Subvarietats de $\mathbf{R}^n$

Apunts i problemes

Grau de Matemàtiques de la FME

Xavier Gràcia

xgracia@ma4.upc.edu
http://www-ma4.upc.edu/~xgracia

Departament de Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya

1998–2014 / versió 12 setembre 2014

Sumari

Propòsit 2
0 Teoremes bàsics del càlcul diferencial 3
1 Subvarietats de $\mathbf{R}^n$ 5
2 Definicions implícita i paramètrica de subvarietats de $\mathbf{R}^n$ 7
3 Vectors tangents 8
4 Diferencial d'una funció en un punt. Gradient 10
5 Vectors tangents a una subvarietat de $\mathbf{R}^n$ 11
6 Càlcul de l'espai tangent a una subvarietat de $\mathbf{R}^n$ 12
7 Camps vectorials i equacions diferencials 12
8 Formes diferencials 13
9 Extrems condicionats 14
Exercicis i problemes 15
Indicacions i respostes 22

Propòsit

Les subvarietats de l'espai euclidià són objectes matemàtics de la màxima importància per la seva ubiqüitat en geometria i topologia. Tanmateix, des del punt de vista d'un curs de càlcul (on són imprescindibles si es volen estudiar extrems condicionats o integrals de línia i de superfície), apareixen gairebé com un tema accessori i per tant susceptible de no ser prou entès. He escrit aquestes notes pensant-les com un aperitiu per un curs de geometria diferencial, on caldrà anar més lluny en l'abstracció i en els resultats, però on el coneixement més elemental de les subvarietats de l'espai euclidià és inexcusable.

La redacció dels apunts omet les demostracions, que es poden trobar, amb les indicacions pertinents, dins la llista d'exercicis i problemes. Qualsevol recomanació que fes d'intentar resoldre'ls seria insuficient.

0 Teoremes bàsics del càlcul diferencial

En aquestes notes es pressuposa un coneixement bàsic del càlcul diferencial en diverses variables. Això no obstant, dedicarem unes línies a fixar la notació i recordar alguns resultats importants.

Donada una funció $f\colon U \to \mathbf{R}^n$, on $U \subset \mathbf{R}^m$ és obert, denotarem per $\mathrm{D}f(p)$ (o per $f'(p)$) la *derivada* (o diferencial) de f en p, si existeix. És una aplicació lineal $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, i està definida per la condició de tangència $f(p+\mathbf{u}) = f(p) + \mathrm{D}f(p)\cdot\mathbf{u} + o(\|\mathbf{u}\|)$. La regla de la cadena permet calcular la derivada d'una composició de funcions diferenciables: $\mathrm{D}(g \circ f)(p) = \mathrm{D}g(f(p)) \circ \mathrm{D}f(p)$.

La *derivada direccional* de f en p segons el vector $\mathbf{u}$ està definida per $f'(p,\mathbf{u}) \equiv \mathrm{D}_{p,\mathbf{u}}f := \lim\limits_{t\to 0}(f(p+t\mathbf{u}) - f(p))/t$. Si f és diferenciable aquest límit existeix i és $\mathrm{D}f(p)\cdot\mathbf{u}$.

Les derivades direccionals segons les direccions donades pels vectors de la base canònica de $\mathbf{R}^m$ es diuen *derivades parcials*. Aquestes són les entrades $\mathrm{D}_i f^j(p) \equiv \partial f^j/\partial x^i\big|_p$ de la *matriu jacobiana* $\mathrm{J}f(p)$, que és la matriu de $\mathrm{D}f(p)$ en les bases canòniques.

Si totes les derivades parcials existeixen i són contínues la funció es diu de classe C^1, i és diferenciable. Més generalment, una funció es diu *de classe* C^k si existeixen i són contínues totes les derivades parcials k-èsimes; l'ordre en què es calculen és, en aquest cas, irrellevant.

Una funció de classe C^k en un veïnat d'un punt hi admet una aproximació polinòmica de grau $\le k$, el polinomi de Taylor d'ordre k, de forma que la diferència $f(p+\mathbf{u}) - P(\mathbf{u})$ entre la funció i el polinomi és $o(\|\mathbf{u}\|^k)$. En particular, ens pot interessar el cas d'ordre 1: si $f\colon U \to \mathbf{R}$ és de classe C^k, aleshores $f(x) = f(p) + \sum_i \mathrm{D}_i f(p)(x^i - p^i) + \sum_i g_i(x)(x^i - p^i)$, on les funcions g_i són de classe C^{k-1} i satisfan $g_i(p) = 0$.

Un *difeomorfisme* de classe C^k ($k \ge 1$) és una bijecció $f\colon U \to V$ entre dos conjunts oberts de $\mathbf{R}^m$ tal que f i la inversa f^{-1} són de classe C^k.

Teorema de la funció inversa *Siguin* $U \subset \mathbf{R}^m$ *obert,* $f\colon U \to \mathbf{R}^m$ *de classe* C^k*, amb* $k \ge 1$*, i* $p \in U$ *un punt tal que* $\mathrm{D}f(p)$ *és un isomorfisme lineal (és a dir,* $\det \mathrm{D}f(p) \ne 0$*).*

Llavors f *és un difeomorfisme local en* p*. Més precisament, existeix un veïnat obert* $U_\circ \subset U$ *de* p *tal que* $V_\circ = f(U_\circ)$ *també és obert i l'aplicació*

restringida $f_\circ\colon U_\circ \to V_\circ$ *és un difeomorfisme de classe* C^k.
A més, si $x \in U_\circ$ *i* $y = f(x)$, $\mathrm{D}f_\circ^{-1}(y) = (\mathrm{D}f(x))^{-1}$.

Recordem que, encara que $\mathrm{D}f(p)$ sigui invertible en tot punt $p \in U$, aquest teorema només garanteix l'existència d'inverses locals, no d'una inversa global. De fet, f no té per què ser ni injectiva ni suprajectiva.

Teorema de la funció implícita *Siguin* $W \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ *obert,* $F\colon W \to \mathbf{R}^n$ *de classe* C^k*, amb* $k \geq 1$*, i* $(a,b) \in W$ *un punt tal que* $F(a,b) = 0$*. Se suposa que la diferencial de* F *respecte a les segones variables,* $\mathrm{D}_2F(x,y)$*, és invertible en el punt* (a,b).
Llavors existeixen veïnats oberts A *de* a *i* B *de* b*, amb* $A \times B \subset W$*, i una única aplicació* $f\colon A \to B$*, de classe* C^k*, tals que, si* $(x,y) \in A \times B$*, la relació* $F(x,y) = 0$ *equival a* $y = f(x)$.
A més, per a tot $x \in A$, $\mathrm{D}f(x) = -\left(\mathrm{D}_2F(x,f(x))\right)^{-1} \circ \mathrm{D}_1F(x,f(x))$.

Per acabar, revisarem els teoremes relacionats amb el rang constant, que ens permet, amb canvis apropiats de coordenades, representar les aplicacions d'una forma especialment simple.

Teorema del rang constant *Siguin* $A \subset \mathbf{R}^m$ *obert,* $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ *de classe* C^k*, amb* $k \geq 1$*, i* $p \in A$ *un punt tal que* $\mathrm{D}f(x)$ *té rang constant* r *en un veïnat de* p.
Llavors existeixen veïnats oberts U *de* p *i* V *de* $f(p)$*, i difeomorfismes de classe* C^k $\phi\colon U \to U'$, $\psi\colon V \to V'$ *tals que, sobre* U, $f = \psi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \phi$*, on* $\tilde{f}(x^1,\ldots x^m) = (x^1,\ldots x^r,0,\ldots,0)$.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{V} \end{array}$$

Un cas particular important és el d'una aplicació de classe C^1 tal que $\mathrm{D}f(p)\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ és una aplicació lineal injectiva ($m \leq n$ i rang m) o suprajectiva ($m \geq n$ i rang n). Es diu respectivament que f és una *immersió* o una *submersió* en p. En aquests casos el rang és constant en un veïnat de p, i doncs s'hi podria aplicar el teorema del rang; tanmateix, tenim resultats més precisos, els lemes de redreçament:

Lema de redreçament del domini *Siguin* $U \subset \mathbf{R}^m$, $V \subset \mathbf{R}^n$ *oberts,* $f\colon U \to V$ *una aplicació de classe* C^k ($k \geq 1$), $x_\circ \in U$*. Suposem que*

$\mathrm{D}f(x_\circ)\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ *és suprajectiva.*
Existeix un veïnat obert $U_\circ \subset U$ *de* $x_\circ$ *i un difeomorfisme de classe* C^k $h_\circ\colon U_\circ \to \tilde{U}_\circ$ *tals que, denotant per* $f_\circ\colon U_\circ \to V$ *la restricció de* f*, l'aplicació* $\tilde{f} = f_\circ \circ h_\circ^{-1}$ *s'expressa* $\tilde{f}(x^1,\ldots,x^n,x^{n+1},\ldots,x^m) = (x^1,\ldots,x^n)$.

Lema de redreçament de la imatge *Siguin* $U \subset \mathbf{R}^m$, $V \subset \mathbf{R}^n$ *oberts,* $f\colon U \to V$ *una aplicació de classe* C^k $(k \geq 1)$*,* $x_\circ \in U$*,* $y_\circ = f(x_\circ)$*. Suposem que* $\mathrm{D}f(x_\circ)\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ *és injectiva.*
Existeix un veïnat obert $V_\circ \subset V$ *de* $y_\circ$ *i un difeomorfisme de classe* C^k $k_\circ\colon V_\circ \to \tilde{V}_\circ$ *tals que, denotant per* $f_\circ\colon f^{-1}(V_\circ) \to V_\circ$ *la restricció de* f*, l'aplicació* $\tilde{f} = k_\circ \circ f_\circ$ *s'expressa* $\tilde{f}(x^1,\ldots,x^m) = (x^1,\ldots,x^m,0,\ldots,0)$.

$$\begin{tikzcd}
U_\circ \arrow[r, "f_\circ"] \arrow[d, "h_\circ"'] & V \\
\tilde{U}_\circ \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
f^{-1}(V_\circ) \arrow[r, "f_\circ"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & V_\circ \arrow[d, "k_\circ"] \\
& \tilde{V}_\circ
\end{tikzcd}$$

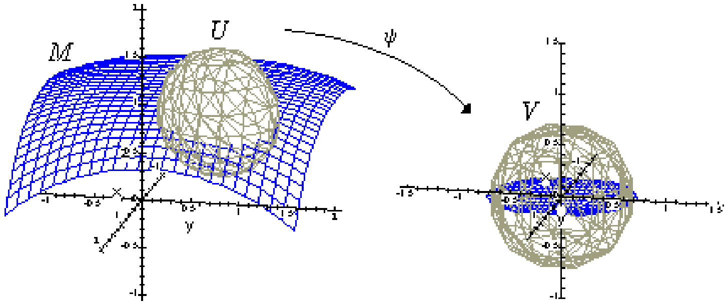
1 Subvarietats de $\mathbf{R}^n$

Una *subvarietat* (o subvarietat regular[1]) de dimensió m i de classe C^k $(k \geq 1)$ de $\mathbf{R}^n$ és un subconjunt $M \subset \mathbf{R}^n$ que satisfà la propietat següent:

> Per a tot $x \in M$, existeixen un conjunt obert $U \subset \mathbf{R}^n$ contenint x, un conjunt obert $V \subset \mathbf{R}^n$, i un difeomorfisme de classe C^k $\psi\colon U \to V$, tals que
> $$\psi(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^m \times \{0\}),$$

on estem considerant $\mathbf{R}^m \times \{0\} \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m} = \mathbf{R}^n$. És a dir, al voltant de cada punt, la subvarietat, amb un canvi de coordenades apropiat, es transforma en un conjunt obert d'un subespai vectorial m-dimensional, a saber, el conjunt $T = V \cap (\mathbf{R}^m \times \{0\})$.

[1] Hi afegirem l'adjectiu *regular* quan vulguem distingir-ho d'altres conceptes de subvarietat.



En les noves coordenades $y = (y^j)$ la subvarietat es descriu localment en forma

- implícita: $y^{m+1} = \ldots y^n = 0$ (dins V)
- paramètrica: la imatge de $\left[\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ (y^1, \ldots, y^m) & \mapsto & (y^1, \ldots, y^m, 0, \ldots, 0) \end{array} \right]$

Per tant en les velles coordenades $x = (x^i)$ la subvarietat es descriu localment en forma

- implícita: $\psi^{m+1}(x) = \ldots = \psi^n(x) = 0$ (dins U)
- paramètrica: la imatge de $\left[\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & \mathbf{R}^n \\ (y^1, \ldots, y^m) & \mapsto & \psi^{-1}(y^1, \ldots, y^m, 0, \ldots, 0) \end{array} \right]$

Cal remarcar que, en aquesta descripció implícita, el conjunt de funcions ψ^{m+1}, …, ψ^n té en cada punt rang màxim, $n-m$, i en la descripció paramètrica la parametrització g té en cada punt rang màxim, m. Tot seguit veurem que, recíprocament, aquestes condicions permeten construir subvarietats.

És habitual anomenar *corba* una subvarietat de dimensió 1, i *superfície* una subvarietat de dimensió 2. Una *hipersuperfície* és una subvarietat de dimensió $n-1$ dins $\mathbf{R}^n$.

S'obtenen exemples senzills de subvarietats considerant grafs de funcions:

Proposició 1 *Sigui* $V \subset \mathbf{R}^m$ *obert,* $f\colon V \to \mathbf{R}^p$ *una funció de classe* C^k*,* $k \geq 1$*. El graf de* f*,*

$$M = \mathrm{graf}(f) = \{(x, y) \mid x \in V, y = f(x)\} \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^p = \mathbf{R}^{m+p},$$

és una subvarietat de dimensió m *i de classe* C^k*.*

2 Definicions implícita i paramètrica de subvarietats de $\mathbf{R}^n$

Sovint, un «conjunt de nivell» d'una funció és una subvarietat:

Proposició 2 *Siguin $W \subset \mathbf{R}^n$ obert, $F\colon W \to \mathbf{R}^p$ una funció de classe C^k, $k \geq 1$, amb $p \leq n$, i sigui*

$$M = F^{-1}(c) = \{x \in W \mid F(x) = c\},$$

suposat no buit. Se suposa que F és una submersió en tot $x \in M$; és a dir, la derivada $\mathrm{D}F(x)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ és suprajectiva (o sigui, $\operatorname{rang} \mathrm{D}F(x) = p$, rang màxim).

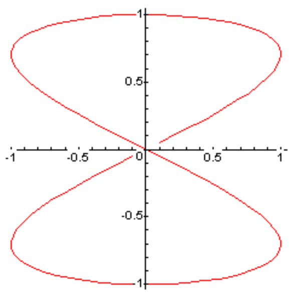
Llavors M és una subvarietat de dimensió $n-p$ i de classe C^k.

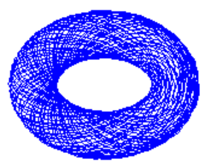
Pel que fa als conjunts parametritzats, tenim el resultat següent:

Proposició 3 *Sigui $g\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ de classe C^k en un conjunt obert $U \subset \mathbf{R}^m$, amb $m \leq n$, i sigui $u_\circ \in U$. Se suposa que g és una immersió en $u_\circ$; és a dir, la derivada $\mathrm{D}g(u_\circ)\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ és injectiva (és a dir, té rang màxim, m).*

Llavors existeix un conjunt obert $U' \subset U$ contenint $u_\circ$ tal que $g(U') \subset \mathbf{R}^n$ és una subvarietat m-dimensional de classe C^k.

Observem que aquesta proposició només dóna un resultat local, al voltant d'un punt $u_\circ$. En general, tot el conjunt $g(U)$ no és una subvarietat de $\mathbf{R}^n$, encara que g sigui C^∞, injectiva i amb $\operatorname{rang} \mathrm{D}g$ màxim en tot punt. És fàcil donar-ne exemples fins i tot amb $m = 1$: la imatge d'una corba parametritzada pot no ser una corba regular. (Exemples típics: la corba densa en un tor, i la corba en forma de 8.)





La situació millora si tenim una condició topològica addicional:

Proposició 4 *Sigui* $g\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ *una aplicació injectiva de classe* C^k *en un conjunt obert* $U \subset \mathbf{R}^m$*, amb* $m \le n$*, i tal que* g *és una immersió en tot punt.*

Suposem que g *és un homeomorfisme de* U *amb la seva imatge* $g(U) \subset \mathbf{R}^n$*. Llavors* $g(U) \subset \mathbf{R}^n$ *és una subvarietat* m*-dimensional de classe* C^k*.*

Una subvarietat descrita explícitament com el graf d'una funció, $M = \{(x,y) \mid x \in V, y = f(x)\} \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^p$, també es pot descriure:

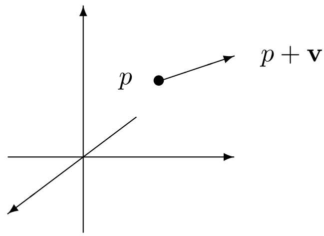
- implícitament: amb l'equació $F(x,y) = y - f(x) = 0$
- paramètricament: amb la parametrització $g(x) = (x, f(x))$

3 Vectors tangents

Anomenem *vector tangent* un parell $(p, \mathbf{v})$, on $p \in \mathbf{R}^n$ és un punt i $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ és un vector.

L'escriurem també $\mathbf{v}_p$, i direm també que $\mathbf{v}$ és un vector tangent en p.

És habitual representar-lo amb una fletxa d'origen p i extrem $p + \mathbf{v}$.



El conjunt de vectors tangents en el punt p, $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$, s'anomena *espai tangent* a $\mathbf{R}^n$ en p; formalment no és més que $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n) = \{p\} \times \mathbf{R}^n$. Amb la suma $(p, \mathbf{v}) + (p, \mathbf{v}') = (p, \mathbf{v} + \mathbf{v}')$ i el producte per escalars $\lambda(p, \mathbf{v}) = (p, \lambda\mathbf{v})$, és un espai vectorial isomorf a $\mathbf{R}^n$. També podem transportar-hi el producte escalar estàndard.

Evidentment, totes les operacions que es fan amb espais vectorials qualssevol es poden fer amb l'espai tangent. En particular, s'anomena *espai cotangent* el dual del tangent, $\mathrm{T}^*_p(\mathbf{R}^n) = \{p\} \times (\mathbf{R}^n)^*$, i està dotat d'operacions similars. Donats $\alpha_p \in \mathrm{T}^*_p(\mathbf{R}^n)$ i $\mathbf{v}_p \in \mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$, usarem la notació del claudàtor de dualitat $\langle \alpha_p, \mathbf{v}_p \rangle \equiv \alpha_p \cdot \mathbf{v}_p \equiv \alpha_p(\mathbf{v}_p) \in \mathbf{R}$. Per definició, $\langle \alpha_p, \mathbf{v}_p \rangle = \langle \alpha, \mathbf{v} \rangle$.

Un *camí* és una aplicació contínua $c\colon I \to \mathbf{R}^n$, on $I \subset \mathbf{R}$ és un interval. Si c és diferenciable en $t_\circ \in I$, la derivada

$$\mathrm{D}c(t_\circ) = \lim_{h \to 0} \frac{c(t_\circ + h) - c(t_\circ)}{h} \in \mathbf{R}^n$$

s'interpreta com un vector tangent en el punt $c(t_\circ)$. S'anomena *vector tangent* o *velocitat* de c en $t_\circ$, i el representarem per

$$c'(t_\circ) = (c(t_\circ), \mathrm{D}c(t_\circ)) .$$

Siguin γ, δ dos camins diferenciables definits en un veïnat de 0. Diem que són *tangents* si tenen mateix vector tangent a $t = 0$.

Lema 5 *La tangència de camins és una relació d'equivalència, i hi ha una bijecció entre el conjunt de classes d'equivalència de camins que passen per p a $t = 0$ i l'espai tangent $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$.*

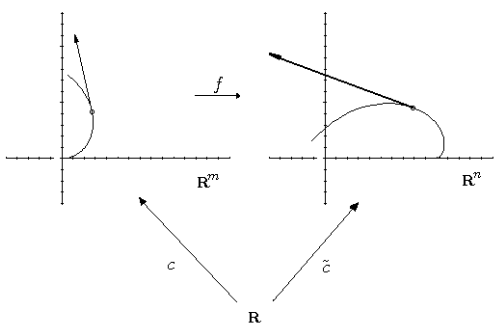
Lema 6 *Sigui $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ diferenciable, i c un camí diferenciable en $\mathbf{R}^m$. Llavors $\tilde{c}(t) = f(c(t))$ és un camí diferenciable en $\mathbf{R}^n$, i, si $c(t_\circ) = p_\circ$, $\mathrm{D}\tilde{c}(t_\circ) = \mathrm{D}f(p_\circ) \cdot \mathrm{D}c(t_\circ)$.*

Per tant la derivada de f en p, $\mathrm{D}f(p)\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, és l'aplicació lineal que transforma els vectors tangents dels camins que passen per p. Des d'un punt de vista més geomètric, hem definit una aplicació lineal

$$\mathrm{T}_p(f)\colon \mathrm{T}_p(\mathbf{R}^m) \to \mathrm{T}_{f(p)}(\mathbf{R}^n) \qquad (p, \mathbf{v}) \mapsto (f(p), \mathrm{D}f(p) \cdot \mathbf{v}).$$

S'anomena *aplicació tangent* de f en p.

Ovservem que f és un difeomorfisme local en p sii $\mathrm{T}_p(f)$ és un isomorfisme lineal.



Hi ha encara una tercera interpretació dels vectors tangents: com a derivacions. Donat un vector tangent $\mathbf{v}_p$, té associada la derivació direccional $\mathrm{D}_{\mathbf{v}_p} \equiv \mathrm{D}_{p,\mathbf{v}}$. Considerada com a operador en l'espai de les funcions reals infinitament diferenciables,

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}_p} \colon \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}\,, \quad f \mapsto \mathrm{D}_{\mathbf{v}_p} f\,,$$

compleix les propietats següents:

- és $\mathbf{R}$-lineal, i
- satisfà la regla de Leibniz: $\mathrm{D}_{\mathbf{v}_p}(fg) = g(p)\,\mathrm{D}_{\mathbf{v}_p} f + f(p)\,\mathrm{D}_{\mathbf{v}_p} g$.

Es pot comprovar, recíprocament, que qualsevol operador amb aquestes propietats és una derivació direccional, i per tant un vector tangent.

4 Diferencial d'una funció en un punt. Gradient

Si $f \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ és una funció diferenciable en un punt p, la seva derivada en p és una forma lineal $\mathrm{D}f(p) \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, és a dir, un element del dual de $\mathbf{R}^n$. Defineix, per tant, un covector $\mathrm{d}f(p) \in \mathrm{T}^*_p(\mathbf{R}^n)$, definit per

$$\mathrm{d}f(p) = (p, \mathrm{D}f(p));$$

s'anomena *diferencial* de f en p.

Per definició, doncs, tenim $\langle \mathrm{d}f(p), \mathbf{v}_p \rangle \equiv \mathrm{d}f(p) \cdot \mathbf{v}_p = \mathrm{D}f(p) \cdot \mathbf{v}$, o, expressat de forma més geomètrica,

$$\langle \mathrm{d}f(p), \mathbf{v}_p \rangle = \mathrm{D}_{\mathbf{v}_p} f\,.$$

Gradient

Recordem que $\mathbf{R}^n$ està dotat del producte escalar estàndard $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_i u^i v^i$, que el converteix en un espai euclidià. El producte escalar defineix un isomorfisme entre $\mathbf{R}^n$ i el seu dual

$$\mathbf{R}^n \to (\mathbf{R}^n)^*, \quad \mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u}| \cdot)\,.$$

El producte escalar s'estń als espais tangents: $(\mathbf{u}_p|\mathbf{v}_p) = (\mathbf{u}|\mathbf{v})$, i anàlogament en cada punt tenim un isomorfisme entre vectors tangents i cotangents, $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n) \xrightarrow{\cong} \mathrm{T}^*_p(\mathbf{R}^n)$.

Aquest isomorfisme permet identificar la diferencial $\mathrm{d}f(p) \in \mathrm{T}^*_p(\mathbf{R}^n)$ amb un vector tangent $\operatorname{grad} f(p) \in \mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$, anomenat *gradient* de f en p: per a tot $\mathbf{v}_p \in \mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$,

$$(\operatorname{grad} f(p)|\mathbf{v}_p) = \langle \mathrm{d}f(p), \mathbf{v}_p \rangle \,.$$

5 Vectors tangents a una subvarietat de $\mathbf{R}^n$

Sigui $M \subset \mathbf{R}^n$ una subvarietat m-dimensional de classe C^1, $p \in M$.

Anomenem *vectors tangents a M en p* els vectors tangents $(p, \mathbf{u})$ dels camins *continguts* en M (i que passen per p).

Anomenem *espai tangent a M en p* el conjunt dels vectors tangents a M en p:

$$\mathrm{T}_p(M) = \{(p, \mathbf{u}) \mid \text{existeix } \gamma\colon I \to M \subset \mathbf{R}^n \text{ tal que } \gamma'(0) = (p, \mathbf{u})\}.$$

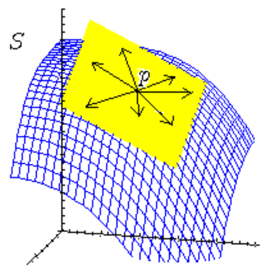
És un subconjunt de $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$.

Proposició 7 *L'espai tangent a M en p és un espai vectorial de dimensió m.*

Fixat $p \in M$, el conjunt de punts de la forma

$$\{x = p + \mathbf{u} \mid (p, \mathbf{u}) \text{ és tangent a } M\}$$

és una varietat lineal dins $\mathbf{R}^n$, anomenada *varietat lineal tangent* a M en p. En el cas d'una corba o una superfície s'anomena recta o pla tangent.



Donada una subvarietat $M \subset \mathbf{R}^n$, s'anomena *fibrat tangent* de M la unió (disjunta) dels espais tangents a M en tots els seus punts:

$$\mathrm{T}(M) = \bigcup_{p \in M} \mathrm{T}_p(M).$$

És, doncs, un subconjunt de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. En particular, si $V \subset \mathbf{R}^n$ és un conjunt obert, $\mathrm{T}(V) = V \times \mathbf{R}^n$; però cal observar que, en general, *no* es pot identificar $\mathrm{T}(M)$ amb $M \times \mathbf{R}^m$.

6 Càlcul de l'espai tangent a una subvarietat de $\mathbf{R}^n$

Subvarietat descrita implícitament

Proposició 8 *Sigui* $M \subset \mathbf{R}^n$ *una subvarietat de dimensió* m *i de classe* C^1*,* $p \in M$*.*
Suposem que $M = F^{-1}(c)$*, on* $F\colon W \to \mathbf{R}^{n-m}$ *és de classe* C^1 *en un conjunt obert* $W \subset \mathbf{R}^n$*, i* $\operatorname{rang} \mathrm{D}F(p) = n-m$ *(rang màxim).*
Llavors

$$\mathrm{T}_p(M) = \operatorname{Ker} \mathrm{T}_p(F) = \{(p, \mathbf{u}) \mid \mathrm{T}_p(F) \cdot \mathbf{u}_p = 0\} .$$

Subvarietat descrita paramètricament

Proposició 9 *Sigui* $g\colon U \to \mathbf{R}^n$ *(*$U \subset \mathbf{R}^m$ *obert,* $m < n$*) una parametrització injectiva de classe* C^1 *d'una subvarietat* $M = g(U)$*. Sigui* $u_\circ \in U$ *tal que* $\mathrm{D}g(u_\circ)$ *té rang màxim,* m*, i sigui* $p = g(u_\circ)$*.*
Llavors

$$\mathrm{T}_p(M) = \operatorname{Im} \mathrm{T}_{u_\circ} g = \Big\langle (p, \mathrm{D}_1 g(u_\circ)), \ldots, (p, \mathrm{D}_m g(u_\circ)) \Big\rangle .$$

7 Camps vectorials i equacions diferencials

Sigui $V \subset \mathbf{R}^n$ un conjunt obert. Un *camp vectorial* en V assigna a cada punt $p \in V$ un vector tangent $(p, \mathbf{f}(p))$ en p. Per tant, és una aplicació de la forma

$$X\colon V \to \mathrm{T}(V) = V \times \mathbf{R}^n \qquad p \mapsto (p, \mathbf{f}(p))$$

La funció vectorial

$$\mathbf{f}\colon V \to \mathbf{R}^n \qquad p \mapsto \mathbf{f}(p)$$

s'anomena *part principal* (o part vectorial) de X. Coneguda $\mathbf{f}$, és clar que es coneix X, i per això sovint es diu que $\mathbf{f}$ és el camp vectorial. Observem que X és de classe C^k sii ho és $\mathbf{f}$.

El camp vectorial X es diu *tangent* a una subvarietat M si en cada punt $p \in M$ el vector $X(p)$ és tangent a M.

Si $h: V \to \mathbf{R}$ és una funció diferenciable, en cada punt podem calcular-ne la derivada direccional segons el vector tangent $X(p)$. D'aquesta manera s'obté una nova funció $\mathrm{D}_X h: V \to \mathbf{R}$:

$$(\mathrm{D}_X h)(p) := \mathrm{D}_{X(p)} h \,.$$

Un camp vectorial en V defineix una equació diferencial de primer ordre:

$$\gamma' = X \circ \gamma,$$

que també s'escriu, amb les notacions anteriors, $\mathrm{D}\gamma(t) = \mathbf{f}(\gamma(t))$. Una solució, o *corba integral*, de la mateixa és un camí diferenciable $\gamma: I \to V$ tal que en tot punt se satisfà l'equació.

Recordem que si X és de classe C^1 i fixem una condició inicial $\gamma(t_\circ) = p_\circ$, podem assegurar l'existència i unicitat d'una solució maximal (en el sentit que el seu domini de definició, que és un interval obert $I \subseteq \mathbf{R}$, no es pot ampliar). Un resultat semblant també val quan X depèn del temps.

8 Formes diferencials

Igual com hem definit el fibrat tangent com la unió disjunta dels espais tangents, podem definir el fibrat cotangent com la unió disjunta dels espais cotangents: $\mathrm{T}^*(M) = \bigcup_{p \in M} \mathrm{T}^*_p(M)$.

I de manera anàloga al concepte de camp vectorial, es defineix una *1-forma diferencial* en un conjunt obert $V \subset \mathbf{R}^n$ com una aplicació

$$\theta: V \to \mathrm{T}^*(V) = V \times (\mathbf{R}^n)^* \qquad p \mapsto (p, \alpha(p))$$

que assigna a cada punt $p \in V$ un vector cotangent $(p, \alpha(p)) \in \mathrm{T}^*_p(\mathbf{R}^n)$.

Donada una funció diferenciable $h: V \to \mathbf{R}$, es defineix una 1-forma diferencial $\mathrm{d}h$ en V a partir de la diferencial de h en cada punt:

$$\mathrm{d}h: V \to \mathrm{T}^*(V)\,, \quad p \mapsto \mathrm{d}h(p).$$

Si h és de classe C^k llavors $\mathrm{d}h$ és de classe C^{k-1}.

Si X és un camp vectorial en V,

$$\mathrm{D}_X h = \langle \mathrm{d}h, X \rangle \,.$$

9 Extrems condicionats

En tota aquesta secció $V \subset \mathbf{R}^n$ és un conjunt obert i $f: V \to \mathbf{R}$ una funció. Un problema habitual en càlcul és l'estudi de la restricció $f|_S$ de f a un subconjunt $S \subset V$.

Suposem que S està descrit paramètricament, de manera que $S = g(U)$, on $g: U \to V$ és una aplicació definida en un subconjunt $U \subset \mathbf{R}^m$. Sigui $\tilde{f} = f \circ g$ la funció $f|_S$ expressada en termes de la parametrització. Siguin $u_\circ \in U$ i $x_\circ \in S$ tals que $x_\circ = g(u_\circ)$. Aleshores $f|_S$ té un extrem absolut en $x_\circ$ sii $\tilde{f}$ té un extrem absolut en $u_\circ$. Si a més g és un homeomorfisme amb la imatge, aleshores $f|_S$ té un extrem local en $x_\circ$, sii $\tilde{f}$ té un extrem local en $u_\circ$.

A partir d'ara suposem que $S \subset V$ és una *subvarietat regular* de classe C^1.

Suposem que $g: U \to V$ n'és una *parametrització regular* (C^1, de rang màxim i injectiva), definida en un conjunt obert $U \subset \mathbf{R}^m$.

Suposem que f és diferenciable. Diem que $x_\circ = g(u_\circ)$ és un *punt crític de* $f|_S$ quan $u_\circ$ és un punt crític de la seva expressió parametritzada $\tilde{f}$ (aquesta noció no depèn de la parametrització utilitzada). Evidentment, si $f|_S$ té un extrem local en $x_\circ$ aleshores n'és un punt crític.

Suposem ara que S està descrita *implícitament* per $S = G^{-1}(c)$, amb $G: V \to \mathbf{R}^p$ ($p < n$) de classe C^1 i de rang màxim p en S.

Lema 10 *$x_\circ$ és un punt crític de $f|_S$ sii $\mathrm{d}f(x_\circ)$ anihila $\mathrm{T}_{x_\circ}(S) \subset \mathrm{T}_{x_\circ}(V)$.*

Lema 11 *L'anihilador de $\mathrm{T}_{x_\circ}(S) \subset \mathrm{T}_{x_\circ}(V)$ és el subespai de $\mathrm{T}^*_{x_\circ}(V)$ generat per les diferencials $\mathrm{d}G^k(x_\circ)$.*

Proposició 12 *(Mètode dels multiplicadors de Lagrange)*
Amb les hipòtesis i notacions anteriors: si f és diferenciable en $x_\circ$ i $f|_S$ té un extrem local en $x_\circ$, llavors $x_\circ$ és un punt crític de $f|_S$, i per tant $\mathrm{d}f(x_\circ)$ és combinació lineal de les $\mathrm{d}G^k(x_\circ)$:

$$\mathrm{d}f(x_\circ) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, \mathrm{d}G^k(x_\circ) \,.$$

Els coeficients λ_k s'anomenen *multiplicadors de Lagrange.* Els extrems locals de $f|_S$ s'anomenen *extrems condicionats* de f, per les condicions (o lligams) $G^k(x) = 0$.

Exercicis i problemes

0 Teoremes bàsics del càlcul diferencial

0.1 Proveu que si $f\colon U \to V$ és una immersió o submersió en un punt $x_\circ$, llavors ho és en un veïnat obert de $x_\circ$.

0.2 Proveu el lema de redreçament del domini.
Indicacions
Justifiqueu que, reordenant les variables de $\mathbf{R}^m$, i escrivint $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-n}$, $x = (x_1, x_2)$, podem suposar que $\mathrm{J}f(x) = \big(\, \mathrm{J}_1 f(x)\ \mathrm{J}_2 f(x) \,\big)$, on $\mathrm{J}_1 f(x)$ és la jacobiana respecte a les primeres variables, i és invertible en $x_\circ$.
Definim $h\colon U \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-n}$ per $h(x_1, x_2) = (f(x_1, x_2), x_2)$. Aplicant el teorema de la funció inversa, proveu que h defineix un difeomorfisme $h_\circ\colon U_\circ \to \tilde{U}_\circ$ entre un veïnat obert de $x_\circ$ i la seva imatge.
Utilitzant que $f = \mathrm{pr}_1 \circ h$, vegeu que $\tilde{f}$ té l'expressió donada.

0.3 Proveu el lema de redreçament de la imatge.
Indicacions
Justifiqueu que, reordenant les variables de $\mathbf{R}^n$, i escrivint $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m}$, $y = (y_1, y_2)$, $f = (f_1, f_2)$, podem suposar que $\mathrm{J}f(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{J}f_1(x) \\ \mathrm{J}f_2(x) \end{pmatrix}$, on $\mathrm{J}f_1(x)$ és invertible en $x_\circ$.
Definim $h\colon U \times \mathbf{R}^{n-m} \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m}$ per $h(x,t) = (f_1(x), f_2(x) + t)$. Aplicant el teorema de la funció inversa, proveu que h defineix un difeomorfisme $h_\circ\colon \tilde{V}_\circ \to V_\circ$ entre un veïnat obert de $(x_\circ, 0)$ i la seva imatge. Sigui $k_\circ$ el difeomorfisme invers.
Utilitzant que $h_\circ(x, 0) = (f_1(x), f_2(x))$, vegeu que $\tilde{f}$ té l'expressió donada.

0.4 Cerqueu en algun llibre la demostració del teorema del rang constant.

1 Subvarietats de $\mathbf{R}^n$

1.1 Proveu que qualsevol recta de $\mathbf{R}^n$ és una subvarietat. Proveu més generalment que qualsevol varietat lineal de $\mathbf{R}^n$ és una subvarietat.

1.2 Comproveu que els subconjunts discrets i els subconjunts oberts són precisament les subvarietats de $\mathbf{R}^n$ de dimensió 0 i n.

1.3 Siguin $L = \{1/n \mid n \in \mathbf{N}^*\} \subset \mathbf{R}$, i $M = \{(x, y) \mid xy = 0, (x, y) \neq (0, 0)\} \subset \mathbf{R}^2$. Justifiqueu que són subvarietats, però que les seves adherències no ho són.

1.4 Denotem per $\mathbf{S}_{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ l'esfera d'equació $\mathbf{x}^2 \equiv \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$. Proveu, a partir de la definició, que $\mathbf{S}_1$ és una corba dins $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{S}_2$ és una superfície dins $\mathbf{R}^3$, ambdues de classe C^∞.

1.5 Demostreu la proposició 1.
(Generalitzeu la idea del problema anterior.)

1.6 Doneu un exemple d'una funció $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *no* diferenciable tal que el seu graf $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ sigui una corba de classe C^∞.

1.7 Doneu un exemple que mostri que la intersecció de dues superfícies de $\mathbf{R}^3$ pot no ser una corba (regular).

1.8 Sigui $M \subset \mathbf{R}^n$ un subconjunt qualsevol. Representem per $M_i \subset M$ el conjunt de punts on M és localment una subvarietat de dimensió i. Proveu que els M_i són subconjunts oberts de M i que es pot escriure $M = M_0 \cup \ldots \cup M_n \cup M_*$, on la unió és disjunta. Què passa si M és connexa?

2 Definició implícita i paramètrica de subvarietats de $\mathbf{R}^n$

2.1 Demostreu la proposició 2.
(Utilitzeu el lema de redreçament del domini.)

2.2 Proveu que l'esfera $\mathbf{S}_{n-1}$ és una hipersuperfície de $\mathbf{R}^n$.

2.3 Sigui $F \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

(a) Si l'equació $F(x) = 0$ defineix una subvarietat, què podem dir de l'equació $F(x) = 1$?

(b) Què podem afirmar si en alguns punts de $M = F^{-1}(0)$ la derivada de F no és suprajectiva?

Il·lustreu les vostres respostes amb exemples $F \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$.

2.4 Estudieu si són superfícies els subconjunts de $\mathbf{R}^3$ definits per les relacions indicades:

(a) Con: $x^2 + y^2 = z^2$.

(b) Hiperboloides: $x^2 + y^2 - z^2 = \pm 1$.

(c) Paraboloides: $x^2 \pm y^2 = z$.

2.5 Estudieu si el sistema d'equacions $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x \sin z - y \cos z = 0$, defineix una corba dins $\mathbf{R}^3$.

2.6 Considerem l'espai vectorial $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ de les matrius 2×2 amb coeficients reals. Proveu que el grup especial lineal $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$, format per les matrius de determinant 1, n'és una subvarietat.

2.7 Demostreu la proposició 3.
(Utilitzeu el lema de redreçament de la imatge.)

3 Vectors tangents

3.1 Proveu el lema 5.

3.2 Proveu el lema 6.

3.3 Sigui $c\colon I \to \mathbf{R}^2$ un camí tal que $c(0) = (0,0)$, $\mathrm{D}c(0) = (1,1)$. Sigui $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida per $f(x,y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$. Quin és el vector tangent del camí $f \circ c$ a $t = 0$?

3.4 Sigui $R(t)$ una matriu ortogonal (o sigui, $R^\top R = I$), funció diferenciable de t, i tal que $R(0) = I$.

(a) Proveu que el seu vector tangent $A = R'(0)$ és una matriu antisimètrica.

(b) Comproveu-ho explícitament en el cas de $R(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4 Diferencial d'una funció

4.1 Donats un camí $\gamma\colon I \to \mathbf{R}^n$ i una funció $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ diferenciables, tals que $\gamma(0) = p$, proveu que $\mathrm{D}(f \circ \gamma)(0) = \langle \mathrm{d}f(p), \gamma'(0) \rangle$.

4.2 Proveu que, en coordenades cartesianes i les bases canòniques, els components del gradient són els de la diferencial.

4.3 Sigui $f\colon V \to \mathbf{R}$ diferenciable en p, on V és un conjunt obert de l'espai euclidià $\mathbf{R}^n$. Proveu que el vector unitari $\mathbf{u}_p$ que fa màxima la derivada direccional $f'(p; \mathbf{u})$ és el normalitzat de $\operatorname{grad} f(p)$.

5 Vectors tangents a una subvarietat de $\mathbf{R}^n$

5.1 Proveu la proposició 7.
(Preneu la definició de subvarietat, observant que si ψ és un difeomorfisme llavors la seva aplicació tangent és un isomorfisme, la qual cosa permet identificar vectors tangents a M amb vectors tangents a $\mathbf{R}^m \times \{0\}$.)

5.2 Sigui $a > 0$ una constant, i $C \subset \mathbf{R}^2$ la «corba» definida per l'equació $x^3 + y^3 = 3axy$. Sigui $\gamma\colon \mathbf{R} - \{-1\} \to \mathbf{R}^2$ la corba parametritzada definida per $\gamma(t) = \left(\dfrac{3at}{1+t^3}, \dfrac{3at^2}{1+t^3} \right)$.

(a) Proveu que γ és injectiva amb imatge C.
(b) Proveu que γ és una immersió injectiva de classe C^∞.
(c) Estudieu si C és una corba (regular) a partir de l'equació que la defineix.
(d) Sigui $\delta(t) = \left(\frac{3at^2}{1+t^3}, \frac{3at}{1+t^3} \right)$. Proveu que també està continguda en C, compareu els vectors tangents $\gamma'(0)$ i $\delta'(0)$, i conclogueu que C no és una corba regular en $(0,0)$. Dibuixeu C aproximadament.
(e) Mitjançant la bijecció γ, es pot traslladar la topologia de $\mathbf{R} - \{-1\}$ al conjunt C. Proveu que aquesta topologia és estrictament més fina que la topologia induïda per la de $\mathbf{R}^2$.

5.3 Estudieu si el conjunt de les matrius 2×2 de traça b i determinant c és una subvarietat de l'espai de les matrius $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$.

5.4 Si $M \subset \mathbf{R}^n$ és una subvarietat de dimensió m, proveu que $\mathrm{T}(M) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ és una subvarietat de dimensió $2m$.

5.5 Siguin $U \subset \mathbf{R}^m$, $V \subset \mathbf{R}^n$ oberts, $f\colon U \to V$ una aplicació tal que existeixen totes les derivades direccionals $f'(p;\mathbf{u})$. Això permet definir l'aplicació tangent $\mathrm{T}(f)\colon \mathrm{T}(U) \to \mathrm{T}(V)$ per $(p;\mathbf{u}) \mapsto (f(p); f'(p;\mathbf{u}))$. Proveu que f és C^1 sii $\mathrm{T}(f)$ és C^0.

5.6 Siguin $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ aplicacions diferenciables entre conjunts oberts d'espais euclidians. Proveu que $\mathrm{T}(g \circ f) = \mathrm{T}(g) \circ \mathrm{T}(f)$.

6 Càlcul de l'espai tangent a una subvarietat de $\mathbf{R}^n$

6.1 Proveu la proposició 8.
(Primerament, observeu que basta comprovar que $\mathrm{T}_p(M) \subset \operatorname{Ker} \mathrm{T}_p(F)$. Per a comprovar aquesta inclusió, si $\mathbf{u}_p$ és tangent a M considereu un camí γ en M que el representi, i considereu $F \circ \gamma$.)

6.2 Sota les mateixes hipòtesis de la proposició 8, siguin F^j les funcions components de F. Comproveu que $\mathrm{T}_p(M)$ és el subespai de $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$ anul·lat pels covectors $\mathrm{d}F^1(p), \ldots, \mathrm{d}F^{n-m}(p)$.

Comproveu igualment que $\mathrm{T}_p(M)$ és el subespai de $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$ ortogonal al subespai generat pels vectors $\operatorname{grad} F^1(p), \ldots, \operatorname{grad} F^{n-m}(p)$.

6.3 Sigui la superfície $S \subset \mathbf{R}^3$ definida per $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 18$. Proveu que és efectivament una superfície i calculeu-ne el pla tangent i la recta normal en el punt $P = (3, 5, -4)$.

6.4 Proveu que l'espai tangent a l'esfera $\mathbf{S}_n$ en un punt $\mathbf{x}$ es pot identificar al subespai ortogonal al vector $\mathbf{x}$.

6.5 Sigui C el conjunt de solucions del sistema

$$\begin{cases} F(x,y,z) = & x+y+z & = 3 \\ G(x,y,z) = & x^2 - y^2 + 2z^2 & = 2 \end{cases}$$

(a) Proveu que C és una corba de classe C^∞.
(b) Calculeu-ne la l'espai tangent en $p = (1,1,1)$.
(c) Escriviu les equacions de la recta tangent i el pla normal a C en el punt esmentat.

6.6 Sigui S el graf d'una funció $f \colon U \to \mathbf{R}$ ($U \subset \mathbf{R}^2$ obert) de classe C^1. Comproveu que el pla tangent al graf de f en $(x_\circ, y_\circ, f(x_\circ, y_\circ))$ és el graf de l'aproximació lineal de f en $(x_\circ, y_\circ)$.

Calculeu també l'equació de la recta normal en el mateix punt.

6.7 Considereu la superfície de $\mathbf{R}^3$ definida per $z = f(x,y) = x^2 + 2y^2$. Calculeu-ne el pla tangent corresponent a $(x_\circ, y_\circ) = (1, 2)$.

6.8 Proveu la proposició 9.

6.9 Sigui $\gamma \colon]0, +\infty[\to \mathbf{R}^2$ definida per $\gamma(t) = (t \cos 2\pi t, t \sin 2\pi t)$. La imatge $C = \gamma(]0, +\infty[) \subset \mathbf{R}^2$ és una espiral.

(a) Proveu que γ és una immersió injectiva C^∞.
(b) Proveu que C és una corba (regular).
(c) Calculeu l'espai tangent a C en el punt $(1,0)$.

6.10 Considereu el cas d'una superfície $S \subset \mathbf{R}^3$ parametritzada per $g\colon U \to \mathbf{R}^3$, i siguin $T_1 = \mathrm{D}_1 g(u_\circ)$, $T_2 = \mathrm{D}_2 g(u_\circ)$, $p = g(u_\circ)$. Proveu que la condició de rang màxim equival a $T_1 \times T_2 \neq 0$, i en aquest cas utilitzeu aquest vector per a expressar $\mathrm{T}_p(S)$ i el seu subespai ortogonal.

6.11 Considereu la parametrització de l'esfera centrada a l'origen de radi R, definida per

$$g\colon (\phi,\theta) \mapsto (R\cos\phi\sin\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\theta).$$

(a) Estudieu si g és una immersió injectiva, parant especial atenció al domini de g.
(b) Calculeu els corresponents vectors tangents T_ϕ, T_θ, així com $T_\phi \times T_\theta$ (notacions del problema anterior), i representeu-los gràficament.

7 Camps vectorials

7.1 Estudieu si els camps vectorials de $\mathbf{R}^3$ definits per

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x,y,z)\,, \quad \mathbf{g}(x,y,z) = (-y,x,0)\,, \quad \mathbf{h}(x,y,z) = (y,x,z)\,,$$

són tangents en algun punt a l'esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ i al con $x^2+y^2 = z^2$, $z > 0$.

7.2 Sigui el camp vectorial de $\mathbf{R}^3$ definit per $\mathbf{f}(x,y,z) = (-y,x,0)$. Trobeu-ne la corba integral γ amb condició inicial $\gamma(0) = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$.

7.3 Siguin $V \subset \mathbf{R}^n$ obert, X un camp vectorial en V, i $h\colon V \to \mathbf{R}$ una funció diferenciable. Calculeu la derivada $\mathrm{D}_X h$ expressant-la en termes de les components de X. Conclogueu que si X és de classe C^k i h és de classe C^{k+1}, aleshores $\mathrm{D}_X h$ és de classe C^k.

7.4 Siguin $V \subset \mathbf{R}^n$ un conjunt obert, X un camp vectorial de classe C^∞ en V. Proveu que l'operador $\mathrm{D}_X\colon \mathrm{C}^\infty(V) \to \mathrm{C}^\infty(V)$ satisfà les propietats següents:

- és $\mathbf{R}$-lineal, i
- satisfà la regla de Leibniz: $\mathrm{D}_X(fg) = (\mathrm{D}_X f)\,g + f\,(\mathrm{D}_X g)$.

8 Formes diferencials

8.1 Sigui X un camp vectorial en V, γ una corba integral de X, i $h\colon V \to \mathbf{R}$ una funció diferenciable. Proveu que $\mathrm{D}(h \circ \gamma) = \mathrm{D}_X h \circ \gamma$.

8.2 Justifiqueu l'expressió següent:

$$\mathrm{d}h = \sum_i \frac{\partial h}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i.$$

9 Extrems condicionats

9.1 Proveu els lemes 10 i 11.

Indicacions i respostes

0 Teoremes bàsics del càlcul diferencial

1 Subvarietats de $\mathbf{R}^n$

1.4 Considereu, per exemple, la funció $\psi(x, y) = (x, y - \sqrt{1 - x^2})$, i proveu que és un difeomorfisme entre dos conjunts oberts del pla.

2 Definició implícita i paramètrica de subvarietats de $\mathbf{R}^n$

2.2 Considereu $F(x) = (x^1)^2 + \ldots (x^n)^2$, i vegeu que és una submersió en tot $x \neq 0$.

2.4 Ho són tots, excepte el con en el seu vèrtex.

2.5 És una corba, excepte en l'origen.

2.6 Identificant les matrius amb $\mathbf{R}^4$ per $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \leftrightarrow (x, y, z, t)$, estudieu si la funció $f(x, y, z, t) = xt - yz$ és una submersió.

3 Vectors tangents

3.3 $((1, 1), (2, 0))$.

3.4 Deriveu $R^\top(t)\, R(t) = I$

4 Diferencial d'una funció

4.3 $\mathrm{D}_{p,\mathbf{u}} f = \|\operatorname{grad} f(p)\| \cos\alpha$, on α és l'angle format per $\operatorname{grad} f(p)$ i $\mathbf{u}_p$.

5 Vectors tangents a una subvarietat de $\mathbf{R}^n$

5.2 Es comprova immediatament que els punts $\gamma(t)$ satisfan l'equació que defineix C. Recíprocament, donat $(x, y) \in C$, posant $t = y/x$ (si $x \neq 0$), $t = 0$ (si $x = 0$), $\gamma(t)$ és (x, y). Així $\gamma \colon \mathbf{R} - \{-1\} \to C$ és bijectiva.

$\mathrm{D}\gamma(t) \neq (0, 0)$ sempre, per tant és una immersió.

Si $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$, la jacobiana de F s'anul·la en $(a,a) \neq C$ i en $(0,0) \in C$. Per tant C és una corba excepte, potser, en $(0,0)$. Els vectors tangents $\gamma'(0)$, $\delta'(0)$, tenen el mateix punt base $(0,0)$ però són linealment independents, cosa que no passaria si C fos regular en aquest punt. S'hi produeix una mena d'autointersecció aparent.

La bijecció γ és contínua, però no bicontínua; per exemple, $]-\infty,-1[\subset \mathbf{R} - \{-1\}$ és tancat, però la seva imatge $\gamma(]-\infty,-1[) \subset C$ té $(0,0)$ com a punt adherent (respecte a la topologia ordinària de $C \subset \mathbf{R}^2$).

5.3 Aquest conjunt és una superfície regular sempre que $b^2 \neq 4c$. Quan $b^2 = 4c$, no és regular en un únic punt, $\begin{pmatrix} b/2 & 0 \\ 0 & b/2 \end{pmatrix}$. Això es pot comprovar, per exemple, seguint un procediment semblant al del problema anterior.

5.6 No és res més que la regla de la cadena en cada punt de U.

6 Càlcul de l'espai tangent a una subvarietat de $\mathbf{R}^n$

6.3 F és C^∞, i $\mathrm{D}F$ només s'anul·la en $(0,0,0)$, que no és de S.

Pla tangent a S en P: $3x + 5y + 4z = 18$. Recta normal a S en P: $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6.5 (F,G) és C^∞, i és una submersió excepte en els punts de la recta $x = -y = 2z$, cap dels quals no és de C.

$\mathbf{u}_p \in \mathrm{T}_p(C)$ sii $\mathbf{u} \in \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Recta tangent: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Pla normal: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

6.6 Equació del pla tangent: $z = z_\circ + \mathrm{D}_1 f(x_\circ, y_\circ)(x - x_\circ) + \mathrm{D}_2 f(x_\circ, y_\circ)(y - y_\circ)$, on $z_\circ = f(x_\circ, y_\circ)$.

Equació de la recta normal: $\begin{pmatrix} x_\circ \\ y_\circ \\ z_\circ \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \partial f/\partial x(x_\circ, y_\circ) \\ \partial f/\partial y(x_\circ, y_\circ) \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbf{R})$.

6.7 $z = 2x + 8y - 9$.

6.9 $\|\gamma\|$ és injectiva, i doncs γ ho és.
$\mathrm{T}_{(1,0)}C = \langle(1,0;1,2\pi)\rangle$.

6.10 $\mathrm{T}_p(S)$ és el subespai ortogonal al vector $(p, T_1 \times T_2)$.

6.11 $T_\phi = R\begin{pmatrix} -\sin\phi\sin\theta \\ \cos\phi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_\theta = R\begin{pmatrix} -\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$,

$$T_\phi \times T_\theta = -R^2\sin\theta\begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = -R\,\sin\theta\, g(\phi,\theta).$$

7 Camps vectorials

7.1 A l'esfera: **f** no hi és tangent enlloc, **g** hi és tangent arreu, i **h** hi és tangent sobre dues circumferències, les obtingudes tallant l'esfera amb els plans $x - y = \pm 1$.

Al con: **f** i **g** hi són tangents arreu, i **h** hi és tangent sobre les dues semirectes obtingudes tallant el con amb el pla $x = y$.

7.2 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\circ \\ y_\circ \\ z_\circ \end{pmatrix}$.

7.3 Si les components de X són f^i, aleshores $\mathrm{D}_X h = \sum_i f^i\, \partial h/\partial x^i$.

8 Formes diferencials

8.2 En aquesta expressió $\mathrm{d}x^i$ és la diferencial de la funció coordenada x^i.

9 Extrems condicionats