

LA TEORÍA DE LA DISONANCIA: UN ENCUENTRO ENTRE MÚSICA Y MATEMÁTICAS

XAVIER GRÀCIA

Dep. Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya
Barcelona

IUMA & Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza
30 octubre 2008

La consonancia

disonancia 1. f. Sonido desagradable. (...) 3. f. *Mús.* Acorde no consonante.

consonancia (...) 4. f. *Mús.* Cualidad de aquellos sonidos que, oídos simultáneamente, producen efecto agradable.

En música, “disonante” no significa necesariamente desagradable!

Hay varios conceptos de disonancia.

Nos interesaremos específicamente por la disonancia sensorial.

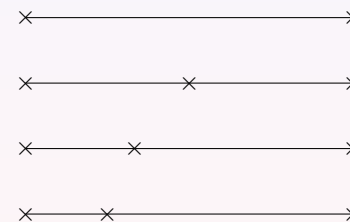
Música y matemática

- Espectros de los instrumentos musicales
- Teoría de las escalas
- Teoría de la disonancia
- Simetrías en música
- Combinatoria de acordes y motivos
- Análisis y síntesis de sonido
- Estadística aplicada a la musicología
- ...

La consonancia

Pitágoras de Samos, siglo VI aC

Dos cuerdas similares, sometidas a la misma tensión, al ser tocadas simultáneamente, producen un sonido armonioso si sus longitudes están en razones de enteros pequeños 2:1, 3:2, 4:3, ...



¡Una ley de la naturaleza regida por los enteros!

La consonancia



El sonido

Un **espectro armónico** es el formado a partir de una frecuencia fundamental ν con sus múltiplos enteros:

$$\nu_k = k \nu, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Muchos instrumentos musicales tienen espectro aproximadamente armónico.

El sonido

El **sonido** es una percepción del oído producida por pequeños cambios de presión del aire.

Los atributos físicos del sonido se corresponden con atributos perceptivos.

El tono o **altura** es el atributo de la sensación auditiva en términos del cual los sonidos se pueden ordenar en una escala que se extiende desde los más graves a los más agudos.

- Para un tono puro de frecuencia ν , $A \sin(2\pi\nu t + \phi_0)$, la altura se corresponde (aproximadamente) con la frecuencia.
- En general, un sonido se puede expresar como una combinación de tonos puros de frecuencias varias, llamadas parciales. Estas frecuencias forman el **espectro** del sonido. En algunos casos se le puede atribuir una altura definida.

El sonido

Cuerda vibrante

Longitud L , tensión T , densidad lineal de masa ρ .

Tiene espectro armónico con frecuencia fundamental

$$\nu = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Por lo tanto: razones de longitudes = razones de frecuencias.

Aire en un tubo con los extremos abiertos

Longitud L .

Tiene espectro armónico, con frecuencia fundamental

$$\nu = \frac{c}{2L}$$

(c , velocidad del sonido en el aire).

El sonido

Se llama **intervalo** a la diferencia de altura de dos tonos.

La **octava** es el intervalo formado por dos tonos con razón de frecuencias 1:2.

Propiedades fundamentales de la relación entre frecuencia y altura:

- **Correspondencia logarítmica**

El intervalo formado por dos tonos sólo depende de la razón de sus frecuencias.

- **Equivalencia de octavas**

Dos tonos que forman un intervalo de octava son percibidos como “el mismo” tono.

Sumar intervalos $\longleftrightarrow$ multiplicar razones de frecuencias.

La octava es la unidad natural de intervalo.

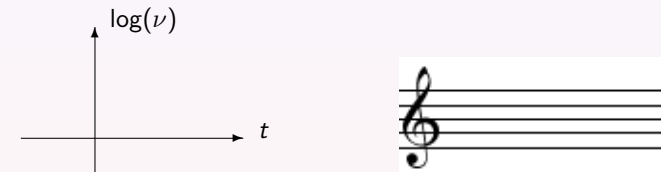
Dos tonos de frecuencias $\nu_1 \leq \nu_2$ forman un intervalo de

$$\log_2 \frac{\nu_2}{\nu_1} \text{ octavas.}$$

Las notas de la música

En la música normalmente no se utilizan sonidos de frecuencias cualesquiera, sólo las de una cierta **escala**; son las **notas** de la escala.

En la música occidental las notas de una composición se representan en un pentagrama.



El sonido

Ejemplo



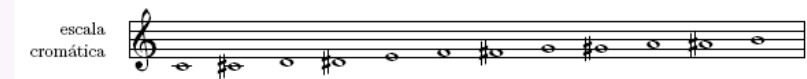
correspondencia logarítmica



equivalencia de octavas

Las notas de la música

La escala de la música occidental actual contiene 12 notas en cada octava: do, do $\sharp$ = re $\flat$, re, re $\sharp$ = mi $\flat$, mi, fa, fa $\sharp$ = sol $\flat$, sol, sol $\sharp$ = la $\flat$, la, la $\sharp$ = si $\flat$, si.

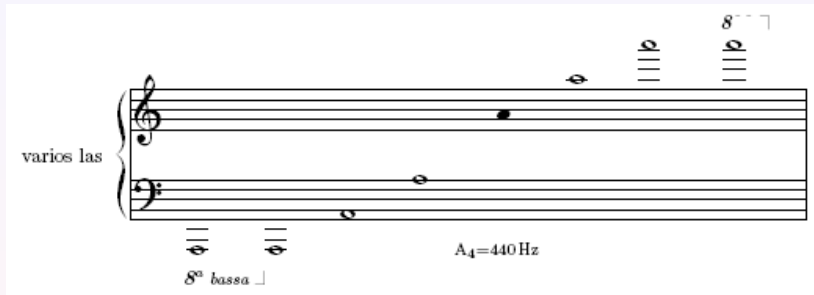


Estas notas están separadas por intervalos iguales, llamados semitonos; un semitono corresponde a una razón de frecuencias $r = 2^{1/12}$.

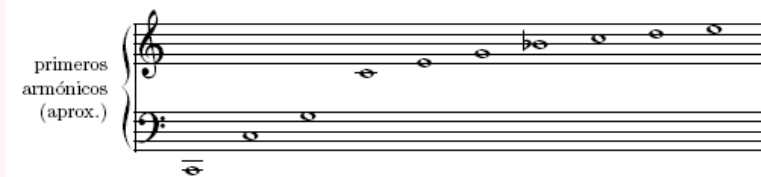


Las notas de la música

Convenio: el la_4 (la de la cuarta octava) corresponde a una frecuencia de 440 Hz.



Ejemplo: representación aproximada de los 10 primeros armónicos del do_2 :



Algunas teorías sobre la disonancia

En los siglos XVI–XVII Galileo y Mersenne relacionan la altura musical con la frecuencia.

Galileo, siglo XVII

Si las frecuencias están en razones simples de enteros hay una regularidad en la onda, de manera que el oído no está "sometido a un tormento perpetuo".

Durante el siglo XVII se descubren los espectros armónicos de los instrumentos de viento y cuerda.

Las notas de la música

Las razones simples de enteros han dado lugar a nuestra escala actual, de 12 divisiones iguales de la octava.

A partir de una nota de referencia tenemos, en el intervalo de una octava, doce intervalos posibles.

En la teoría de la música, algunos se llaman **consonantes** y otros **disonantes**.



Las razones de frecuencia de los intervalos más consonantes son cercanas a razones simples: quinta $\simeq 3/2$, cuarta $\simeq 4/3$, tercera mayor $\simeq 5/4$, tercera menor $\simeq 6/5$, ...

¿Por qué?

Algunas teorías sobre la disonancia

Sorge, siglo XVIII

La disonancia es la aspereza causada por las parciales cercanas.

Helmholtz, siglo XIX

Si la diferencia de las parciales es muy pequeña hay batidos; si es algo mayor hay aspereza; si es mayor, hay consonancia.

Plomp y Levelt, 1965

Kameoka y Kuriyagawa, 1969

Experimentos y teoría.

Hay otras teorías...

La teoría de Helmholtz

Superposición de sonidos: los batidos

Superposición de dos ondas sonoras de frecuencias ν_1 , ν_2 , por ejemplo $A \sin(2\pi\nu_1 t)$ y $A \sin(2\pi\nu_2 t)$.

De la identidad trigonométrica $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ resulta

$$A \sin(2\pi\nu_1 t) + A \sin(2\pi\nu_2 t) = 2 A \sin \left(2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t \right) \cos \left(2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t \right).$$

- Si la diferencia $\nu_1 - \nu_2$ es lo bastante pequeña la percepción es de un sonido de frecuencia $\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$ con amplitud variando lentamente; esta variación tiene una frecuencia $\Delta\nu = |\nu_1 - \nu_2|$. Se oyen los *batidos*.
- Si la diferencia es algo mayor, se percibe una cierta *aspereza*.

La teoría de Helmholtz

Hermann Helmholtz

Die Lehre von Tonempfindungen, 4a ed., 1877

On the sensations of tone, traducido por A.J. Ellis, 1885

The most penetrating roughness arises (...) from beats of 30 to 40 in a second. (p. 171)

When two musical tones are sounded at the same time, their united sound is generally disturbed by the beats of the upper partials, so that a greater or less part of the whole mass of sound is broken up into pulses of tone, and the joint effect is rough.

This relation is called *Dissonance*.

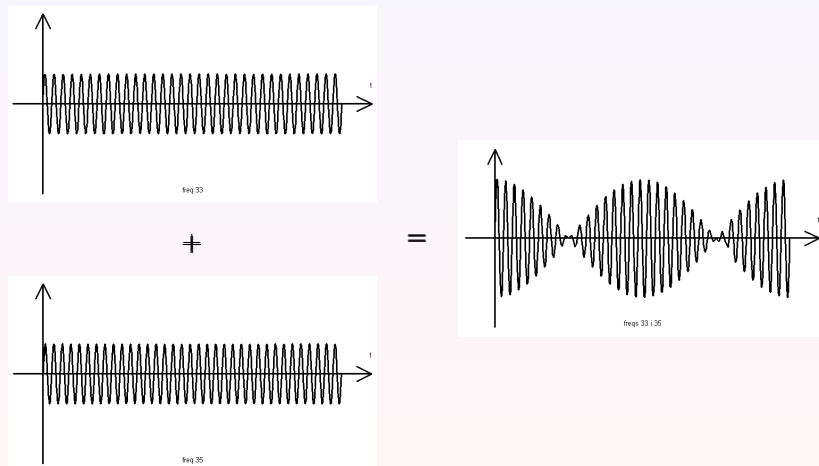
But there are certain determined ratios between pitch numbers, for which this rule suffers an exception, and either no beats at all are formed, or at least only such as have so little intensity that they produce no unpleasant disturbance of the united sound.

These exceptional cases are called *Consonances*.

(p. 194)

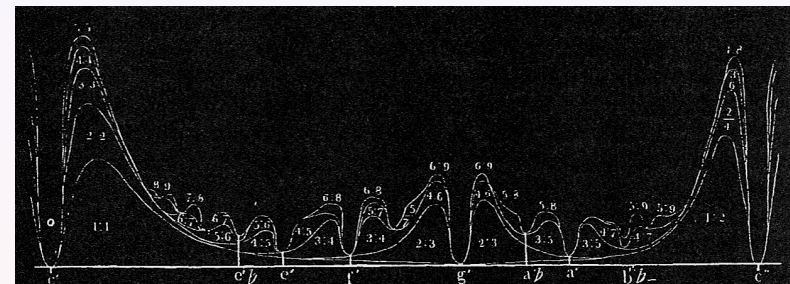
La teoría de Helmholtz

Podemos oír los batidos con algún programa que genere tonos puros. 



La teoría de Helmholtz

Cálculo de la aspereza de un intervalo según los batidos (p. 193)

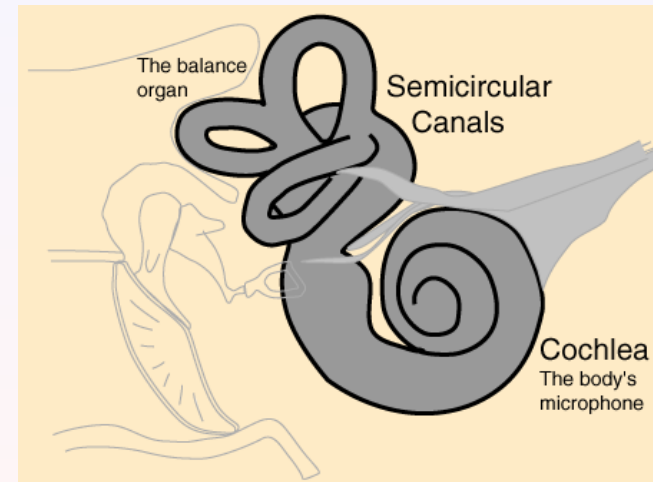


La teoría de Helmholtz



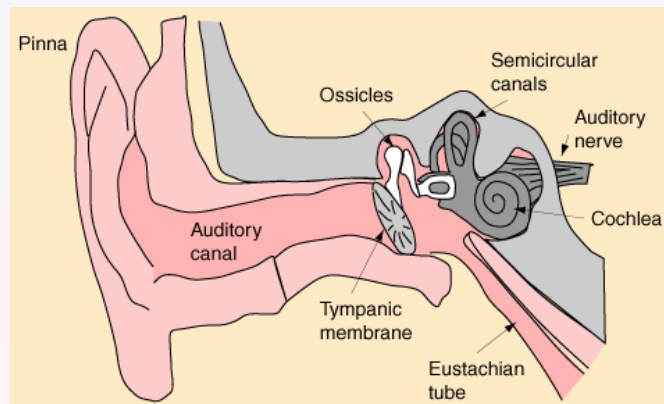
El oído

Oído interno



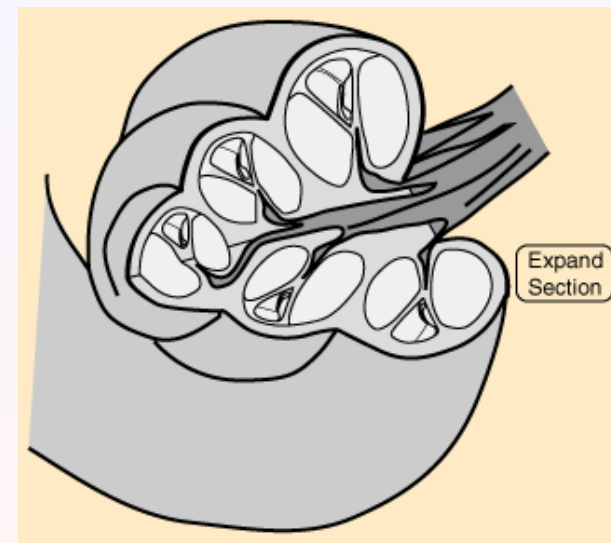
El oído

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html>



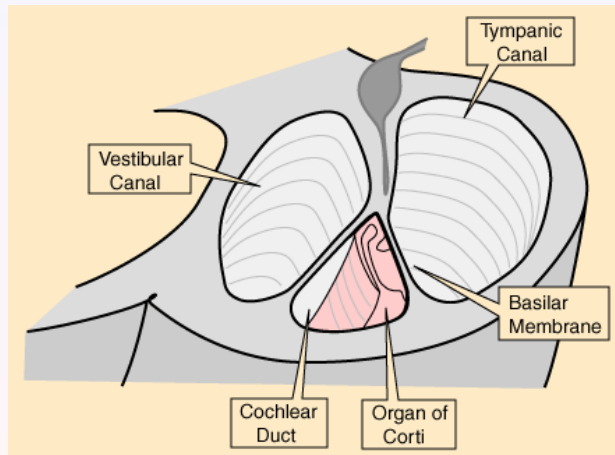
El oído

Caracol (o cóclea)



El oído

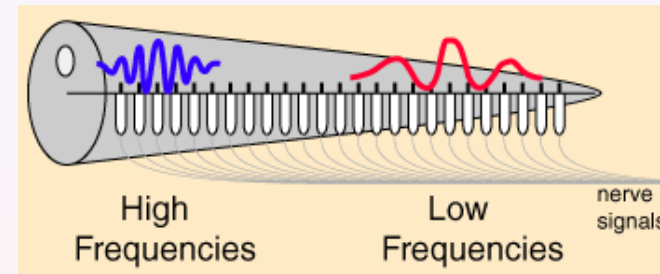
Sección del caracol



El oído

El sonido dentro del caracol (desplegado)

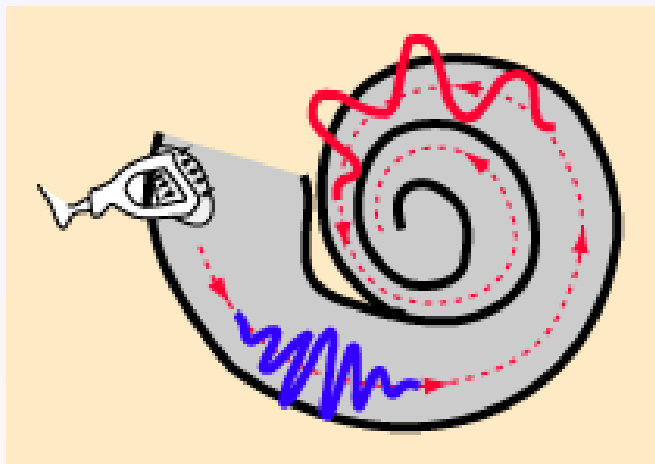
El desplazamiento máximo de la membrana basilar depende de la frecuencia del sonido.



(Georg von Békésy, ~ 1950)

El oído

El sonido dentro del caracol



El oído

Bandas críticas

Podemos considerar que la membrana basilar está formada por unas 24 bandas críticas, cada una con unas 1300 neuronas que transforman el sonido en impulso nervioso.

El ancho de la banda crítica varía con la frecuencia.

- A frecuencias bajas (menos de 500 Hz) es casi constante, unos 100 Hz.
- A frecuencias altas es aproximadamente proporcional a la frecuencia, del orden de un 15% (algo más de un tono).

Frecuencias cercanas son procesadas por la misma banda crítica.

(E. Zwicker, G. Flottorp and S.S. Stevens, 1957)

La teoría de Plomp y Levelt

Reinier Plomp and Willem J.M. Levelt
"Tonal consonance and critical bandwidth"
J. Acoust. Soc. Am. **38** (1965) 548–560

Experimento

Los sujetos del experimento eran personas sin formación musical.
Se emitían pares de tonos puros en varios rangos de frecuencia.
Los sujetos los evaluaban en una escala de 7 niveles:
1 disonante — 7 consonante (bonito, eufónico).

La teoría de Plomp y Levelt

Discusión: consonancia de intervalos de tonos complejos

Hipótesis: dados dos tonos complejos, la disonancia total es la suma de las disonancias de las parciales.

Se consideran dos tonos *armónicos* compuestos por seis parciales.

Uno tiene frecuencia fija (p.ej. 250 Hz) y el otro variable.

Se representa gráficamente la disonancia total en función de la frecuencia variable.

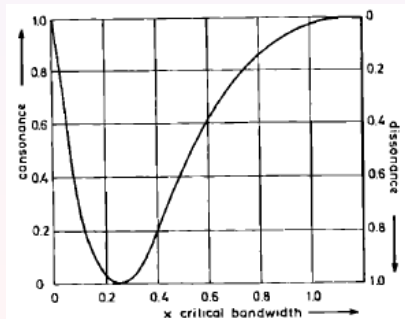
La teoría de Plomp y Levelt

Resultados

La máxima disonancia se producía a frecuencias cercanas; pero no a una diferencia fija de frecuencias, sino a una diferencia correspondiente a $1/4$ del ancho de banda crítica.

A partir de allí la consonancia aumentaba, y a una distancia del ancho de banda crítica el intervalo se juzgaba consonante.

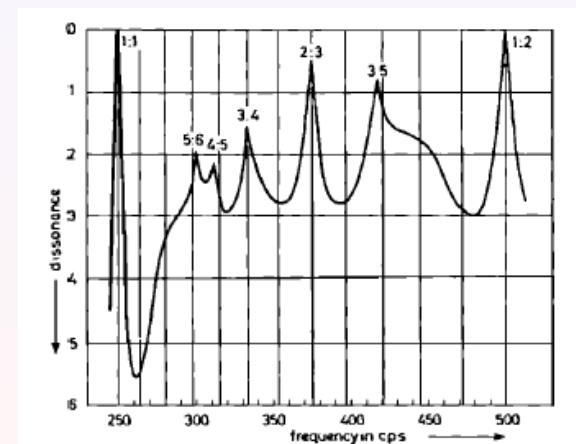
No aparecen las razones simples de enteros. . .



La teoría de Plomp y Levelt

La gráfica muestra máximos locales de consonancia en las razones de frecuencia simples 1:1, 1:2, 2:3, 3:5, 3:4, 5:6, 4:5.

Si se usan más parciales, aparecen más máximos.



Escalas y espectros

Las escalas y la teoría de la música occidentales dependen esencialmente de la armonicidad de los espectros de los instrumentos utilizados.

Dado un espectro, ¿hay una escala que contenga muchos intervalos consonantes?

Dada una escala, ¿se puede encontrar un espectro con muchos intervalos consonantes?

Escalas y espectros

Frank H. Slaymaker

“Chords from tones having stretched partials”

J. Acoust. Soc. Am. **47** (1970) 1569–1571

Espectro: parciales de razones k^S , $k = 1, 2, 3, \dots$
($S = 1$ corresponde al espectro armónico.)

Alternativamente, se pueden escribir las razones como $A^{\log_2 k}$, con
 $S = \log_2 A$.

($A = 2$ para el espectro armónico.)

Escala: divisiones iguales de razón $(2^{1/12})^S = A^{1/12}$.

Es decir, 12 divisiones iguales de la “pseudooctava” de razón A .

Se realizan pruebas con $1.7320505 \leq A \leq 2.3980455$.

It seemed like a peek into a new and unfamiliar musical world, in which none of the old rules applied and the new ones, if any, were yet undiscovered.

Escalas y espectros

John R. Pierce

“Attaining consonance in arbitrary scales”

J. Acoust. Soc. Am. **40** (1966) 249

Espectro: parciales de razones $1, 2^{10/8}, 2^{16/8}, 2^{20/8}, 2^{22/8}, 2^{24/8}$.

Escala: 8 divisiones iguales de la octava.

Los tonos separados por un número par de divisiones son más consonantes que los separados por un número impar.

It appears that, by providing music with tones that have accurately specified but nonharmonic partial structures, the digital computer can release music from the tyranny of 12 tones without throwing consonance overboard.

Escalas y espectros

¿Se puede imitar la armonía convencional con escalas y espectros estirados?

Max V. Mathews and John R. Pierce

“Harmony and nonharmonic partials”

J. Acoust. Soc. Am. **68** (1980) 1252–1257

We may observe that traditional harmony as we know it is like language, a complex but learnable art that is very difficult to explain.



[Cook] escala y espectro normales, escala estirada, escala y espectro estirados, y otra vez normal



[Sethares] escala y espectro normales, escala estirada, escala y espectro estirados, espectro estirado

Escalas y espectros

Escala de Bohlen–Pierce: 13 divisiones iguales de la “tritava”, de razón 3:1.

Max V. Mathews, John R. Pierce, Alyson Reeves and Linda A. Roberts
“Theoretical and experimental explorations of the Bohlen–Pierce scale”
J. Acoust. Soc. Am. **84** (1988) 1214–1222



[Cook]

Estudio de las curvas de disonancia

Modelo simplificado

Expresión de la función de disonancia

$$d(x) = e^{-b_1 x} - e^{-b_2 x}$$

$$b_1 = 3.5, \quad b_2 = 5.75.$$

Disonancia de dos notas

$$d(\nu_1, \nu_2) = d(x),$$

donde x es la diferencia de frecuencias expresada en anchos de banda crítica.

Estudio de las curvas de disonancia

Se puede hacer un estudio sistemático de la función que expresa la disonancia de dos notas según el espectro usado.

William A. Sethares

“Local consonance and the relationship between timbre and scale”
J. Acoust. Soc. Am. **94** (1993) 1218–1228

William A. Sethares

“Specifying spectra for musical scales”
J. Acoust. Soc. Am. **102** (1997) 2422–2431

William A. Sethares

Tuning, timbre, spectrum, scale (2nd ed)
Springer, London, 2004

Estudio de las curvas de disonancia

Disonancia de un espectro $F = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$:

$$D_F = \sum_{i < j} d(\nu_i, \nu_j).$$

Función de disonancia del espectro F :

$$D_F(\alpha) = D_{F \cup \alpha F} = D_F + D_{\alpha F} + \sum_{i,j} d(\nu_i, \alpha \nu_j)$$

(disonancia de dos notas con razón de frecuencias α)

También se pueden considerar funciones de disonancia de acordes, etc.

Estudio de las curvas de disonancia

Propiedades básicas de las curvas de disonancia:

- El unísono es un mínimo de la curva de disonancia.
- Cuando el intervalo es muy grande, la disonancia total se acerca a la suma de las disonancias de los dos tonos.
- Si el espectro tiene n parciales, típicamente hay $2n^2$ mínimos.
- Típicamente hay mínimos en las razones de las parciales, $\alpha = \nu_i/\nu_j$.

Estudio de las curvas de disonancia

Podemos dibujar las curvas de disonancia usando un programa como Maple.



Estudio de las curvas de disonancia

Este estudio se puede realizar en términos matemáticos. Por ejemplo:

Proposición Si el espectro F tiene parciales $\nu_1 < \dots < \nu_n$ separadas por al menos $x^* \approx 0.22$, entonces $D_F(\alpha)$ tiene un mínimo en $\alpha = 1$.

Proposición Si el espectro F está formado por dos notas de frecuencias $\nu_1 < \nu_2$, separadas por más de $x^* \approx 0.22$, entonces la función de disonancia tiene un mínimo en $\alpha^* = \nu_2/\nu_1$.

Música microtonal

Sethares estudia espectros para escalas con 5, 7, 10, 11, 13, 16, 17, 19, ... divisiones iguales de la octava.



[Sethares] 10 dio (divisiones iguales de la octava)



[Sethares] 11 dio



[Sethares] 13 dio



[Sethares] 17 dio

Música microtonal



Wendy Carlos
Beauty in the beast
1986



escalas α (78 ϕ) y β (64 ϕ)



escalas slendro y pelog del gamelan, Bali



escala superjusta

Wendy Carlos
"Tuning: at the crossroads"
Computer Music Journal **11** (1987) 29–43

Clearly the timbre of an instrument strongly affects what tuning and scale sound best on that instrument.

Conclusiones

Todavía hay mucho campo por explorar:

- en la psicología del sonido y la música,
- en las posibilidades creativas de la acústica y la informática,
- y en la relación entre música y matemáticas.

Conclusiones

Sugerencias bibliográficas



David J. Benson
Music: a mathematical offering
Cambridge University Press, 2006 & página web del autor



Music, cognition, and computerized sound: an introduction to psychoacoustics, edited by Perry R. Cook
MIT, Cambridge, 1999



Thomas D. Rossing, F. Richard Moore, Paul A. Wheeler
The science of sound (3rd ed)
Addison-Wesley, San Francisco, 2002



William A. Sethares
Tuning, timbre, spectrum, scale (2nd ed)
Springer, London, 2004



Gareth Loy
Musimathics, the mathematical foundations of music, vol 1
MIT Press, Cambridge (MA), 2006

Conclusiones

*To seek out new tonalities, new timbres. . .
To boldly listen to what no one has heard before.*