

PROBLEMA 1 — SOLUCIÓ

3'5 pt (a) *Abelianització* Si D és involutiva, llavors pot generar-se per camps vectorials que commuten.

- Tenim $Y_k = \sum_{i=1}^m B_k^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. B és la matriu dels Y_k en la base dels $\frac{\partial}{\partial x^i}$, i $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ on B_1 és una matriu $r \times r$ invertible i B_2 és una matriu $(m-r) \times r$.
Definim $X_k = \sum_{\ell=1}^r C_k^\ell Y_\ell$, on C és invertible —així $D|_U = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$.
La matriu dels X_k en la base dels $\frac{\partial}{\partial x^i}$ és el producte $A = BC$, ja que

$$X_k = \sum_{\ell} C_k^\ell Y_\ell = \sum_{\ell} C_k^\ell \sum_i B_\ell^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i,\ell} B_\ell^i C_k^\ell \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Escrites en blocs, tenim $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} (C) = \begin{pmatrix} B_1 C \\ B_2 C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r \\ B_2 C \end{pmatrix}$, si prenem $C = B_1^{-1}$.

D'aquí tenim que $X_k = \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i=r+1}^m A_k^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

- Calculem $[X_k, X_\ell] =$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i=r+1}^m A_k^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^\ell} + \sum_{j=r+1}^m A_\ell^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = \sum_{j=r+1}^m (\mathcal{L}_{X_k} A_\ell^j) \frac{\partial}{\partial x^j} - \sum_{i=r+1}^m (\mathcal{L}_{X_\ell} A_k^i) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Notem que no té cap terme en els $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^r}$. Tanmateix, essent D involutiva, $[X_k, X_\ell]$ ha de ser combinació dels $X_1, \dots, X_r$: $\sum_{n=1}^r g^n X_n = \sum_{n=1}^r g^n \frac{\partial}{\partial x^n} + \dots$, on els punts suspensius són combinacions dels $\frac{\partial}{\partial x^{r+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$. L'única manera que un camp vectorial d'aquests compleixi les dues condicions és que sigui nul: $[X_k, X_\ell] = 0$.

A partir d'ara, doncs, suposem que tenim $D|_U = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$ on els X_k són linealment independents en tot punt i commuten.

6'5 pt (b) *Redreçament* Si r camps vectorials linealment independents arreu commuten, llavors es poden redreçar simultàniament.

Procedint per inducció, i essent el cas $k = 1$ ja conegut, suposem que tenim coordenades $(x^1, \dots, x^s, y^{s+1}, \dots, y^m)$ tals que $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, X_s = \frac{\partial}{\partial x^s}$.

- Podem expressar $X_{s+1} = \sum_{i=1}^s a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=s+1}^m b^j \frac{\partial}{\partial y^j}$, on en principi les components són funcions totalment indeterminades. Imposem-hi la commutació amb els $X_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$:

$$[X_k, X_{s+1}] = \sum_{i=1}^s \frac{\partial a^i}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=s+1}^m \frac{\partial b^j}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^j} = 0.$$

Que això sigui nul significa que totes les components s'han d'anul·lar, és a dir, que les funcions a^i, b^j només poden dependre de les variables y^j : $X_{s+1} = \sum_{i=1}^s a^i(y) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=s+1}^m b^j(y) \frac{\partial}{\partial y^j}$.

- En aquesta expressió de X_{s+1} algun b^j no s'anulla; altrament, X_{s+1} no seria linealment independent amb els X_i ($1 \leq i \leq s$).

Prenem ara l'expressió $Z = \sum_{j=s+1}^m b^j(y) \frac{\partial}{\partial y^j}$. Pensem-la, si convé, en coordenades, en un espai $\mathbf{R}^{m-s}$: hi és un camp vectorial no nul, i per tant, d'acord amb el teorema de redreçament de camps vectorials, amb un canvi de coordenades (les coordenades y) que no especifiquem, es pot escriure $Z = \frac{\partial}{\partial y^{s+1}}$.

Tornant a pensar en X_{s+1} , la conclusió és que, amb un nou sistema de coordenades, que continuem escrivint (x, y) , es pot expressar $X_{s+1} = \sum_{i=1}^s a^i(y) \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^{s+1}}$.

- Finalment provem el canvi que ens és suggerit: $\bar{x}^i = x^i + h^i(y)$, $\bar{y}^j = y^j$. Es veu immediatament que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}, \quad \frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_i \frac{\partial h^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}^j}.$$

En aquestes coordenades els X_i conserven la seva expressió, mentre que tenim

$$X_{s+1} = \sum_{i=1}^s a^i(y) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial h^i}{\partial y^{s+1}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}^{s+1}}.$$

Per a aconseguir l'expressió desitjada per a aquest camp vectorial cal que s'hi anul·lin els coeficients dels camps vectorials coordenats $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$. Això significa imposar, per a cada i ,

$$a^i(y) + \frac{\partial h^i}{\partial y^{s+1}} = 0,$$

que és una equació (per a h^i) d'integració immediata: $h^i = - \int a^i(y^{s+1}, \dots, y^m) dy^{s+1}$. Amb aquesta tria, hem aconseguit $X_{s+1} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}^{s+1}}$.

Ara tenim coordenades $(x^1, \dots, x^m)$ tals que $D|_U = \langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^r} \rangle$.

0'5 pt (c) *Integració* Una tal D és integrable.

- Les equacions $x^{r+1} = c^{r+1}, \dots, x^m = c^m$ defineixen clarament subvarietats de dimensió r , i els X_i hi són clarament tangents perquè $\frac{\partial}{\partial x^i} x^j = 0$ quan $i \leq r$ i $j > r$.