Matemàtiques i música: sons, espectres i escales

Xavier Gràcia i Joana d'Arc Prat

Dep. Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya
Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Estadística, UPC
20 abril 2010

xerrada per a secundària

Matemàtiques i música

Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi (Leibniz)

- Anàlisi i síntesi de so
- Espectres dels instruments musicals
- Teoria de les escales
- Teoria de la dissonància
- Transformacions i simetries en música
- Combinatòria d'acords i motius
- Estadística aplicada a la musicologia
- ...

El so

ONES SONORES

El so

El **so** és una percepció de l'oïda produïda per petits canvis de pressió de l'aire.

Els atributs físics del so es corresponen amb atributs perceptius:

- intensitat sonora / sonoritat
- freqüència / altura
- espectre / timbre
- durada

El so

El to o **altura** és un *atribut de la sensació auditiva que permet ordenar els sons en una escala que s'estén des dels més greus (baixos) als més aguts (alts)*.

No tots els sons tenen una altura definida.

- **So pur**
  Un so pur de freqüència ν, $A \sin(2\pi\nu t + \phi_\circ)$, té una altura definida, que es correspon aproximadament amb la **freqüència**.
- **So complex**
  Un so complex es pot expressar com una combinació de sons purs de freqüències (i intensitats) diverses. Aquestes freqüències formen l'**espectre** del so. En funció de l'espectre, un so complex pot tenir, o no tenir, una altura definida.

El so

En general, el sistema auditiu no permet identificar l'altura d'un to de manera precisa, però sí la **diferència d'altures**.

S'anomena **interval** la diferència d'altura de dos tons.

L'orella humana és extremadament sensible als intervals, i això és la base de la melodia i l'harmonia.

La percepció de l'altura està governada per dues **propietats fonamentals**:

- correspondència logarítmica entre freqüència i altura
- equivalència d'octaves

El so

- **Correspondència logarítmica entre freqüència i altura**
  L'interval format per dos tons només depèn de la raó de les seves freqüències.

  Exemple Intervals iguals
  Dos tons de 440 i 660 Hz formen el mateix interval que dos tons de 260 i 390 Hz, ja que

  $$660 : 440 = 390 : 260 = 3 : 2\,.$$

  En ambdós casos la freqüència del segon to s'obté multiplicant per $3/2$ la freqüència del primer.
  L'interval de raó 3:2 s'anomena **quinta perfecta**; en els dos casos podem dir que

  $$\text{segona nota} = \text{primera nota} + \text{quinta perfecta}\,.$$

Demostració

El so

Exemple Suma d'intervals

L'interval de **tercera major justa** té raó de freqüències 5:4.
L'interval de **tercera menor justa** té raó de freqüències 6:5.
La suma dels dos és l'interval de quinta perfecta, ja que $\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$:

$$\text{tercera major justa} + \text{tercera menor justa} = \text{quinta perfecta}\,.$$

Si partim d'una nota de freqüència 260 Hz, obtenim successivament $260 \times \frac{5}{4} = 325\,\text{Hz}$ i $325 \times \frac{6}{5} = 390\,\text{Hz}$.
Si partim d'una nota de freqüència 440 Hz, obtenim successivament $440 \times \frac{5}{4} = 550\,\text{Hz}$ i $550 \times \frac{6}{5} = 660\,\text{Hz}$.

Demostració  

multiplicar raons de freqüències $\longleftrightarrow$ sumar intervals
escala multiplicativa $\longleftrightarrow$ escala additiva

El so

L'**octava** és l'interval format per dos tons amb raó de freqüències 2:1.
És a dir:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{2}{1}.$$

A banda de l'*uníson* (interval entre dos tons de mateixa altura), l'octava és l'interval més important:

- **Equivalència d'octaves**
  Dos tons que formen un interval d'octava són musicalment equivalents (són percebuts com "el mateix" to).

El so

Demostració

El so

Unitats de mesura dels intervals

L'octava és la unitat natural d'interval.

Dues notes de freqüències $\nu_1 \leq \nu_2$ formen un interval de

$$x = \log_2 \frac{\nu_2}{\nu_1} \quad \text{octaves},$$

ja que $\nu_2 = 2^x \nu_1$.

Hi ha altres unitats per a mesurar intervals, per exemple:

$$1 \text{ octava} = 12 \text{ semitons temperats},$$

$$1 \text{ semitò temperat} = 100 \text{ cents}.$$

(Llindar de percepció de l'altura de dues notes que sonen consecutivament: uns 5 cents.)

El so

Exemple Quina és la raó r de freqüències d'un semitò temperat? Com que la suma de 12 semitons és una octava, es complirà $r^{12} = 2$, d'on

$$r = 2^{1/12} = 1'059463\ldots$$

Exemple Quant val una quinta perfecta expressada en octaves? I en cents?

$$\log_2 \frac{3}{2} = 0'5849625\ldots \text{ octaves,}$$

$$1200 \log_2 \frac{3}{2} = 701'9550\ldots \text{ cents.}$$

Espectre

TONS PURS, ESPECTRE HARMÒNIC

Espectre harmònic

Un **espectre harmònic** és el format a partir d'una freqüència fonamental ν amb els seus múltiples enters:

$$\nu_k = k\,\nu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Molts instruments musicals tenen espectre aproximadament harmònic.

Espectre harmònic

Corda vibrant

Corda de longitud L, tensió T, densitat lineal de massa ρ.

El so produït té espectre harmònic amb freqüència fonamental

$$\nu = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Aire en un tub amb els extrems oberts

Tub de longitud L; c, velocitat del so en l'aire.

El so produït té espectre harmònic, amb freqüència fonamental

$$\nu = \frac{c}{2L}.$$

En ambdós casos, *raons de longituds* $=$ *raons de freqüències.*

Escales

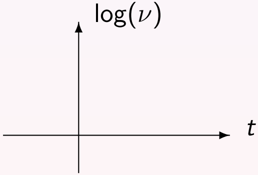
CONSTRUCCIÓ DE L'ESCALA MUSICAL

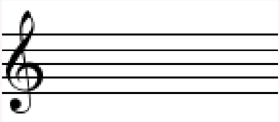
Escales

En la música normalment no s'utilitzen sons de freqüències qualssevol, només les d'una certa **escala**; són les **notes** de l'escala.

Atesa l'equivalència d'octaves, les escales musicals acostumen a tenir cada nota repetida sumant-hi o restant-hi octaves; aquestes notes repetides reben el mateix nom.

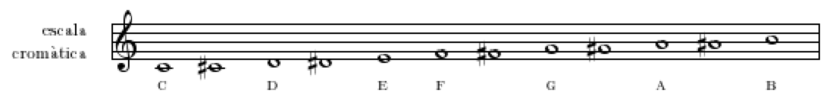
En la música occidental les notes d'una composició es representen en un **pentagrama**.





Escales

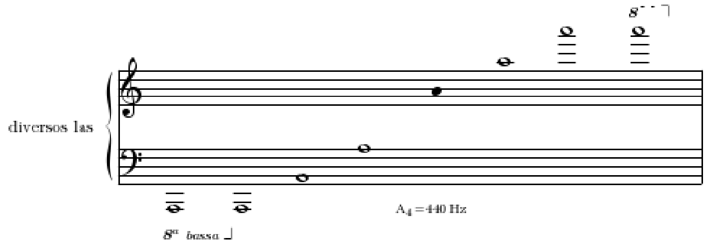
L'escala de la música occidental actual és l'anomenada **escala temperada**. Conté 12 notes en cada octava: do, do$\sharp$ $=$ re$\flat$, re, re$\sharp$ $=$ mi$\flat$, mi, fa, fa$\sharp$ $=$ sol$\flat$, sol, sol$\sharp$ $=$ la$\flat$, la, la$\sharp$ $=$ si$\flat$, si.



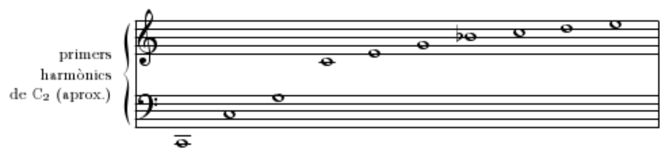
Aquestes notes estan separades per intervals iguals, anomenats semitons; un semitò correspon doncs a una raó de freqüències $r = 2^{1/12}$.

Escales

Conveni habitual: el la_4 (*la* de la quarta octava) correspon a una freqüència de 440 Hz.



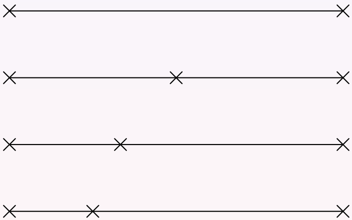
Exemple: representació aproximada dels deu primers harmònics del do_2: freqüències ν, 2ν, 3ν, ..., 10ν, amb $\nu \cong 65'4064\,\text{Hz}$.



Escales

Pitàgores de Samos, segle VI aC

Dues cordes similars, sotmeses a la mateixa tensió, en ser tocades simultàniament produeixen un so harmoniós si les seves longituds estan en **raons d'enters petits** 2:1, 3:2, 4:3, . . .



Des del temps de Galileu i Mersenne sabem que aquestes raons de longituds en realitat es corresponen amb **raons de freqüències**.

Escales

L'escala pitagòrica

Afinació justa

Una **escala justa** és aquella on tots els intervals corresponen a raons de freqüències racionals, i preferentment raons d'enters petits.

Afinació pitagòrica

Entre les escales justes, la més simple és l'**escala pitagòrica**, que es basa en l'interval de **quinta perfecta**, de raó de freqüències 3:2.

La quinta és l'interval generador de l'escala pitagòrica.

L'escala pitagòrica

Construcció d'una escala pitagòrica:

- Partim d'una **nota de referència**.
- Obtenim noves notes **sumant quintes** a la nota de referència.
- Si s'ultrapassa l'interval d'octava, es **redueix** la nota en una octava (ja que són notes equivalents).

Així, respecte a la nota inicial, obtenim els intervals següents:

- 1:1
- 3:2
- 9:4 $\longrightarrow$ 9:8 (per equivalència d'octaves)
- 27:8
- 81:32 $\longrightarrow$ 81:64 (ídem)
- 243:128
- ...

També podem fer aquest procés en sentit invers, restant quintes (i sumant octaves):

- ...
- 2:3 $\longrightarrow$ 4:3 (per equivalència d'octaves)
- 1:1

L'escala pitagòrica

Les notes obtingudes reben un nom tradicional, i una posició al pentagrama en funció de la seva altura.

- ...
- fa: raó 4:3
- do: nota de referència, raó 1:1
- sol: do + quinta, raó 3:2
- re: raó 9:8
- la: raó 27:8
- mi: raó 81:64
- si: raó 243:128
- ...

L'escala pitagòrica

Quantes notes podem construir així?

Infinites!

Ja que, si $m, n \in \mathbf{Z}$, es compleix $2^m 3^n \neq 1$ llevat que m i n siguin ambdós nuls.

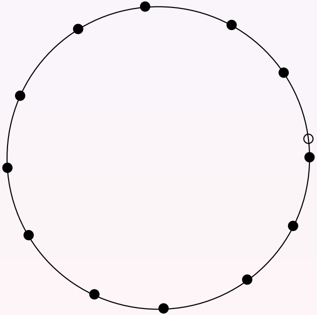
Això també està relacionat amb el fet que $\theta = \log_2 \frac{3}{2}$ és irracional.

> Si fos racional, $\theta = p/q$, llavors $\frac{3}{2} = 2^{p/q}$, o sigui $3^q = 2^{p+q}$, que requeriria $p = q = 0$.

L'escala pitagòrica

Però això és impracticable. Hi ha alguna manera raonable de tallar en algun punt?

Les escales més habituals tenen 5, 7, 12, 53 ... notes. Analitzem el cas de 12 notes.



La tretzena nota és molt propera a la primera.

L'escala pitagòrica

Inconvenients de l'escala pitagòrica

- Les terceres desafinades:

$$\frac{81}{64} \simeq \frac{80}{64} = \frac{5}{4}\,.$$

  Una tercera major pitagòrica és una **coma sintònica**

$$\frac{81}{80} \leftrightarrow 21'506\ldots \text{ cents}$$

  més gran que una tercera major justa.

- La **quinta del llop**: la distància entre sol$\sharp$ i mi$\flat$ és una **coma pitagòrica**

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} \leftrightarrow 23'460\ldots \text{ cents}$$

  més petita que una quinta normal.

L'escala pitagòrica

Solucions: escales justes, escales mesotòniques, temperaments regulars i irregulars, temperaments iguals . . .

Suggeriments bibliogràfics

T.D. Rossing, F.R. Moore and P.A. Wheeler
The science of sound (3rd ed)
Addison-Wesley, San Francisco, 2002

Gareth Loy
Musimathics, the mathematical foundations of music, vol 1
MIT Press, Cambridge (MA), 2006

D.J. Benson
Music: a mathematical offering
Cambridge University Press, 2006
`http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/maths-music.html`