $Q+dQ$ i fent $\eta_1^{Q+dQ} = ct$ si que es pot aconseguir.

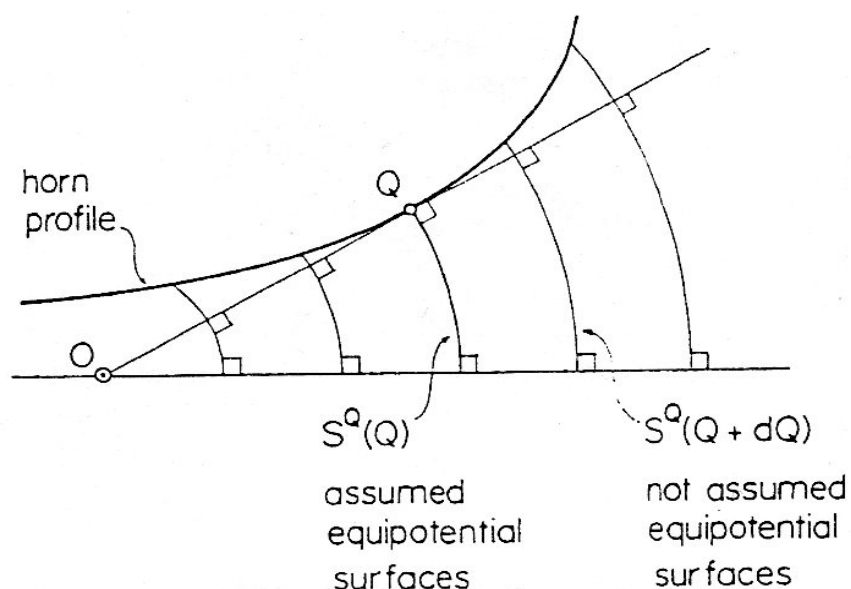


Figura 5: Aquí s'observa com les superfícies de l'estil $\xi_1 = ct$ expressades en un sistema de coordenades donat no són ortogonals al perfil en tots els punts

S'observa que les coordenades locals aproximen fins a termes de segon ordre el perfil de del pavelló ja que les superfícies definides per les coordenades locals són formes quadràtiques, hiperboloides d'un full o cons. Gràcies al fet d'utilitzar coordenades locals per a cada superfície equipotencial, el perfil del pavelló podrà ser pràcticament qualsevol, només caldrà adaptar com varien els sistemes de coordenades al llarg de Q de manera que es mantingui ortogonalitat entre superfície equipotencial i perfil. I els sistemes de coordenades s'agafaran esfèrics o be el·líptics donat que són aquells que més aproximen les superfícies equipotencials a les reals.

Cal veure que en aquesta assumpció, l'espessor del perfil no es correspon amb h_1 , donat que $S_1(Q+dQ)^{Q+dQ}$ és diferent de $S_1(Q+dQ)^Q$ i h_1 és precisament l'espessor entre $S_1(Q)^Q$ i $S_1(Q+dQ)^Q$.

Vegem-ne un exemple. Si el sistema de coordenades es l'esfèric i per tant la superfície equipotencial a Q és una esfera centrada a "O", la següent superfície equipotencial si mantinguéssim el sistema de coordenades seria una esfera centrada al mateix punt "O". En canvi, utilitzant un sistema de coordenades diferent a $Q+dQ$, la esfera del segon sistema de coordenades estarà centrada en un altre punt, diguem-li $O+dO$. D'aquesta manera, es veu que l'espessor de l'element de volum no es constant. Vegem-ho en la imatge següent.

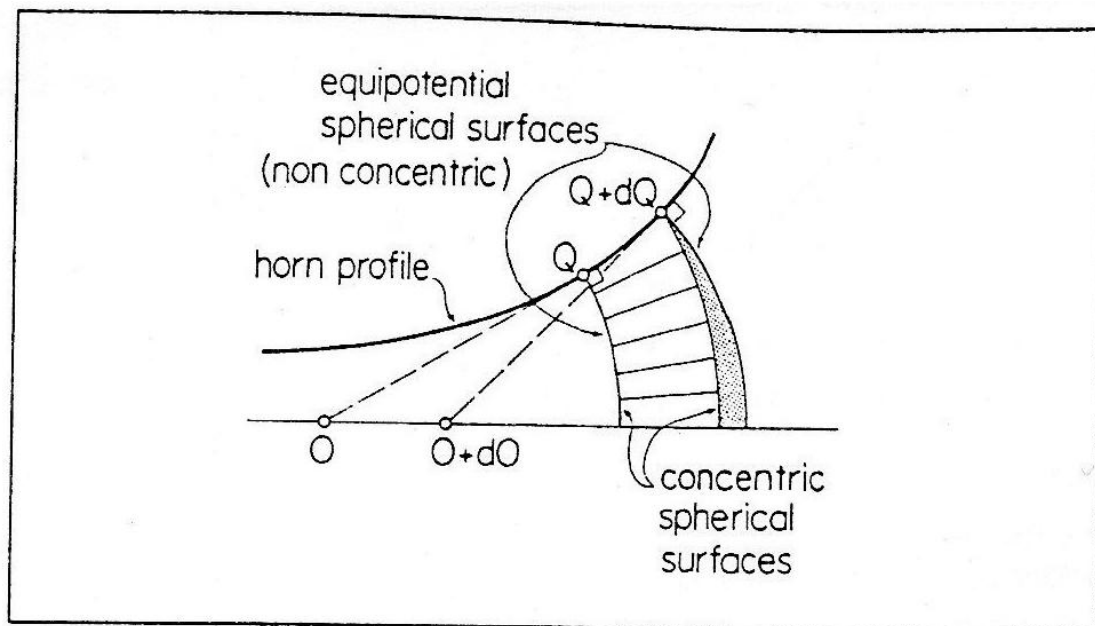


Figura 6: En aquesta figura s'observa la separació entre O i dO

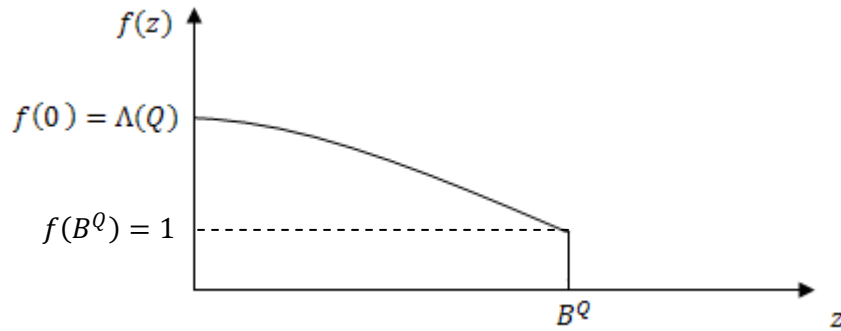
Així doncs, per tal de trobar un espessor mig existeix un problema si es vol adaptar l'equació (7) a aquestes coordenades locals, i difícil de resoldre de forma exacta. La solució que es proposa a l'article consisteix en el següent:

Pel que fa a $\{h_2, h_3\}$, aquests poden ser substituïts per $\{h_2^Q, h_3^Q\}$ en l'equació (7), ara be, h_1 s'haurà de substituir per una funció que representi l'espessor d'aquest element limitat per

dues superfícies que s'expressen en sistemes de coordenades diferents. Es proposa doncs, fer una aproximació. Es defineix una $f(z)$ tal que $dv = f(\eta_2^Q) h_1^Q d\eta_1^Q$ approximi l'espessor real (limitat per $S_1(Q)^Q$ i $S_1(Q+dQ)^{Q+dQ}$ a diferència de $dw = h_1^Q d\eta_1^Q$, que esta limitat per $S_1(Q)^Q$ i $S_1(Q+dQ)^Q$). Per tal de fer aquesta aproximació s'imposaran unes condicions a complir per $f(z)$. S'observa que els punts $\eta_2^Q = 0$ corresponen a un punt de l'eix de revolució per a cada superfície equipotencial, i els punts $\eta_2^Q = B^Q$ corresponen als cercles resultants d'interseccar les superfícies equipotencials amb el perfil del pavelló. Es defineixen a continuació les condicions que es demanen a f:

- $f(B^Q)=1$ Com s'observa al dibuix (mirar figura 4 l'espessor a $\eta_2^Q = B^Q$ coincideix amb l'espessor $h_1^Q d\eta_1^Q$, per això s'imposa aquesta condició)
- $f(0) = \frac{\text{espessor de } V_1(Q)^{\text{real}} \equiv dv_a}{\text{espessor de } V_1^Q(Q) \equiv dv_a^Q} \equiv \Lambda(Q)$ de manera que en aquest punt, on l'espessor es màxim, aquest es fa coincidir amb la diferència real entre $S_1(Q)^Q$ i $S_1(Q+dQ)^{Q+dQ}$
- $f'(0) = \left. \frac{d(f(\eta_2^Q))}{d\eta_2^Q} \right|_0 = 0$ per imposar que aquest punt és un màxim

f podria ser, per exemple, una paràbola, s'observa doncs la seva forma:



En resum, l'equació Agulló-Barjau-Keefe del pavelló resulta ser la mateixa que a l'apart 3.2. (7) amb la diferència fonamental que cal adaptar un sistema de coordenades per tal d'expressar les superfícies equipotencials que tanquen cada element de volum i també cal aproximar l'espessor d'aquest element:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\langle \delta^Q \rangle A(Q)} \frac{\partial}{\partial \eta_1^Q} \left[\frac{\partial p}{\partial \eta_1^Q} \langle \frac{1}{\delta^Q} \rangle A(Q) \right] \quad (8)$$

On $dv = \delta^Q d\eta_1^Q = f(\eta_2^Q) h_1^Q d\eta_1^Q$ es un espessor aproximat de l'element de volum i $\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta_i} \right\} i = 1..3$ és el sistema de coordenades local per a cada punt Q.

3.2.3. Limitacions de l'equació

El problema que presenta aquesta equació, és precisament que l'espessor de l'element de volum que integrem no es constant, i no només no es constant sinó que els elements de volum consecutius es deformen. En aquestes condicions assumir que el flux es unidimensional es una simplificació que té conseqüències que hom ha d'assumir si vol resoldre l'equació per mètodes numèrics, per exemple.

4. Resum i observacions

S'observa que per tal d'aconseguir una equació unidimensional que modeli el comportament de l'aire en un pavelló cal que l'equació sigui separable pel que fa a les coordenades espacials, això s'aconsegueix mitjançant l'introducció de superfícies equipotencials (que provenguin de superfícies coordenades).

La propagació d'ones planes a través d'un pavelló queda modelada per la equació de Webster. D'altra banda els sistemes de coordenades proposats per Helmholtz que porten a certes quàdriques confocals permeten modelar una equació amb superfícies equipotencials el·lipsoïdals o esfèriques. Aquesta té com a inconvenient que les superfícies equipotencials no són ortogonals al contorn del pavelló, que es correspon a una altra superfície coordenada (no s'han estudiat en aquest treball).

Finalment, de forma abstracta es pensa en un sistema de coordenades que porti a superfícies coordenades ortogonals entre elles i que representin superfícies equipotencials i el perfil del pavelló (equació (7)).

Donat un perfil qualsevol, es planteja usar unes coordenades locals per definir superfícies equipotencials a cada punt, de manera que aquestes siguin superfícies coordenades i ortogonals al perfil del pavelló. Es pensa en les coordenades proposades per Helmholtz centrades a un punt convenient (variable). Es resol mitjançant aproximacions adjacents la equació (7) (resultant-ne la equació (8)).

5. Bibliografia

- [1] J . Agulló, A. Barjau, D.H. Keefe: *"Acoustic Propagation in Flaring, Axisymmetric Horns: I A New Family of Unidimensional Solutions"* _Acustica Vol.85 (1999)
- [2] N.H. Fletcher, T.D Rossing: *"The physics of musical instruments"*, ed. Springer Verlag New York, (1998)