Càlcul Integral
Problemes

Grau de Matemàtiques
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

setembre 2015 / revisió 2018 / versió 20 octubre

Documentació preparada per Xavier Gràcia i Natalia Sadovskaia. Parcialment basada en les llistes de problemes d'Anàlisi Vectorial (ETSETB, 2002) i Càlcul Integral (FME, 2012).

Els *problemes bàsics* constitueixen el nucli del curs. Els *problemes addicionals* contenent algunes ampliacions, repeticions, etc.

Sumari

1a Sèries numèriques **2**

1b Integrals impròpies **13**

2a Integració a $\mathbf{R}^n$: càlcul **20**

2b Integració a $\mathbf{R}^n$: teoria **28**

3 Integrals de línia i de superfície **34**

4 Teoremes integrals de l'anàlisi vectorial **41**

5 Formes diferencials i teorema de Stokes **55**

1a Sèries numèriques

Problemes bàsics

1. Estudieu la convergència de les sèries numèriques següents:

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2+1}$. (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$. (g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{n}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n-1}$. (e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{e^{-n}}{n}$. (h) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\log\left(1+\frac{2}{n}\right)$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+2^n}$. (f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2^{3n+1}}{n^2+\sqrt{n}}$. (i) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n}{1+\sqrt{n}}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

2. Estudieu la convergència de les sèries numèriques següents:

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\log n)^n}$. (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{3}{4}\right)^n$. (e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\arctan n)^n$. (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{3^n}{n!}$.

3. Estudieu el caràcter de les sèries següents:

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{\log n}{n}$. (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n^3}{(\log 2)^n}$. (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\log n}{n^2}$.

4. Sigui (a_n) la successió de Fibonacci, definida per $a_0=0$, $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$. Sabem que $\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Sigui $b_k=a_{2k+1}$. Estudieu la convergència de la sèrie $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{1}{b_k}$.

5. Estudieu la convergència de la sèrie $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{\cos^2 k}{\sqrt{k}}$.

   (Observeu que, per a cada enter j, l'interval $[j\pi-\frac{1}{2}, j\pi+\frac{1}{2}]$ conté exactament un enter k_j.)

6. Estudieu la convergència de les sèries següents en funció del valor de $x \in \mathbf{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^n\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n\,.$$

7. Estudieu el caràcter de les sèries següents en funció del valor del paràmetre real α:

(a) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k^\alpha}$. (b) $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \left(\log \frac{k+1}{k-1}\right)^\alpha$.

8. Considerem la sèrie geomètrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; sabem que té suma parcial $A_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Considerem la sèrie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$; sigui $B_n = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$ la seva suma parcial.

(a) Proveu que $B_{n+1} = xB_n + A_n$.

(b) Calculeu el valor de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} nx^{n-1}$ per als valors de x que la fan convergent.

9. *Sèries telescòpiques*

S'anomena *sèrie telescòpica* una sèrie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, on $a_n = b_n - b_{n+1}$, essent (b_n) una successió.

(a) Proveu que la sèrie telescòpica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és convergent sii la successió $(b_n)_{n\geq 1}$ és convergent. Quant val la seva suma?

(b) Calculeu la suma $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.
(Descomponeu la fracció en suma de fraccions simples.)

10. Sumeu les sèries telescòpiques

(a) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)}$.

11. *El criteri de Raabe*

Sigui $(a_n)_{n\geq 1}$ una successió de termes estrictament positius. Proveu les afirmacions següents:

(a) Si $n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)\leq 1$ per a n prou gran, aleshores $\sum a_n=+\infty$.
(Multipliqueu per a_n per deduir que (na_{n+1}) és creixent.)

(b) Si $n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)\geq L$ (on $L>1$) per a n prou gran, aleshores $\sum a_n<+\infty$.
(Multipliqueu també per a_n per obtenir $(n-1)a_n-na_{n+1}\geq(L-1)a_n$; amb això fabriqueu una suma telescòpica que provi que les sumes parcials $a_{n_0}+\ldots+a_n$ són fitades.)

(c) (Criteri de Raabe) Suposem que existeix el límit $L=\lim n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Si $L>1$, la sèrie $\sum a_n$ és convergent. Si $L<1$, és divergent.

12. Apliqueu el criteri de Raabe per estudiar la convergència de les sèries següents:

(a) $\displaystyle\sum_n \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, on $a>0$.

(b) $\displaystyle\sum_n \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}$, on $a,b>0$.

13. *El criteri de Dirichlet*

Siguin $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ dues successions numèriques. Denotem per $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ la successió de sumes parcials de la primera.

(a) Proveu la *fórmula de sumació d'Abel*: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}s_k(b_k-b_{k+1})+s_nb_n$.

(b) (Criteri de Dirichlet) Suposem que
(i) les sumes parcials s_n de la sèrie $\sum a_k$ són fitades, i
(ii) la successió (b_k) és positiva i decreixent amb límit 0.
Aleshores la sèrie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ és convergent.

(En la fórmula d'Abel el darrer terme té límit 0, i el sumatori és convergent perquè és absolutament convergent.)

14. Apliqueu el criteri de Dirichlet per estudiar la convergència de la sèrie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ segons el valor del paràmetre real x.

    (Podeu usar la fórmula $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{2}$, vàlida quan x no és un múltiple enter de 2π.)

15. *El criteri de condensació* (Cauchy)

    Sigui (a_n) una successió numèrica decreixent amb $\lim a_n = 0$. Proveu que la sèrie $\displaystyle\sum_n a_n$ és convergent sii ho és $\displaystyle\sum_k 2^k a_{2^k}$.

    (Compareu sumes parcials apropiades de la sèrie original i la «condensada», inspirats per desigualtats com ara $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq \frac{1}{2}\, 8a_8$ i $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4$.)

16. Apliqueu el criteri de condensació per a estudiar la convergència de les sèries:

    (a) $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\,\log k}$.

    (b) $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\,\log k\,\log(\log k)}$.

17. *El criteri logarítmic*

    Sigui (a_n) una successió de termes estrictament positius. Suposem que existeix $L = \lim \dfrac{\log \frac{1}{a_k}}{\log k}$.

    Proveu que si $L > 1$ aleshores $\sum a_k$ és convergent, i si $L < 1$ aleshores $\sum a_k$ és divergent.

18. *La sèrie de Bertrand*

    S'anomena *sèrie de Bertrand* la sèrie

    $$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha\,(\log n)^\beta}\,,$$

    on α i β són paràmetres reals.

Proveu que la sèrie és convergent si $\alpha > 1$, o si $\alpha = 1$ i $\beta > 1$, i és divergent en cas contrari.

19. *Successions de quadrat sumable*

Una successió (a_n) de nombres reals es diu *de quadrat sumable* si la sèrie $\sum_n |a_n|^2$ és convergent.

(a) Proveu que si (a_n) i (b_n) són de quadrat sumable, aleshores la sèrie $\sum_n a_n b_n$ és absolutament convergent.
(Podeu utilitzar que, si a i b són nombres reals qualssevol, $(a-b)^2 \geq 0$.)

(b) Proveu que si (a_n) i (b_n) són de quadrat sumable, també ho és la seva suma $(a_n + b_n)$.

Com a conseqüència d'això, el conjunt $\ell^2_{\mathbf{R}}$ de les successions de quadrat sumable és un espai vectorial real, i la fórmula $(a|b) = \sum_n a_n b_n$ hi defineix un producte escalar.

20. *El criteri de la integral*

Siguin $n_\circ \in \mathbf{N}$, i $f\colon [n_\circ, +\infty[\to \mathbf{R}$ una funció positiva i decreixent (cosa que implica que és localment integrable). Considerem la successió definida per $a_n = f(n)$ $(n \geq n_\circ)$. Proveu les afirmacions següents:

(a) La sèrie $\sum a_n$ i la integral impròpia $\int_{n_\circ}^{+\infty} f$ tenen el mateix caràcter.
(Proveu primer que $\sum_{n=n_\circ+1}^{\infty} a_n \leq \int_{n_\circ}^{+\infty} f \leq \sum_{n=n_\circ}^{\infty} a_n$.)

(b) Per a cada $N > n_\circ$, $\displaystyle\sum_{n=n_\circ}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_\circ}^{N-1} a_n + \int_N^{+\infty} f + \varepsilon_N$, on $\varepsilon_N \in [0, a_N]$.

21. Apliqueu el criteri de la integral a les sèries següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. (b) $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{\log k}{k}$. (c) $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{\log k}{k^2}$.

22. Proveu que les sèries de potències

$$\sum x^n\,, \quad \sum \frac{x^n}{n}\,, \quad \sum \frac{x^n}{n^2}\,,$$

tenen mateix radi de convergència, però es comporten de manera diferent en els punts de la frontera de la regió de convergència.

23. Calculeu el radi de convergència de les sèries de potències següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n!\, x^n$.

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 3^n x^n$.

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$.

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^n x^n$.

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (\log n)\, x^n$.

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n^2}\, x^n$.

(h) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} x^{2^k}$.

Problemes addicionals

24. Estudieu la convergència de les sèries numèriques següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\log n}{n}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{\pi}{3} n\right)$.

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\arctan n}{n^3+1}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{1+n} \sin\frac{n}{1+n^2}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$.

25. *Teorema d'associativitat*

Sigui $(a_i)_{i\geq 0}$ una successió numèrica. A partir d'una successió estrictament creixent de nombres naturals $(i_k)_{k\geq 0}$, definim la successió (p_k) de sumes agrupades: $p_k = \displaystyle\sum_{i_{k-1} < i \leq i_k} a_i$.

(a) Proveu que si $\sum_{i\geq 0} a_i$ existeix (finit o infinit) aleshores la suma de la sèrie obtinguda associant els termes, $\sum_{k\geq 0} p_k$, existeix i té el mateix valor.

(b) Recíprocament, si els a_i són positius i, per a alguna $(i_k)_{k\geq 0}$, existeix la suma de la sèrie associada $\sum_{k\geq 0} p_k$, proveu que $\sum_{i\geq 0} a_i$ existeix i té el mateix valor.

(c) Doneu un exemple que mostri que el resultat anterior pot ser fals si no se suposa que la sèrie és de termes positius.

26. Estudieu la convergència de les sèries següents:

(a) $\displaystyle\sum \frac{1}{b_n}$, on $(b_n)_{n\geq 1}$ és la successió creixent formada pels nombres naturals tals que la seva representació decimal acaba en 9.

(b) $\displaystyle\sum \frac{1}{a_n}$, on $(a_n)_{n\geq 1}$ és la successió creixent formada pels nombres naturals tals que la seva representació decimal no conté cap 0.
(Sigui $C_1 = \{1, 2, \ldots, 9\}$, i definim per inducció $C_{m+1} = \{10x + y \mid x \in C_m,\ y \in C_1\}$. Sigui $S_m = \displaystyle\sum_{z\in C_m} \frac{1}{z}$. Proveu que $S_{m+1} \leq \frac{9}{10} S_m$.)

27. Sigui $(a_n)_{n\geq 0}$ una successió de termes positius. Proveu que la sèrie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$ és convergent.

28. Considereu les sèries de termes positius $\sum a_n$ i $\sum b_b$, i la sèrie alternada $a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + \ldots + a_n - b_n + \ldots$ Indiqueu si és certa alguna de les afirmacions següents:

    (a) Si la sèrie alternada és convergent, aleshores ho són $\sum a_n$ i $\sum b_n$.

    (b) Si $\sum a_n$ i $\sum b_n$ són convergents, aleshores la sèrie alternada és absolutament convergent.

    (c) Si $\sum a_n$ i $\sum b_n$ són divergents, aleshores la sèrie alternada també ho és.

29. Siguin $(a_k)_{k\geq 0}$ una progressió aritmètica de diferència $d > 0$, i $(b_k)_{k\geq 0}$ una progressió geomètrica de raó r $(0 < r < 1)$ i suma B.

    (a) Proveu que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} a_k b_k$ és convergent, i que la seva suma és $\left(a_0 + d\,\frac{r}{1-r}\right) B$.

    (b) Apliqueu-ho a calcular la suma de les sèries

$$\sum_{k\geq 0} \frac{3k+1}{2^k}\,, \quad \sum_{k\geq 1} \frac{k}{e^k}\,.$$

30. *La fórmula de Stirling*

    (a) Proveu que la successió de terme general $b_n = \log(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n + n$ és convergent.
    (Segons el problema 9, podeu estudiar la sèrie telescòpica $\sum a_n$ on $a_n = b_n - b_{n+1}$.)

    (b) Deduïu-ne que la successió $c_n = \dfrac{n!}{n^n\, e^{-n}\sqrt{n}}$ és convergent. Sigui ℓ el seu límit.

(c) Calculeu ℓ considerant $\dfrac{c_n^2}{c_{2n}}$ i aplicant la *fórmula de Wallis* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \pi$.

(d) Deduïu-ne la *fórmula de Stirling*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n\, e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1\,.$$

31. Apliqueu la fórmula de Stirling:

(a) Proveu que $\binom{2n}{n} \sim \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi\, n}}$.

(b) Estudieu la convergència de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^n}{n^n}$ en funció del paràmetre real x.

32. Comproveu que les sèries següents tenen «caràcter telescòpic» i calculeu-ne la suma.

(a) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{k+12}{k^3+5k^2+6k}$.

33. Estudieu el caràcter de les sèries següents en funció del valor del paràmetre real α:

(a) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\sin k\alpha}{k^2}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k\geq 2} k^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

(c) $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{(\log k)^{\alpha \log k}}$.

(d) $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \left(1+\frac{\alpha}{k}\right)^{-k\, \log k}$.

34. Estudieu el caràcter de la sèrie $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + k^\alpha}$ en funció del valor del paràmetre enter α.

35. Sigui (a_n) una successió de termes positius. Proveu que, si $\sum a_n$ és convergent, aleshores $\sum a_n^2$ és convergent. És això cert si la successió no és de termes positius?

36. Siguin (a_n) i (b_n) dues successions de termes estrictament positius. Se suposa que, a partir d'un $n_\circ$, es compleix que $b_{n+1}/b_n \le a_{n+1}/a_n$.
Proveu que, si $\sum a_n$ és convergent, aleshores $\sum b_n$ també és convergent.
(Proveu per inducció que $\dfrac{b_{n_\circ+1}+\ldots+b_N}{b_{n_\circ}} \le \dfrac{a_{n_\circ+1}+\ldots+a_N}{a_{n_\circ}}$, per a tota $N > n_\circ$.)

37. *La constant d'Euler-Mascheroni*

Sigui $H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ la suma parcial n-èsima de la sèrie harmònica.

(a) Proveu que $\log(n+1) \le H_n \le 1+\log n$.
Deduïu-ne que $H_n \sim \log n$.

(b) Sigui $C_n = H_n - \log n$. Proveu que $C_n \in [0,1]$, i que (C_n) és decreixent.
Deduïu-ne que existeix el límit

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right).$$

S'anomena *constant d'Euler-Mascheroni*. El seu valor aproximat és $\gamma \simeq 0.5772156649\ldots$

(c) Proveu que $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots = \log 2$.
(Proveu que $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{1}{k} = H_{2n}-H_n$.)

(d) Proveu que $H_n = \log n+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.
(Podeu calcular $\lim(H_n-\log n-\gamma)\,n$ usant el criteri de Stolz.)

38. Utilitzant l'estimació donada pel criteri de la integral, calculeu la suma $\displaystyle\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^{1.01}}$ amb error menor que 10^{-3}.

39. Calculeu les sèries de Taylor centrades a l'origen de les funcions següents, i doneu-ne el radi de convergència.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)(1+2x)}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$

(d) $f(x) = (8-x)^{1/3}$

(e) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

(f) $f(x) = x^2\log(1+x)$

40. *Sèries de nombres complexos*

La definició de sèrie, de sèrie convergent, i de sèrie absolutament convergent, és la mateixa si en lloc d'utilitzar nombres reals utilitzem nombres complexos. Proveu:

(a) Una sèrie $\sum_n c_n$ de nombres complexos és convergent sii ho són separadament les seves parts real i imaginària.

(b) Una sèrie absolutament de nombres complexos és convergent.

41. *Sèries de potències complexes*

La definició de sèrie de potències amb coeficients complexos és completament anàloga a la del cas real, així com la noció de radi de convergència. El teorema de Cauchy–Hadamard funciona exactament igual.

(a) Es defineix l'exponencial complexa com

$$\mathrm{e}^z \equiv \exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Proveu que el radi de convergència d'aquesta sèrie és infinit.

(b) Prenent per z un imaginari pur, proveu la *fórmula d'Euler*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t\,.$$

(c) Utilitzeu la fórmula anterior per a *definir* les funcions $\cos z$, $\sin z$, per a $z \in \mathbf{C}$.

Respostes

1. (a) Convergent.
   (b) Divergent.
   (c) Convergent.
   (d) Divergent.
   (e) Convergent.
   (f) Divergent.
   (g) Divergent.
   (h) Divergent.
   (i) Convergent.

2. (a) Convergent.
   (b) Divergent.
   (c) Convergent.
   (d) Convergent.
   (e) Convergent.
   (e) Convergent.

3. (a) Condicionalment convergent.
   (b) Absolutament convergent.
   (c) No convergent.
   (d) Condicionalment convergent.

4. Convergent.

5. Divergent.

6. Totes són absolutament convergents en cada $x \in]-1,1[$. La primera també ho és per a $x = -1, 1$. La segona convergeix condicionalment en $x = -1$, mentre que divergeix en $x = 1$. La tercera i la quarta no convergeixen en cap d'aquests dos punts.

7. (a) Convergent si $\alpha > 1/2$, divergent en cas contrari.
   (b) Convergent si $\alpha > 1$, divergent en cas contrari.

8. La sèrie és convergent per a $|x| < 1$, i la suma és $1/(1-x)^2$.

9. (a) La suma val $b_1 - \lim b_n$.
   (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

10. (a) 1/2.
    (b) 1.

12. (a) Convergent si $a > 1$, divergent en cas contrari.
    (b) Convergent si $b - a > 1$, divergent en cas contrari.

14. Convergent, excepte si x és múltiple enter de 2π, cas en què és divergent.

16. (a) Divergent.
    (b) Divergent.

21. (a) Convergent sii $\alpha > 1$.
    (b) Divergent.
    (c) Convergent.

24. (a) Divergent.
    (b) Divergent.
    (c) No convergent.
    (d) Convergent.
    (e) Convergent.
    (f) Convergent (apliqueu el criteri logarítmic).

25. (c) Per exemple, la sèrie $1-1+1-1+1-1+\ldots$

26. La primera és divergent; la segona convergent.

28. És certa la (b).

29. (b) Valen 8 i $e/(e-1)^2$, respectivament.

31. (b) Convergent sii $|x| < e$.

32. (a) 1/12.
    (b) 2.

33. (a) Convergent per a tota α.
    (b) Convergent sii $\alpha < 1/2$.
    (c) Convergent sii $\alpha > 0$.
    (d) Convergent sii $\alpha > 1$.

34. Convergent si $\alpha \geq 1$, divergent si $\alpha \leq 0$.

38. Cal $N = 934$; la suma val $\sum_{n=1}^{933} \frac{1}{n^{1.01}} + \int_{934}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1.01}} + \varepsilon \approx 100.577$.

1b Integrals impròpies

Problemes bàsics

1. Determineu, a partir de la definició, quines de les integrals impròpies següents són convergents i, si és el cas, doneu-ne el valor.

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

   (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-4}\,\mathrm{d}x$.

   (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

   (e) $\displaystyle\int_0^{1} \log\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

   (f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

   (g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\,\mathrm{d}x$.

   (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{\pi}{2} - \arctan x\Big)\mathrm{d}x$.

   (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$.

   (j) $\displaystyle\int_3^{5} \frac{1}{x^2-7x+10}\,\mathrm{d}x$.

   (k) $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{1}{x^2-7x+10}\,\mathrm{d}x$.

2. Calculeu els valors de les integrals següents per als valors de α que les fan convergents.

   (a) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ $(a<b)$.

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$.

   (c) $\displaystyle\int_0^{1} x^\alpha(-\log x)\,\mathrm{d}x$.

3. Estudieu la convergència de les integrals impròpies següents.

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x}\,\mathrm{d}x$.

   (c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(3+2x^2)^{1/7}}{(x^3-1)^{1/5}}\,\mathrm{d}x$.

   (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$.

   (e) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1-4\sin 2x}{x^3+x^{1/3}}\,\mathrm{d}x$.

   (f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$.

   (g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$.

   (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

(j) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\tan\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

(k) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

(l) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$.

(m) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^2}$.

(n) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+1}}\mathrm{d}x$.

4. Determineu el caracter de les integrals impròpies següents en funció del paràmetre real α.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\log x}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$.

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+|x|^\alpha}}\,\mathrm{d}x$.

(c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1+\arctan x}{x^\alpha \sin^3 x}\,\mathrm{d}x$.

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{5+x^\alpha}}{x^4+x+1}\,\mathrm{d}x$.

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^\alpha}}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$.

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$.

5. *La integral de Dirichlet* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ *és condicionalment convergent*

   (a) Proveu que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ és convergent.
   (Integreu per parts.)

   (b) Proveu que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ és divergent.
   (Escriviu $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ i integreu per parts.)

   (c) Deduïu-ne que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ és divergent.

6. *El criteri de Dirichlet*

   Siguin $f, g\colon [a,+\infty[\to \mathbf{R}$. Se suposa que

   - f és contínua, i hi ha una constant $M>0$ tal que, per a tota $b>a$, $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le M$.
   - g és diferenciable, i decreixent amb $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

   Proveu que, en aquestes condicions, la integral impròpia $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ és convergent.

   (Integreu per parts.)

7. Proveu que la integral impròpia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ és convergent per a tota $\alpha > 0$.

   (Podeu integrar per parts, o aplicar el criteri de Dirichlet.)

8. Apliqueu el criteri de Dirichlet a l'estudi de la convergència de les integrals següents, on $\alpha > 0$.

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\sin \alpha x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}\,\sin 2x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$

9. Proveu que la integral impròpia $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x^3\,\mathrm{d}x$ és convergent, malgrat que l'integrand no té límit quan $x \to +\infty$.

Problemes addicionals

10. Calculeu les integrals impròpies següents, per als valors de λ que les fan convergents.

    (a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\frac{\lambda x}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x\,.$

    (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2+1} - \frac{\lambda}{2x+1}\right)\mathrm{d}x\,.$

11. Estudieu la integral impròpia $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x$ $(b>0)$ i, si és el cas, calculeu-la.

12. Sigui $a > 0$. Estudieu i calculeu les integrals impròpies:

    (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x\,.$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x\,.$

13. Sigui $\lambda > 0$. Estudieu la convergència i calculeu, si és el cas, les integrals impròpies:

    (a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\,.$

    (b) $\displaystyle\int_a^{+\infty} P(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ ($P(x)$, polinomi de grau d).

14. *La funció gamma d'Euler*

    La funció gamma d'Euler es defineix per la integral

    $$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t\,.$$

    (a) Proveu que la integral és convergent per a $x > 0$.

    (b) Proveu que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ per a $x > 0$.

    (c) Proveu que $\Gamma(1) = 1$ i $\Gamma(1/2) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$.
    (Observació: veurem més endavant que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s = \sqrt{\pi}/2$.)

    (d) Deduïu-ne que, per a tot $n \in \mathbf{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$ i $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.

15. Expresseu en termes de la funció Γ les integrals següents:

    (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$

    (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha}\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t.$

    (c) $\displaystyle\int_0^{1} x^3\, (\log x)^2\, \mathrm{d}x.$

    (d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-\log x}}.$

16. Discutiu, segons els valors dels paràmetres reals p i q, la convergència de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^p x\, \cos^q x\, \mathrm{d}x\,.$

17. Estudieu si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$ és convergent.
    (Per a x al voltant de $+\infty$ podeu integrar per parts.)

18. Demostreu que les integrals impròpies $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\, \mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\, \mathrm{d}x$, són convergents i tenen el mateix valor. Calculeu-lo.
    (Considereu la suma de les dues integrals.)

19. Trobeu els valors de a i b que fan $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2 + ax + b}{x(2x+b)} - 1 \right) \mathrm{d}x = 1\,.$

20. Per a quins valors de α és convergent la integral impròpia $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2} - \mathrm{e}^{-\alpha t^2}}{t}\, \mathrm{d}t$?

21. Siguin $p(x)$, $q(x)$ dues funcions polinòmiques de graus $d+1$ i $d+2$ respectivament, i tals que $q(x) > 0$ per a tot x. Proveu que existeix el límit $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{p(x)}{q(x)}\, \mathrm{d}x\,.$

(Dividiu p entre la derivada q' de q i useu l'expressió obtinguda per a analitzar la integral.)

22. *La funció beta*

La funció beta d'Euler ve definida per la integral impròpia

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Proveu les propietats següents:

(a) $\mathrm{B}(x,y)$ està ben definida per a tot $x, y > 0$.

(b) $\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}\,(\cos\theta)^{2y-1}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\infty \dfrac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}\,\mathrm{d}s.$

(c) $\mathrm{B}(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

23. *La transformació de Laplace*

Sigui $f\colon [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ una funció localment integrable Riemann. La *transformada de Laplace* de f és la funció $F = \mathscr{L}(f)$ definida per la *integral de Laplace*

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

per als valors $s \in \mathbf{R}$ per als quals la integral impròpia és convergent.

(a) Calculeu les s que fan convergent la integral de Laplace en els casos següents:

i. $f(t) = t$

ii. $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$

(b) La funció f es diu *d'ordre exponencial* quan existeixen nombres $M \geq 0$ i $\alpha \in \mathbf{R}$ tals que $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\alpha t}$ per a tota t.

Proveu que, en tal cas, la integral de Laplace és absolutament convergent per a $s > \alpha$.

Proveu també que $\lim\limits_{s\to+\infty} F(s) = 0$.

(c) Sigui f localment integrable. Proveu que existeix un nombre $\sigma \in [-\infty,+\infty]$ amb la propietat següent: si $s > \sigma$ la integral de Laplace de f convergeix absolutament, i si $s < \sigma$ aquesta integral no convergeix absolutament. Es diu que σ és l'*abscissa de convergència absoluta*.

(Considereu $s \leq s'$ i compareu les respectives integrals de Laplace de $|f|$.)

(d) Doneu exemples de funcions tals que l'abscissa de convergència absoluta sigui $+\infty$ o $-\infty$.

(e) Sigui f contínua i de classe C^1 a trossos. Suposem tant f com f' admeten transformada de Laplace. Proveu que $\mathscr{L}(f') = s\,\mathscr{L}(f) - f(0)$, per a les s per a les quals estan definides.
(Integreu per parts la integral de Laplace de f'.)

(f) Ara suposem que f és contínua i de classe C^1 a trossos, i d'ordre exponencial. Proveu que $\mathscr{L}(f')$ existeix i satisfà la mateixa relació de l'apartat anterior.

Respostes

1. (a) $+\infty$.
   (b) 1.
   (c) $1/3$.
   (d) $\pi/4$.
   (e) 1.
   (f) 2.
   (g) $+\infty$.
   (h) $+\infty$.
   (i) $\pi/2$.
   (j) $-\infty$.
   (k) $\frac{1}{3}\log 4$.
2. (a) És convergent sii $\alpha < 1$, i val $(b-a)^{1-\alpha}/(1-\alpha)$.
   (b) És convergent sii $\alpha > 0$, i val $1/\alpha^2$.
   (c) És convergent sii $\alpha > -1$, i val $1/(\alpha+1)^2$.
3. (a) Divergent.
   (b) Divergent.
   (c) Divergent.
   (d) Convergent.
   (e) Absolutament convergent.
   (f) Divergent.
   (g) Convergent.
   (h) Convergent.
   (i) Convergent.
   (j) Convergent.
   (k) Divergent.
   (l) Convergent.
   (m) Convergent.
   (n) Convergent.
4. (a) Convergent sii $\alpha > 1$.
   (b) Convergent sii $\alpha > 2$.
   (c) Convergent sii $\alpha < -2$.
   (d) Convergent sii $-2 < \alpha < 6$.
   (e) Convergent sii $0 < \alpha < 4$.
   (f) Convergent sii $1 < \alpha < 2$.

8. Les dues són convergents per a tota $\alpha > 0$.
9. Feu el canvi de variable $x^3 = y$.
10. (a) Convergent sii $\lambda = 1/2$, i llavors val $\frac{1}{4}\log\frac{5}{4}$.
    (b) Convergent sii $\lambda = 1$, i llavors val $\frac{1}{4}\log\frac{3}{2}$.
11. π/b.
12. $a/(a^2+b^2)$, $b/(a^2+b^2)$.
13. (a) $\frac{\mathrm{e}^{-a\lambda}}{\lambda^3}(a^2\lambda^2+2a\lambda+2)$.
    (b) $\dfrac{\mathrm{e}^{-a\lambda}}{\lambda}\displaystyle\sum_{k=0}^{d}\frac{P^{(k)}(a)}{\lambda^k}$.
15. (a) $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{2})$.
    (b) $\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$.
    (c) $\Gamma(3)/64$.
    (d) $\Gamma(\frac{1}{2})$.
16. Convergent sii $p, q > -1$.
17. És convergent.
18. El valor és $-\frac{\pi}{2}\log 2$.
19. $a = b = 2(e-1)$.
20. $\alpha > 0$.
21. La divisió permet expressar $p = cq' + p_1$, on $c \neq 0$ és una constant i p_1 té grau $\leq d$.

2a Integració a $\mathbb{R}^n$: càlcul

Problemes bàsics

1. Calculeu les integrals de les funcions següents sobre els rectangles indicats:

   (a) $f(x,y) = y^2$; $\quad |x| \le 1,\ |y| \le 2$.

   (b) $f(x,y) = x|y|$; $\quad 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 3$.

   (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; $\quad -1 \le x, y, z \le 1$.

   (d) $f(x,y,z) = xyz$; $\quad 0 \le x, y, z \le 1$.

2. Calculeu les integrals de les funcions següents sobre les regions indicades:

   (a) $f(x,y) = x - y$; $\quad \{(x,y) \mid x + y < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$.

   (b) $f(x,y) = x^2y^2$; $\quad \{(x,y) \mid x \ge 0,\ |x| + |y| \le 1\}$.

   (c) $f(x,y) = 1$; $\quad \{(x,y) \mid x^2 \le y \le x\}$.

   (d) $f(x,y) = 1$; $\quad \{(x,y) \mid x + y \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 1\}$.

   (e) $f(x,y,z) = z$; $\quad \{(x,y,z) \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1,\ 0 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}$.

   (f) $f(x,y,z) = (1+x+y+z)^{-3}$; regió limitada pels tres plans coordenats i el pla $x + y + z = 1$.

   (g) $f(x,y,z) = xy^2z^3$; regió limitada per la superfície $z = xy$ i els plans $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

3. Reexpresseu les integrals dobles següents canviant l'ordre d'integració:

   (a) $\int_0^4 \mathrm{d}x \int_{3x^2}^{12x} \mathrm{d}y\, f(x,y)$.

   (b) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} \mathrm{d}x\, f(x,y)$.

4. Si $A = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 3\}$ i f és contínua en A, rescriviu $\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ integrant primer respecte a x, després respecte a y, i després respecte a z.

5. Considereu la funció definida en $D = [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$ per $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < \sin x \\ 0 & \text{si } y = \sin x \\ 3 & \text{si } y > \sin x \end{cases}$

Quin és el conjunt de punts de discontinuïtat de f? És f integrable? Calculeu la integral $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, f(x,y)$.

6. Calculeu $\iint_T (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, essent T la regió definida per les desigualtats $y \le 2x+2$, $x+y+1 \ge 0$, $x^2+y \le 5$, $x \le 2$.

7. Sigui R el rectangle de vèrtexs $(1,2)$, $(1,5)$, $(3,2)$ i $(3,5)$. Sigui T l'aplicació lineal representada per la matriu $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Obteniu l'àrea de $T(R)$.

8. Sigui U el conjunt definit per $1/2 < u^2+v^2 < 1$, $u > 0$, $v > 0$, i considereu l'aplicació $\varphi(u,v) = (u^2-v^2, 2uv)$. Calculeu la integral sobre $\varphi(U)$ de la funció $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

9. Calculeu les integrals $\int_A f$ indicades:

   (a) $f(x,y) = xy^2$; $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$.

   (b) $f(x,y) = x^2+y^2$; $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2-2ax \le 0\}$.

   (c) $f(x,y) = x^2+y^2$; $A = \{(x,y) \mid ax \le x^2+y^2 \le a^2\}$.

   (d) $f(x,y,z) = 7yz$; $A = \{(x,y,z) \mid y > 0,\ 0 < z < a,\ x^2+y^2 < b^2\}$, essent $a, b > 0$ constants.

   (e) $f(x,y,z) = z^2$; A la regió comuna a les esferes $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ i $x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$.

   (f) $f(x,y,z) = xyz$; $A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$.

   (g) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$; $A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1,\ x^2+y^2 < z^2,\ z > 0\}$.

10. Sigui $D \subset \mathbf{R}^2$ un conjunt mesurable Jordan, simètric respecte a l'eix OX (és a dir, si $(x,y) \in D$, també $(x,-y) \in D$).

    (a) Raoneu que podeu escriure $D = D_1 \cup D_2$, on D_1 és dins el semiplà superior i $D_2 = \varphi(D_1)$, essent $\varphi(x,y) = (x,-y)$ la simetria respecte a l'eix OX. Són disjunts D_1 i D_2?

    (b) Sigui $f\colon D \to \mathbf{R}$ integrable Riemann. Proveu que si f és parella respecte a y (és a dir, $f(x,-y) = f(x,y)$) llavors $\int_D f = 2\int_{D_1} f$, i si f és imparella respecte a y ($f(x,-y) = -f(x,y)$) llavors $\int_D f = 0$.
    (Apliqueu el teorema del canvi de variables amb φ per a calcular $\int_{D_2} f$.)

11. Calculeu les integrals $\iint_A f$ indicades. (Utilitzeu canvis de variables apropiats.)

    (a) $f(x,y) = 1$; A el conjunt definit per $(x+y)^2 + (2x-y+1)^2 \leq 1$.

    (b) $f(x,y) = x^2 + y^2$; A la regió definida per $\alpha \leq x^2 - y^2 \leq \beta$, $\gamma \leq xy \leq \delta$, on $0 < \alpha < \beta$, $0 < \gamma < \delta$ són constants donades.

    (c) $f(x,y) = e^{(x-y)/(x+y)}$; $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ 1 < x+y < 2\}$.

12. Calculeu:

    (a) L'àrea tancada per l'el·lipse de semieixos a, b.

    (b) El volum tancat per l'el·lipsoide de semieixos a, b, c.

13. Sigui A la regió plana definida en coordenades polars per $\phi_1 < \phi < \phi_2$, $r < R(\phi)$, on R és una funció positiva.

    (a) Proveu que la seva àrea es pot calcular amb la integral $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\phi_1}^{\phi_2} R(\phi)^2 \,\mathrm{d}\phi$.

    (b) Calculeu l'àrea tancada per la cardioide: $r = a(1+\cos\phi)$.

    (c) Calculeu l'àrea tancada per la lemniscata: $r^2 = a^2 \cos 2\phi$.

14. Sigui A un sòlid de revolució obtingut fent girar la regió $B \subset \{(x,y,z) \mid x > 0,\ y = 0\}$ al voltant de l'eix OZ.

    (a) Proveu que el seu volum es pot calcular amb la integral $2\pi \iint_B x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$.

    (b) Suposem que B és la regió simple descrita per $z_1 < z < z_2$, $f(z) < x < g(z)$. Proveu que el volum de revolució és $\pi \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z \,\big(g(z)^2 - f(z)^2\big)$.

    (c) Calculeu el volum d'un con circular recte de radi a i alçada h.

    (d) Calculeu el volum tancat pel tor de revolució de generatriu $(x-a)^2 + z^2 = b^2$ (on $b < a$).

15. Sigui D el recinte determinat per $x^2 + y^2 \leq 8$, $0 \leq y \leq 2$, i sigui $I = \displaystyle\iint_D y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

    (a) Expresseu I aplicant el teorema de Fubini, en els dos ordres possibles, en coordenades cartesianes.

    (b) Expresseu I en coordenades polars.

    (c) Calculeu el valor de I.

(d) Sense fer més càlculs, raoneu quins són els valors de les integrals

$$\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

16. Calculeu les integrals impròpies $\int_A f$:

(a) $f(x,y) = xe^{-y}$; $A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, y \ge 0\}$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y}}$; $A = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1,\ 0 \le y < x^2\}$.

17. Calculeu la integral $J = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ i deduïu-ne el valor de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
(Useu coordenades polars.)

18. Si $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ i $B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$, determineu per a quins valors de $\alpha > 0$ existeix la integral impròpia $\iiint_B \dfrac{\mathrm{d}V}{r^\alpha}$ i calculeu-la.
(Integreu fora d'una esfera de radi ε centrada en l'origen.)

19. Es consideren una esfera i un con circular tals que el centre de l'esfera està situat sobre l'eix del con i el vèrtex del con sobre la superfície de l'esfera. Determineu la semiobertura α del con per tal que els volums de les parts de l'esfera interior i exterior al con siguin iguals.

20. Considereu el paraboloide d'equació $z = a - x^2 - y^2$ i el pla $z = \lambda a$, on $0 < \lambda < 1$. Sigui $\mathcal{V}(A)$ el volum del paraboloide comprès entre el seu vèrtex i el pla, i $\mathcal{V}(B)$ el volum comprès entre el pla donat i el pla XY. Donat un nombre $k > 0$, determineu λ per tal que se satisfaci que $\mathcal{V}(A) = k\,\mathcal{V}(B)$.

Problemes addicionals

21. Calculeu la integral de la funció $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre la regió definida per les desigualtats $|x| \le |y| \le 2$.

22. Calculeu l'àrea de les regions definides per les desigualtats indicades:

(a) $a \le \dfrac{y}{x} \le b$, $\alpha \le \dfrac{y}{x^2} \le \beta$, amb $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$.

(b) $x^{2/3} + y^{2/3} \le a^{2/3}$ (astroide).

23. Expresseu en coordenades polars la integral $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sobre el domini limitat per les rectes $y = x$, $y = -x$ i $y = 1$.

24. Calculeu l'àrea tancada per un pètal de la rosa que en coordenades polars s'expressa $r = a\sin\phi$ (essent $a > 0$ una constant).

25. Considereu el recinte $S = S_1 \cup S_2$, on S_1 és el recinte limitat per les rectes $y = 0$, $y = x$, $x = 1$, $x = 2$, i S_2 és el recinte limitat, en el primer quadrant, per les rectes $y = x$, $y = 3x$ i les circumferències $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 8$. Calculeu $\iint_S (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

26. Invertiu l'ordre d'integració per a calcular

$$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} \mathrm{d}y\, \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{2} \mathrm{d}y\, \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) .$$

27. Calculeu la integral $\iint_D \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ on D és la regió limitada per $xy = 1$, $xy = 2$, $y^2 = x$ i $y^2 = 2x$.

28. Calculeu la integral de la funció $f(x,y) = |\cos(x+y)|$ sobre el quadrat $[0,\pi] \times [0,\pi]$.
(Apliqueu el teorema de Fubini.)

29. Siguin Ω la regió de l'espai definida per $z \geq (x/a)^2 + (y/b)^2$, i Γ la definida per $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$. Determineu el valor de $\lambda > 0$ que fa que siguin iguals els volums dels fragments de Ω i Γ compresos entre els plans $z = 0$ i $z = \lambda$.

30. Calculeu el volum tancat per l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ comprès dins del cilindre $x^2 + y^2 = ay$.

31. Sigui $A \subset \mathbf{R}^3$ un conjunt mesurable Jordan, tal que cadascuna de les seves seccions horitzontals $A_c = A \cap \{z = c\}$ és mesurable Jordan (en el pla $z = c$).

    (a) Suposem que $A \subset R \times [z_1, z_2]$, amb $R \subset \mathbf{R}^2$ un cert rectangle compacte. Proveu que $\mathrm{vol}(A) = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\, \text{àrea}(A_z)$.
    (Usant el teorema de Fubini, $\int_A 1 = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z \iint_R \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, \chi_A(x,y,z)$, on χ_A és la funció característica de A.)

    (b) Proveu el *principi de Cavalieri*: si A i B tenen les seccions horitzontals amb mateixes àrees, llavors $\mathrm{vol}(A) = \mathrm{vol}(B)$.

(c) Sense fer cap càlcul, proveu que el cilindre recte $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq h\}$ i el cilindre oblic $\{(x,y,z) \mid x^2+(y-z)^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq h\}$ tenen mateix volum.

32. Obteniu la probabilitat que l'equació $ax^2+bx+c=0$, els coeficients de la qual s'escullen a l'atzar en l'interval $[0,1]$, tingui arrels reals.

33. Considereu el sòlid pla (de densitat uniforme) limitat per la cardioide d'equació $r = a(1+\cos\phi)$ en coordenades polars. Calculeu-ne el centre de massa.

34. Considereu el sòlid pla de massa m limitat per la lemniscata d'equació $r^2 = a^2\cos 2\phi$ en coordenades polars. Calculeu-ne el moment d'inèrcia respecte a un eix perpendicular al pla i que passa per l'origen.

35. Un disc circular de radi R està carregat amb una densitat de càrrega $\sigma = br$. Calculeu el camp elèctric en un punt de l'eix del disc a distància d del pla del disc.

36. Demostreu que la força d'atracció gravitatòria d'una bola homogènia sobre un punt exterior a la bola és la mateixa que si es considera tota la massa concentrada en el centre de la bola.

37. Calculeu la força d'atracció gravitatòria que exerceix un tronc de con circular i homogeni sobre un punt situat en el vèrtex del con complet, expressant el resultat en funció de la densitat δ, l'angle de semiobertura del con, α, i l'alçada del tronc de con, h.
(Situeu l'origen de coordenades en el vèrtex del con, i useu coordenades esfèriques.)

38. Considereu el recinte $A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ \mid \ x>0,\ y>0,\ \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q \leq 1\right\}$ i la funció $f(x,y) = x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$ $(a,b,p,q,\alpha,\beta>0)$. Demostreu la *fórmula de Dirichlet bidimensional*:

$$\int_A f \ = \ \frac{a^\alpha b^\beta}{pq}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+1\right)}.$$

(Feu el canvi $u=(x/a)^p$, $v=(y/b)^q$, apliqueu la definició de la funció B, i la seva expressió en termes de la funció Γ.)

(*Observació* Per a α o β menors que 1 la fórmula de Dirichlet calcula una integral impròpia.)

39. Calculeu l'àrea S_n del recinte limitat, en el primer quadrant, pels eixos coordenats i la corba $x^{2/n} + y^{2/n} = a^{2/n}$.
(*Observació* Expresseu el resultat segons la paritat de n.)

Respostes

1. (a) 32/3.
   (b) 10.
   (c) 8.
   (d) 1/8.
2. (a) 0.
   (b) 1/90.
   (c) 1/6.
   (d) $\dfrac{\pi-2}{4}$.
   (e) 176/45.
   (f) $\log\sqrt{2} - 5/16$.
   (g) 1/364.
3. (a) $\int_0^{48} \mathrm{d}y \int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} \mathrm{d}x\, f(x,y)$.
   (b) $\int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\, f(x,y) + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y\, f(x,y)$.
4. $\int_0^3 \mathrm{d}z \int_{-z}^{z} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} \mathrm{d}x\, f(x,y,z)$.
5. El conjunt de punts de discontinuïtat és $\{(x, \sin x) \mid x \in [0, \pi/2]\}$. f és integrable, atès que aquest conjunt és de mesura nul·la. La integral val $\dfrac{3\pi^2}{4} - 2$.
6. 287/20.
7. 42.
8. $\pi/2$.
9. (a) 1/15.
   (b) $\dfrac{3\pi a^4}{2}$.
   (c) $\dfrac{13}{32}\pi a^4$.
   (d) $\dfrac{7}{3}a^2b^3$.
   (e) $\dfrac{59\pi R^5}{3\cdot 5\cdot 2^5}$.
   (f) 1/48.
   (g) $\pi^2/16 - \pi/8$.
10. (b) $\int_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{D_1} f(x,-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\int_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ segons la hipòtesi.
11. (a) $\pi/3$.
    (b) $(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)$.
    (c) $\dfrac{3}{2}\sinh 1$.
12. (a) πab.
    (b) $\frac{4}{3}\pi abc$.
13. (b) $3\pi a^2/2$.
    (c) a^2.
14. (c) $\frac{1}{3}\pi a^2 h$.
    (d) $2\pi^2 ab^2$.

15. (a) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}y\, y \int_{-(8-y^2)^{1/2}}^{(8-y^2)^{1/2}} \mathrm{d}x =$
$\displaystyle\int_{-2}^2 \mathrm{d}x \int_0^2 \mathrm{d}y\, y + \int_{-\sqrt{8}}^{-2} \mathrm{d}x \int_0^{(8-x^2)^{1/2}} \mathrm{d}y\, y +$
$\displaystyle + \int_2^{\sqrt{8}} \mathrm{d}x \int_0^{(8-y^2)^{1/2}} \mathrm{d}y\, y\,.$

(b) $\displaystyle 2\left(\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{8}}\mathrm{d}r\, r^2\sin\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2/\sin\theta}\mathrm{d}r\, r^2\sin\theta\right)$.

(c) $\displaystyle\frac{16}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

(d) 0, I, 0.

16. (a) $1/2$.

(b) 2.

17. $J=\pi$, $I=\sqrt{\pi}$.

18. $\displaystyle I=\frac{4\pi}{3-\alpha}\,a^{3-\alpha}$, per a $\alpha<3$.

19. $\displaystyle\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

20. $\displaystyle\lambda=1-\sqrt{\frac{k}{1+k}}$.

21. $64/3$.

22. (a) $\displaystyle\frac{1}{6}(b^3-a^3)\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)$.

(b) $\displaystyle\frac{3}{8}\pi a^2$.

23. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{1/\sin\theta}\mathrm{d}r\; r\, f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

24. $\pi a^2/4$.

25. $5 + 15(\operatorname{arc\,tg} 3 - (\pi/4)) = 5 + 15\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$.

26. $4(\pi+2)/\pi^3$.

27. $\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)\log 2$.

28. 2π.

29. $\lambda=2$.

30. $2a^3(3\pi-4)/9$.

32. $\displaystyle\frac{5+6\ln 2}{36}\approx 25'4\%$.

33. $(x_{\mathrm{cm}}, y_{\mathrm{cm}}) = \left(\frac{5}{6}a, 0\right)$.

34. $\displaystyle\frac{\pi}{8}ma^2$.

35. $\displaystyle E_z=\frac{bd}{2\epsilon_0}\left(\ln\frac{R+(R^2+d^2)^{1/2}}{d}-\frac{R}{(R^2+d^2)^{1/2}}\right.$

37. $F_z = m\,G\,2\pi\,\delta\,h\,(1-\cos\alpha)$, on m és la massa del punt.

39. $\displaystyle S_n=\frac{1}{2^n}\frac{n!!}{(n-1)!!}a^2\xi_n$, essent $\xi_n = \begin{cases} 1 & n \text{ parell} \\ \pi/2 & n \text{ imparell} \end{cases}$

2b Integració a $\mathbf{R}^n$: teoria

1. Siguin $A \subset \mathbf{R}^n$ un rectangle compacte, i $\mathcal{P}$ una partició de A. Proveu que $\mathrm{vol}(A) = \sum_R \mathrm{vol}(R)$, on R recorre els subrectangles de $\mathcal{P}$.

2. Siguin $A \subset \mathbf{R}^n$ un rectangle compacte, i T_j una família finita de rectangles compactes tals que $T_j \subset A$.

   (a) Proveu que existeix una partició $\mathcal{P}$ de A tal que cada T_j és unió de subrectangles de $\mathcal{P}$.

   (b) Suposem addicionalment que $\cup_j T_j = A$. Proveu que cada subrectangle de $\mathcal{P}$ està contingut dins d'algun dels rectangles T_j.

3. Sigui $A \subset \mathbf{R}^n$ un rectangle compacte. Estudieu, a partir de la definició, la integral de Riemann $\int_A f$ quan

   (a) $f = c$, constant;

   (b) f és la funció característica de $\mathbf{Q}^n$.

4. *El criteri de Riemann*

   Proveu el criteri de Riemann: una funció fitada f definida sobre un rectangle compacte $A \subset \mathbf{R}^n$ és integrable Riemann sii, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix una partició $\mathcal{P}$ de A tal que $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$.

5. Sigui $g_j \colon R \to \mathbf{R}$ una família finita de funcions fitades inferiorment, on R és no buit. Proveu que

   $$\sum_{j=1}^{N} \inf_{x \in R} g_j(x) \leq \inf_{x \in R} \sum_{j=1}^{N} g_j(x)\,.$$

   Enuncieu la propietat anàloga amb suprems.

6. Siguin $A \subset \mathbf{R}^n$ un rectangle compacte, $f, g \colon A \to \mathbf{R}^n$ funcions fitades, $\lambda \in \mathbf{R}$.

   (a) Proveu que $\underline{\int}_A f + \underline{\int}_A g \leq \underline{\int}_A (f+g)$ i $\overline{\int}_A (f+g) \leq \overline{\int}_A f + \overline{\int}_A g$. (Utilitzeu la desigualtat del problema precedent, $\inf f(x) + \inf g(x) \leq \inf(f(x) + g(x))$, per tal de comparar les sumes inferiors; similarment amb la segona desigualtat.)

(b) Si $\lambda > 0$, proveu que $\underline{\int}_A \lambda f = \lambda \underline{\int}_A f$ i $\bar{\int}_A \lambda f = \lambda \bar{\int}_A f$.

(c) Proveu que $\underline{\int}_A (-f) = -\bar{\int}_A f$.

(d) Doneu un exemple de funcions $f, g\colon A = [0,1] \to \mathbf{R}$ tals que $\underline{\int}_A f + \underline{\int}_A g \neq \underline{\int}_A (f+g)$.

(e) Doneu un exemple d'una funció $f\colon A = [0,1] \to \mathbf{R}$ tal que $\bar{\int}_A (-f) \neq -\bar{\int}_A f$.

7. Proveu que en la definició de conjunt de mesura nul·la es poden substituir els rectangles tancats per rectangles oberts (és a dir, que les dues definicions són equivalents).

8. Proveu que $\mathbf{R} \times \{0\} \subset \mathbf{R}^2$ té mesura nul·la.

   El mateix amb $\mathbf{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbf{R}^3$.

9. Siguin $M \subset \mathbf{R}^m$, $N \subset \mathbf{R}^n$. Proveu que, si $N \subset \mathbf{R}^n$ té mesura nul·la, aleshores $M \times N \subset \mathbf{R}^{m+n}$ té mesura nul·la.

   (Proveu-ho primer amb la hipòtesi addicional que M és fitat.)

10. El *conjunt triàdic de Cantor* $K \subset [0,1]$ es defineix com la intersecció $K = \cap_{n\geq 1} K_n$, on K_1 s'obté eliminant el terç central obert de $[0,1]$: $K_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$; K_2, eliminant els terços centrals oberts d'aquests dos intervals; i així successivament. Els elements de K són exactament els nombres $\sum_{n\geq 1} c_n/3^n$, amb c_n iguals a 0 o 2.

    Proveu que K és compacte, no numerable, i de mesura nul·la.

11. Proveu que en la definició de conjunt de contingut nul es poden substituir els rectangles tancats per rectangles oberts.

12. Proveu que $A = \mathbf{Q} \cap [0,1] \subset \mathbf{R}$ té mesura nul·la però no contingut nul.

    Doneu un exemple d'un conjunt tancat $B \subset \mathbf{R}$ que tingui mesura nul·la però no tingui contingut nul.

13. *Un interval no degenerat de* $\mathbf{R}$ *no té mesura nul·la*

    Siguin $a < b$ nombres reals.

(a) Sigui $R_1, \dots, R_N$ un recobriment de $[a, b]$ per intervals compactes. Proveu que $\sum \operatorname{long}(R_i) \geq b - a$.

(Per a $N = 1$ és evident. Siguin $R_1, \dots, R_{N+1}$ intervals compactes que recobreixen $[a, b]$. Podem suposar que $b \in R_{N+1}$, de manera que $R_{N+1} = [c, d]$, on $c \leq b \leq d$. Si $c \leq a$ ja hem acabat. Altrament, $R_1, \dots, R_N$ és un recobriment de $[a, c]$, al qual podem aplicar la hipòtesi d'inducció.)

(b) Deduïu-ne que $[a, b]$ no té contingut nul, ni tampoc mesura nul·la.

(c) Proveu que, si un conjunt $A \subset \mathbf{R}$ té algun punt interior, aleshores no és de mesura nul·la.

14. Digueu quins dels conjunts següents són de mesura nul·la o de contingut nul.

(a) $\{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^2$.

(b) $\{(x, x^2) \mid x \in [0, 1]\} \subset \mathbf{R}^2$.

(c) $\{(0, y) \mid y \in [0, 1] \cap \mathbf{Q}\} \subset \mathbf{R}^2$.

(d) $\{(x, 0) \mid x \in \mathbf{Q}\} \subset \mathbf{R}^2$.

(e) $\{(x, y) \mid x \in [0, 1], y \in [0, 1] \cap \mathbf{Q}\} \subset \mathbf{R}^2$.

(f) $\{(x, y) \mid x \in \mathbf{R},\ y = \sin x\} \subset \mathbf{R}^2$.

(g) $\{(x, y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\} \subset \mathbf{R}^2$.

15. Siguin $D \subset \mathbf{R}^{n-1}$ obert, $f\colon D \to \mathbf{R}$ contínua. Proveu que $\operatorname{graf}(f) \subset \mathbf{R}^n$ té mesura nul·la.

(Useu que D es pot escriure com una unió numerable de conjunts compactes.)

16. Siguin E un conjunt, $f\colon E \to \mathbf{R}$ una funció, $o(f, E)$ la seva oscil·lació sobre E.

Què significa que $o(f, E) = +\infty$? I $o(f, E) = 0$?

17. Sigui $D \subset \mathbf{R}$ un subconjunt fitat. Proveu que $\operatorname{diam}(D) = \sup D - \inf D$.

Deduïu-ne el següent:
Siguin E un conjunt, $f\colon E \to \mathbf{R}$ una funció fitada. Aleshores $o(f, E) = \sup_{x \in E} f(x) - \inf_{x \in E} f(x)$.

18. Calculeu l'oscil·lació de les funcions següents, definides en $\mathbf{R}$, en cada punt del seu domini:

    (a) $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$; $f(0) = 0$.

    (b) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$; $f(0) = 0$.

    (c) La funció de Dirichlet, $\chi_{\mathbf{Q}}$.

    (d) La funció de Thomae, definida per

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ és irracional,} \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ 1/q & \text{si } x = p/q \text{ fracció irreductible} \neq 0. \end{cases}$$

19. Doneu un exemple d'un conjunt $E \subset \mathbf{R}$ que sigui fitat i numerable, però no mesurable Jordan.

20. *Un conjunt obert, o compacte, pot no ser mesurable Jordan*

    Sigui $(r_i)_{i\in\mathbf{N}}$ una enumeració dels racionals de $\mathbf{Q}\cap]0,1[$. Per a cada i, sigui $I_i =]a_i, b_i[$ tal que $r_i \in I_i \subset]0,1[$. Sigui $A = \cup_i I_i$.

    (a) Proveu que $\mathrm{Fr}(A) = [0,1] - A$.

    (b) Suposem que $\sum_i \mathrm{long}(I_i) < 1$ (com es pot aconseguir?).
    Proveu que, en tal cas, $\mathrm{Fr}(A)$ no té mesura nul·la.

    (Podem recobrir A amb una successió d'intervals oberts U_i tals que $\sum \mathrm{long}(U_i) \leq \ell < 1$; si $\mathrm{Fr}(A)$ tingués mesura nul·la, el podríem recobrir amb una successió d'intervals oberts V_j tals que $\sum \mathrm{long}(V_j) < 1 - \ell$. Llavors $[0,1] = A \cup \mathrm{Fr}(A)$ i un nombre finit dels U_i, V_j el recobreixen. Les seves adherències també recobreixen $[0,1]$, i observeu quina és la suma de les seves longituds.)

    Doncs, A és un conjunt obert que no és mesurable Jordan.

    (c) Proveu que, sota la mateixa hipòtesi que en l'apartat anterior, el conjunt compacte $K = \mathrm{Fr}(A)$ tampoc no és mesurable Jordan.

21. Sigui $C \subset \mathbf{R}^n$. Provarem que C té contingut nul $\iff$ C és mesurable Jordan i $\mathrm{vol}(C) = 0$.

    (a) Proveu que, si C té contingut nul, és mesurable Jordan.

    (b) Suposem que C té contingut nul. Donat $\varepsilon > 0$, proveu que $\mathrm{vol}(C) < \varepsilon$.

(c) Sigui $A \supset C$ un rectangle compacte, i suposem que $\int_A \chi_C = 0$. Donat $\varepsilon > 0$, proveu que hi ha una partició $\mathcal{P}$ de A tal que $S(\chi_C, \mathcal{P}) < \varepsilon$; utilitzeu-la per a provar que C té contingut nul.

22. *La composició de funcions integrables Riemann no té per què ser integrable Riemann*

Sigui $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funció de Thomae (vegeu el problema 18).

(a) Proveu que f és integrable Riemann en qualsevol interval compacte. Quant val la seva integral?

(b) Sigui $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funció signe: $h(0) = 0$ i $h(x) = x/|x|$ si $x \neq 0$. Proveu que h és integrable Riemann i que tanmateix $h \circ f$ no ho és.

23. Siguin $A \subset \mathbf{R}^n$ un rectangle compacte, $f\colon A \to \mathbf{R}$ una funció integrable Riemann i positiva ($f \geq 0$). Proveu que, si f és contínua en un punt $a \in A$ i $f(a) > 0$, aleshores $\int_A f > 0$.

(Proveu que en algun rectangle $R \subset A$ es té $f(x) \geq c > 0$ per a certa c, i escriviu $A = R \cup (A - R)$.)

24. Siguin $W \subset \mathbf{R}^n$ un conjunt obert, i $f\colon W \to \mathbf{R}$ una funció contínua. Suposem que, per a tot rectangle compacte $R \subset W$, es compleix que $\int_R f = 0$. Proveu que $f = 0$.

25. (a) Siguin $B_i \subset \mathbf{R}$ ($i \in I$) subconjunts no buits fitats inferiorment. Sigui $B = \cup_{i\in I} B_i$. Proveu que $\inf B = \inf\{\inf B_i \mid i \in I\}$.

(Proveu que tant B com $\{\inf B_i \mid i \in I\}$ tenen les mateixes fites inferiors.)

(b) Siguin R, S conjunts no buits, i $f\colon R \times S \to \mathbf{R}$ una funció fitada inferiorment. Proveu que $\inf\limits_{(x,y)\in R\times S} f(x,y) = \inf\limits_{x\in R} \inf\limits_{y\in S} f(x,y)$.

(Noteu que $f(R \times S) = \cup_{x\in R} f(\{x\} \times S)$.)

(c) Enuncieu els resultats anàlegs amb suprems.

26. Siguin $E = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbf{R}^2$, $D = ([0,1] \cup \mathbf{Q}) \times \{0\}$, i $f\colon E \to \mathbf{R}$ la funció característica de D.

Estudieu $\int_E f$, així com les integrals iterades de f; vegeu que algunes de les integrals parcials no existeixen com a integrals de Riemann.

27. Considereu la funció $f\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbf{R}$ definida per $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ 2y & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$.
Estudieu l'existència de les integrals

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} f\,, \quad \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y\, f(x,y)\,, \quad \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x\, f(x,y)\,.$$

28. Sigui $A = \left\{ \left(\frac{p}{2^n}, \frac{q}{2^n}\right) \mid n \geq 0,\ p,\ q \text{ imparells},\ 1 \leq p, q \leq 2^n \right\}$, i sigui χ_A la seva funció característica.

    (a) Calculeu les integrals iterades de χ_A sobre el quadrat $[0,1] \times [0,1]$.

    (b) Estudieu si χ_A és integrable Riemann sobre el mateix quadrat.

Respostes

3 Integrals de línia i de superfície

Problemes bàsics

1. Calculeu la llargada de les corbes següents:
   (a) Circumferència d'equació $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
   (b) $c(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$, $0<t<4\pi$ (hèlix).
   (c) $x=R(t-\sin t)$, $y=R(1-\cos t)$, $0<t<2\pi$ (cicloide).
   (d) $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ (el·lipse de semieixos $a>b$).
   (e) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (astroide o hipocicloide de quatre puntes). (El canvi $u=(x/a)^{1/3}$, $v=(y/a)^{1/3}$ us en pot inspirar una parametrització.)

2. Obteniu les fórmules que permeten calcular la llargada d'una corba plana en els supòsits indicats:
   (a) Corba en forma explícita $y=f(x)$, $x_1<x<x_2$.
   (b) Corba en coordenades polars $r=f(\phi)$, $\phi_1<\phi<\phi_2$.

3. Calculeu la llargada de les corbes expressades en coordenades polars següents:
   (a) $r=a\,(1+\cos\phi)$, $0<\phi<2\pi$ (cardioide).
   (b) $r=e^{-\phi}$, $0<\phi<+\infty$ (espiral logarítmica).

4. Calculeu les integrals de línia següents:
   (a) $\displaystyle\int_C \sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}\ell$, on C és la corba $x^2+y^2=a^2$, $y>0$.
   (b) $\displaystyle\int_C \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}\ell$, on C és la corba $x^2+y^2=R^2$, $z=d$.
   (c) $\displaystyle\int_C x^2\,\mathrm{d}\ell$, on C és la de la intersecció de l'esfera $x^2+y^2+z^2=1$ i el pla $x+y+z=0$.

5. Calculeu les integrals de línia $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ indicades:
   (a) $\displaystyle\int_{(R,0)}^{(-R,0)} x\,\mathrm{d}y$ al llarg de la corba $x^2+y^2=R^2$, $y>0$.
   (b) $\displaystyle\int_{(-1,1)}^{(1,1)} (x^2-2xy)\,\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\,\mathrm{d}y$, al llarg de la paràbola $y=x^2$.

(c) $\mathbf{F}(x,y) = (x+y,\, y-x)$; C és l'arc de l'el·lipse $x^2 + y^2/4 = 1$ orientat des del punt $(1,0)$ fins al $(0,2)$.

(d) $\mathbf{F}(x,y) = (2x+y^2,\, 3y-4x)$; C és la frontera de $R = \{(x,y) \mid y^2 \le x,\ y \ge x^2\}$ recorreguda en sentit positiu.

(e) $\displaystyle\int_{(1,0,0)}^{(2,1,2)} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ al llarg del segment que uneix ambdós punts, on $\mathbf{F} = \left(\dfrac{1}{x-y}, \dfrac{1}{y-x}, z\right)$.

(f) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y,\, y+z,\, z+x)$; C és l'arc de la paràbola $x = z^2$, $y = 0$, des de $(1,0,-1)$ fins $(1,0,1)$.

(g) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3+y,\, y^2+z,\, x+y+z)$; C és la circumferència $x^2+y^2 = 3$, $z = 0$, orientada en el pla XY en sentit positiu.

(h) $\displaystyle\oint_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, on C és la corba intersecció de $z = xy$ amb $x^2+y^2 = 1$, orientada de manera que la seva projecció sobre el pla XY sigui positiva.

6. Calculeu l'àrea de les superfícies següents:

(a) Con $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} = \dfrac{z^2}{h^2}$, $0 < z < h$.

(b) Esfera de radi a.

(c) Casquet esfèric d'alçada h en l'esfera de radi a.

7. Integreu les funcions següents sobre les superfícies indicades:

(a) $f(x,y,z) = (x^2+y^2)z$, sobre l'hemisferi superior de l'esfera de radi a centrada en l'origen.

(b) $f(x,y,z) = z$, sobre $z = 1-x^2-y^2$, $z > 0$.

(c) $f(x,y,z) = x$, sobre el cilindre definit per $x^2+y^2 = a^2$, amb $0 < z < 1$.

(d) $f(x,y,z) = 1$, sobre la superfície de $\mathbf{R}^3$ parametritzada per $g(u,v) = (u-v,\, u+v,\, uv)$, $u^2+v^2 < 1$.

8. Calculeu l'àrea de les superfícies següents:

(a) La porció de l'esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ interior al cilindre $x^2+y^2 = ay$, essent $a > 0$.

(b) El tros de l'esfera $x^2+y^2+z^2-2az=0$ (on $a\geq 0$) contingut dins el paraboloide $2z=x^2+y^2$.

(c) El fragment del con d'equació $x^2+y^2=z^2$ limitat pels plans $z=0$ i $y+2z=1$.

9. Sigui S la superfície de revolució obtinguda fent girar la corba generatriu $C\subset\{(x,y,z)\mid x>0,\ y=0\}$ al voltant de l'eix OZ.

(a) Si $x=a(t)$, $z=c(t)$ $(t_1<t<t_2)$ és una parametrització injectiva i regular de C, proveu que l'àrea de S és $2\pi\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,a(t)\sqrt{a'(t)^2+c'(t)^2}$.

(b) Apliqueu-ho a calcular l'àrea del tor de revolució de generatriu $(x-R)^2+z^2=r^2$.

10. Calculeu les integrals de superfície $\int_S \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$ indicades:

(a) $\mathbf{F}(x,y,z)=(y,-x,1)$, sobre la superfície parametritzada per $g(t,\theta)=(t\cos\theta,t\sin\theta,\theta)$, amb $0<t<1$ i $0<\theta<2\pi$.

(b) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x+y+z,\ y+z,\ z)$, a través de la frontera del cub $0\leq x,y,z\leq 2$, orientada vers l'exterior.

(c) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x+y,\ y-x,\ z)$, a través de la superfície S: $z=4-x^2-y^2$, $z\geq 0$, orientada amb el vector normal «cap amunt».

(d) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^3,x^2y,x^2z)$, a través de la frontera del conjunt definit per $x^2+y^2\leq a^2$, $0\leq z\leq b$, orientada cap a l'exterior.

(e) $\mathbf{F}(x,y,z)=(0,0,z^2)$, a través de la superfície cònica $(z-1)^2=x^2+y^2$, $0\leq z\leq 1$, tancada amb el pla $z=0$, orientada cap a l'exterior

(f) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y,1/3)$, a través de l'hemisferi $S=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1,\ z>0\}$, orientat amb el vector normal «cap amunt».

(g) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y,z)$, a través de la superfície $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2=1$, $z>0$, orientada amb el vector normal «cap amunt».

(h) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,0,0)$, sobre el fragment de l'esfera de centre l'origen i radi 1 contingut «dins» el semicon $x^2+y^2=z^2$, $z\geq 0$, orientat segons el vector normal en sentit radial.

(i) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y^2,z)$, sobre la frontera de la regió tancada pel pla $x+y+z=1$ i els plans coordenats, orientada vers l'exterior.

(j) $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$, a través de la frontera del conjunt $V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 \le R^2,\ z \ge 0,\ x \ge z\}$, orientada cap a l'exterior.

(k) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+e^y,\, z-y,\, x+y+z)$, a través de la superfície formada per la unió de $x^2+y^2+z^2 = 10z$ $(0 \le z \le 2)$ i $x^2+y^2 = (z-6)^2$ $(2 \le z \le 6)$, orientada cap a l'exterior.

11. La imatge M de la parametrització $\sigma\colon [0,2\pi] \times \,]-1,1[\to \mathbf{R}^3$

$$\sigma(\phi, v) = ((R + v\sin(\phi/2))\cos\phi,\ (R + v\sin(\phi/2))\sin\phi,\ v\cos(\phi/2))\,,$$

on $R > 1$ és una constant, és una banda de Möbius (sense vora).

(a) Justifiqueu que σ és injectiva, excepte que $\sigma(0,v) = \sigma(2\pi,-v)$.

(b) Calculeu els vectors tangents $\mathbf{T}_\phi$, $\mathbf{T}_v$ deduïts de la parametrització.

(c) Calculeu el producte vectorial d'aquests vectors sobre un punt qualsevol de l'«equador» de la banda, $\mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_v(\phi,0)$, i el corresponent vector normal unitari $\mathbf{n}(\phi,0)$.

(d) Vegeu que M no és orientable tot comparant $\mathbf{n}(0,0)$ i $\mathbf{n}(2\pi,0)$.

(e) Té sentit calcular el flux d'un camp vectorial a través de M? Podríem integrar la funció constant igual a 1 sobre M a fi de calcular-ne l'àrea?

Problemes addicionals

12. Calculeu la longitud de l'espiral $\alpha(t) = \left(t\cos\dfrac{2\pi}{t}, t\sin\dfrac{2\pi}{t}\right)$ $(0 < t < 1)$.

13. Calculeu les integrals de línia següents:

(a) $\displaystyle\oint_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\ell$, on C és la circumferència de centre $(0,0)$ i radi R.

(b) $\displaystyle\int_C (xy+z^2)\,\mathrm{d}\ell$, on C és l'arc d'hèlix $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ comprès entre $(1,0,0)$ i $(-1,0,\pi)$.

14. Calculeu les integrals de línia dels camps vectorials donats al llarg de les corbes orientades indicades:

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy,\, 3z,\, 5zy)$ al llarg de la corba parametritzada $\gamma(t) = (t+1, t^3-1, t^2)$ des de $(0,-2,1)$ fins $(2,0,1)$.

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, xz-y)$, sobre el segment que va des de $(0,0,0)$ fins $(1,2,4)$.

(c) $\mathbf{F}(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{x^2+y^2}, \dfrac{y-x}{x^2+y^2}\right)$, al llarg de la circumferència $x^2+y^2 = a^2$ recorreguda positivament.

(d) $\mathbf{F}(x,y,z) = (3xy, -y^2, e^z)$, al llarg de la corba d'equacions $z=0$, $y = 2x^2$, des de $(0,0,0)$ fins $(1,2,0)$.

(e) $\displaystyle\oint_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, on C és la circumferència de radi 2 centrada en $(1/3,1/3,1/3)$ i situada en el pla $x+y+z=1$, recorreguda en el sentit de les busques del rellotge vista des de l'origen.

(f) $\displaystyle\int_{(2,1,\pi/2)}^{(2,1,\pi)} \sin^2 z\,\mathrm{d}x + x\sin 2z\,\mathrm{d}z$, al llarg de la recta que uneix ambdós punts.

15. Proveu que la integral de línia $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}x}{yz} + \frac{\mathrm{d}y}{xz} + \frac{\mathrm{d}z}{xy}$ al llarg de qualsevol corba situada sobre un octant d'una esfera centrada a l'origen i de radi arbitrari val zero.

16. Una tanca circular, centrada a l'origen i de radi 1, té alçada $h(x,y) = |x| + |y|$. Calculeu-ne l'àrea.

17. Calculeu el centre de massa del sòlid pla $S = \{(x,y,z) \mid x+y+z=1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ (amd densitat distribuïda uniformement).

18. Calculeu el centre de massa de la regió de l'esfera $x^2+y^2+z^2 = r^2$ compresa entre els plans $z=a$ i $z=b$, amb $|a|, |b| \leq r$.

19. Calculeu el flux dels camps vectorials següents a través de les superfícies orientades indicades:

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$, a través de la superfície definida per $g(t,u) = (t+u, t-u, t)$, amb $0 < t < 2$ i $1 < u < 3$.

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y,-y,1)$ a través del paraboloide $z = 1-x^2-y^2$, $0 < z < 1$, orientat amb el vector normal «cap amunt».

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y,-y,1)$ a través de la meitat inferior de l'esfera de radi 1 centrada a l'origen i orientada amb el vector normal «cap avall».

(d) $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$, a través de la superfície de la piràmide limitada pels plans $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$.

(e) $\mathbf{F}(x,y,z) = (4xz,-y^2,yz)$, a través de la frontera del cub $0 \le x,y,z \le 1$.

(f) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x-y,\, x-y,\, 5z^3)$, a través de la superfície esfèrica $x^2+y^2+z^2=1$, orientada cap a fora.

(g) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,-y^2z,\, yz^2-x^2)$, a través de la superfície $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $z>0$, orientada cap a fora.

(h) $\mathbf{F}(x,y,z) = (z-y,\, x-z,\, z-x)$, a través de la superfície $x^2+y^2+z^2=9$, $1<z<2$, orientada en sentit radial positiu.

(i) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+z,\, z-y,\, 1)$, a través de la porció de superfície cònica $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3} = z^2$, compresa entre els plans $z=0$ i $z=1$, orientada en direcció z positiva.

20. Siguin $\mathbf{F} = (2,-3,1)$, i S un cercle de radi a, situat en un pla P. Doneu l'equació dels plans P per als quals el flux de $\mathbf{F}$ a través de S es màxim.

Respostes

1. (a) $2\pi R$.
   (b) $4\pi\sqrt{a^2+b^2}$.
   (c) $8R$.
   (d) $4a\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\,\sqrt{1-k^2\cos^2 t}$, amb $k=\sqrt{a^2-b^2}/a$ (excentricitat).
   (e) $6a$.
   (Una parametrització n'és $\gamma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$, amb $0 \le t \le 2\pi$.)
2. (a) $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\,\sqrt{1+f'(x)^2}$.
   (b) $\int_{\phi_1}^{\phi_2} \mathrm{d}\phi\,\sqrt{f(\phi)^2+f'(\phi)^2}$.
3. (a) $8a$.
   (b) $\sqrt{2}$.
4. (a) $2a^2$.
   (b) $\dfrac{2\pi R}{\sqrt{R^2+d^2}}$.
   (c) $2\pi/3$.
5. (a) $R^2\pi/2$.
   (b) $-14/15$.
   (c) $3/2-\pi$.

(d) $-49/30$.

(e) 2.

(f) $2/3$.

(g) -3π.

(h) $-\pi$.

6. (a) $\pi a\sqrt{a^2+h^2}$.

(b) $4\pi a^2$.

(c) $2\pi ah$.

7. (a) $\dfrac{\pi a^5}{2}$.

(b) $\pi\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{12}-\dfrac{11}{60}\right)$.

(c) 0.

(d) $\dfrac{\pi}{3}(6\sqrt{6}-8)$.

8. (a) $(-4+2\pi)a^2$.

(b) $4\pi a^2$, si $a\leq 1$; $4\pi a$, si $a>1$.

(c) $2\pi\sqrt{6}/9$.

9. (b) $4\pi^2 rR$.

10. (a) 2π.

(b) 24.

(c) 24π.

(d) $5\pi a^4 b/4$.

(e) $\pi/6$.

(f) $5\pi/3$.

(g) 12π.

(h) $\dfrac{8-5\sqrt{2}}{12}\pi$.

(i) $5/12$.

(j) $2R^3/3$.

(k) $116\pi/3$.

11. (c) $\mathbf{n}(\phi,0)=\begin{pmatrix}\cos\phi\cos\frac{\phi}{2}\\ \sin\phi\cos\frac{\phi}{2}\\ -\sin\frac{\phi}{2}\end{pmatrix}$

(e) No. Sí.

12. $+\infty$.

13. (a) $2\pi R^3$.

(b) $\sqrt{2}\pi^3/3$.

14. (a) $114/35$.

(b) $23/6$.

(c) -2π.

(d) $-7/6$.

(e) $-12\pi/\sqrt{3}$.

(f) -2.

15. Observeu que $\mathbf{F}(x,y,z)=\dfrac{1}{xyz}(x,y,z)$ és ortogonal a l'esfera.

16. 8.

17. $(x_{\rm cm},y_{\rm cm},z_{\rm cm})=(1/3,1/3,1/3)$.

18. $(x_{\rm cm},y_{\rm cm},z_{\rm cm})=\left(0,0,\dfrac{a+b}{2}\right)$.

19. (a) $104/3$.

(b) $4\pi/3$.

(c) $-\dfrac{\pi(\pi+8)}{4}$.

(d) 0.

(e) $3/2$.

(f) 4π.

(g) $-\pi a^3 b/4$.

(h) $14\pi/3$.

(i) $\sqrt{6}\pi$.

20. $2x-3y+z=C$.

4 Teoremes integrals de l'anàlisi vectorial

Problemes bàsics

Operadors diferencials

1. Designem per $\mathbf{r}$ el camp radial de $\mathbf{R}^n$, i per r la seva norma euclidiana, que és un camp escalar de classe C^∞ en $\mathbf{R}^n - \{0\}$. Obteniu les relacions següents:

   (a) $\operatorname{grad} r = \mathbf{r}/r$.

   (b) $\operatorname{grad} h(r) = \dfrac{h'(r)}{r}\mathbf{r}$, on $h\colon]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ és de classe C^1.

   (c) $\operatorname{grad} r^\alpha = \alpha r^{\alpha-2}\mathbf{r}$.

   (d) $\operatorname{div} \mathbf{r} = n$.

   (e) $\operatorname{div}(h(r)\mathbf{r}) = nh(r) + rh'(r)$. Quan val 0? I quan val $h(r)$?

   (f) $\operatorname{div}(r^\alpha \mathbf{r}) = (n+\alpha)r^\alpha$.

   (g) $\Delta h(r) = h''(r) + (n-1)h'(r)/r$.

   (h) $\Delta r^\alpha = \alpha(n+\alpha-2)r^{\alpha-2}$.

   (i) En dimensió $n = 3$, calculeu $\operatorname{rot}(h(r)\mathbf{r})$.

   (j) Doneu un camp vectorial en $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ amb rotacional i divergència nuls.

2. Si $\mathbf{r}$ és el camp radial de $\mathbf{R}^3$, calculeu el rotacional dels camps vectorials $\mathbf{a} \times \mathbf{r}$ i $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}$, on $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ són vectors constants.

Teorema de Green i potencials al pla

3. Calculeu les integrals de línia següents, aplicant el teorema de Green:

   (a) $\oint x^2 y \mathrm{d}x - xy^2 \mathrm{d}y$ sobre la circumferència $x^2 + y^2 = R^2$ (orientada positivament).

   (b) $\displaystyle\oint_C \frac{(x+2y)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$, on C és la circumferència centrada en $(2,0)$ i de radi 1.

   (c) $\displaystyle\oint_C -2xye^{-x^2}\mathrm{d}x + (e^{-x^2} + 3x)\mathrm{d}y$, essent C la corba $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

(d) $\oint_C y^2\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, al llarg del quadrat de vèrtexs $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ i $(0,2)$.

(e) $\oint_C (x^3 - 3y)\mathrm{d}x + (x + \sin y)\mathrm{d}y$, on C és el triangle de vèrtexs $(0,0)$, $(1,0)$ i $(0,2)$.

(f) $\int_C -x^2 y\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y$, essent C la corba definida per $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$, orientada des de $(1,0)$ fins a $(-1,0)$.

(g) $\oint_{C_1} \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} - \oint_{C_2} \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$, essent $\mathbf{f} = (e^x\cos y - y, -e^x \sin y)$, C_1 la corba $x^2 + y^2 = 4$ i C_2 la corba $x^2 - 2x + y^2 = 0$, ambdues orientades positivament.

4. Sigui $\mathbf{f} = (P, Q)$ un camp vectorial al pla. Sigui $C \subset \mathbf{R}^2$ una corba de Jordan i R la regió que tanca.

   (a) Com ha de ser $\mathbf{f}$ per tal d'assegurar que $\oint_C \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ sigui l'àrea de R?

   (b) Comproveu que $\mathbf{f} = \frac{1}{2}(-y, x)$ ho satisfà.

   (c) Apliqueu-ho a calcular l'àrea tancada per l'el·lipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

5. Sigui $U \subset \mathbf{R}^2$ un obert del pla, i $\mathbf{F}$ un camp vectorial de classe C^1 en U. Sigui $D \subset U$ una regió amb vora $\partial D = C$. Proveu el *teorema de la divergència* en el pla:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}r = \iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

   on $\mathbf{n}$ és el vector normal unitari exterior a D.
   (Si $\mathbf{F} = (P, Q)$, considereu el camp vectorial $\mathbf{G} = (-Q, P)$, i apliqueu-hi el teorema de Green.)
   (El primer membre s'anomena *flux* de $\mathbf{F}$ a través de C.)

6. Comproveu que les integrals de línia següents són independents del camí que uneix els punts inicial i final, i calculeu-les.

   (a) $\int_C \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, amb $\mathbf{f} = (e^{y^2}\cos x, 2ye^{y^2}\sin x)$, i $C = \{(x, y) \mid y = \sin x\}$ des de $(0,0)$ fins $(\pi, 0)$.

   (b) $\int_C \dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, on C és el quart d'el·lipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ situat en el primer quadrant, i orientat des de $(a, 0)$ fins $(0, b)$.

7. Sigui el camp vectorial $\mathbf{f}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$.

   (a) Calculeu la integral de $\mathbf{f}$ al llarg de la circumferència $x^2+y^2=r^2$, orientada positivament.

   (b) Sigui C una corba tancada simple que no deixa l'origen en el seu interior. Proveu que $\oint_C \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0$.

   (c) Sigui C una corba tancada simple (orientada positivament) que conté l'origen en el seu interior. Proveu que el valor de $\oint_C \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ és independent de la corba considerada. Quin és aquest valor?

   (d) Verifiqueu que el camp vectorial $\mathbf{f}$ compleix $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$. Admet funció potencial en el seu domini de definició? Per què?

   (e) Sigui $U =]0,1[\times]0,1[$. Comproveu que la integral $\int_{\partial U} \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ no es pot calcular mitjançant la fórmula de Green. Per què?

8. Siguin $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2<16,\ (x+2)^2+y^2>1,\ (x-1)^2+y^2>1\}$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ un camp vectorial de classe C^1 amb domini D, i $C \subset D$ una corba tancada simple, orientada positivament. Quants valors diferents pot valdre $\oint_C \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ (segons l'elecció de C) en els casos següents?

   (a) Si $\mathbf{f}$ és el gradient d'un camp escalar en D.

   (b) Si $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$.

Teorema de Kelvin–Stokes (del rotacional)

9. Calculeu la circulació dels camps vectorials següents al llarg de les corbes orientades indicades, utilitzant el teorema de Kelvin–Stokes:

   (a) $\mathbf{F} = (x^2y^3, 1, z)$,
   C, circumferència $x^2+y^2=R^2$, $z=0$, recorreguda en el sentit positiu.

   (b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, -2z, x)$,
   C, el·lipse intersecció del cilindre $x^2+y^2=R^2$ i el pla $x=z$, recorreguda de manera que la seva projecció sobre el pla XY sigui positiva.

   (c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (ye^{xy}, xe^{xy}, xyz)$,
   C, corba reunió de les tres corbes obtingudes tallant el con $x^2+y^2=$

$(z-1)^2$ amb els plans $x=0$, $y=0$ i $z=0$ i dins el primer octant; recorreguda de manera que, des de l'origen, es vegi en el sentit de les busques del rellotge.

(d) $\mathbf{F}=(y-z, z-x, x-y)$,
C, corba tancada intersecció de l'esfera $x^2+y^2+z^2=1$ i el pla $x+y+z=1$, recorreguda en el sentit $(1,0,0)\to(0,1,0)\to(0,0,1)$.

(e) $\mathbf{F}=(yz,-x,2y)$,
C, el triangle de vèrtexs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$, orientat en aquest sentit.

(f) $\mathbf{F}=(y,z,x)$,
C, la interseció de $z=xy$ amb $x^2+y^2=1$, recorreguda de forma que la seva projecció sobre el pla XY sigui positiva.

10. Verifiqueu el teorema de Kelvin–Stokes per a la superfície helicoïdal definida per la parametrització $\mathbf{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, v)$, $(u,v)\in[0,1]\times[0,\pi/2]$, i el camp vectorial donat per $\mathbf{F}(x,y,z)=(xz,yx,zy)$.

11. Calculeu el flux del rotacional del camp vectorial $\mathbf{F}=(y,zx,yzx)$ a través de la superfície $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$, orientada amb el vector normal «cap amunt».

Teorema de Gauss–Ostrogradskiĭ (de la divergència)

12. Calculeu els fluxos dels camps vectorials següents a través de les superfícies orientades donades, utilitzant el teorema de Gauss–Ostrogradskiĭ:

(a) $\mathbf{F}(x,y,z)=(xy,y^2,z^2)$,
S, la vora del cub $0<x<1$, $0<y<1$, $0<z<1$.

(b) $\mathbf{f}(x,y,z)=(x^2y,xy^2,xyz)$,
S, la vora de la regió $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z<a^2,\ x>0, y>0, z>0\}$, on $a>0$ és una constant.

(c) $\mathbf{f}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$,
S, la vora de la regió $V=\left\{(x,y,z)\mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\leq\dfrac{z^2}{b^2},\ 0\leq z\leq b\right\}$, on $a,b>0$ són dues constants.

(d) $\mathbf{p}(x,y,z) = x\mathbf{i} - (2x+y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
S, l'hemisferi $x^2+y^2+z^2=1$, $z>0$, orientat segons el vector normal exterior de l'esfera.

13. Siguin $a,b,c>0$ constants. Considereu les funcions $\varphi(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ i $g(x,y,z) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}$. Aplicant el teorema de Gauss–Ostrogradskiĭ, calculeu el flux del camp $\operatorname{grad}\varphi$ a través de la superfície $S = \{(x,y,z) \mid g(x,y,z) = 1, x>0, y>0, z>0\}$ orientada segons el vector normal «cap avall».

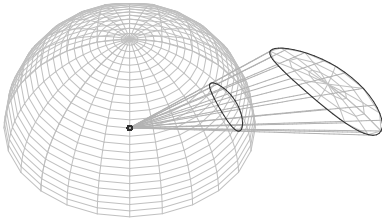
14. Un camp escalar $f(x,y,z)$ satisfà $\|\nabla f\|^2 = 4f$, $\nabla\cdot(f\nabla f) = 10f$. Calculeu $\iint_S \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S$ essent S l'esfera unitat centrada a l'origen i $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ la derivada direccional de f segons el vector normal unitari exterior a S.

15. De la mateixa manera que en el pla dues semirectes que parteixen d'un punt defineixen un angle, en l'espai podem definir *angle sòlid* com una regió Ω formada per semirectes que parteixen d'un origen O. La *mesura* d'aquest angle és l'àrea de la superfície obtinguda tallant Ω amb l'esfera S de centre O i radi 1.

(a) Vist des de l'origen, quant val l'angle sòlid de tot l'espai? I el d'un octant?

(b) Sigui M una superfície regular que no conté O i tal que cada semirecta amb origen O talla M com a molt en un sol punt. Sigui $\Omega(M)$ el conjunt d'aquestes semirectes que tallen M; s'anomena *angle sòlid* de vèrtex O subtendit per M.
Proveu que la seva mesura es pot calcular amb la integral de superfície $\displaystyle\int_M \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$.
(Sigui M_a la projecció de M sobre l'esfera de centre O i radi a, amb a prou petit, i sigui U la regió «cònica» compresa entre M_a i M. Utilitzeu el teorema de Gauss–Ostrogradskiĭ en U per a provar que la integral de superfície anterior coincideix amb $\dfrac{1}{a^2}\int_{M_a}\mathrm{d}S$, i noteu que aquesta quantitat

no depèn del radi a triat.)



(c) Calculeu la mesura de l'angle sòlid, amb vèrtex a l'origen, subtendit per la superfície esfèrica $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z>a\cos\alpha$.

Potencials a $\mathbf{R}^3$

16. Determineu $h(x,y,z)$ a fi que el camp $\mathbf{f}=(h,2x-3zy^2,-y^3+2xz)$ sigui conservatiu. Obteniu-ne aleshores un potencial.

17. Sigui $\mathbf{f}$ un camp vectorial de la forma $\mathbf{f}=\varphi(r)\,\mathbf{r}$.

    (a) Demostreu que $\mathbf{f}$ és conservatiu.

    (b) Determineu $\varphi(r)$ per tal que el flux de $\mathbf{f}$ a través de qualsevol superfície tancada que no contingui l'origen sigui nul.

    (c) En aquest darrer cas, calculeu la circulació de $\mathbf{f}$ entre els punts $(1,0,0)$ i $(0,1,\pi/2)$ mitjançant la funció potencial.

18. Comproveu que la integral de línia $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}(3x^2+yz)\mathrm{d}x+(3y^2+xz)\mathrm{d}y+(3z^2+xy)\mathrm{d}z$ no depèn del camí, i calculeu-la.

19. Donada la relació $\nabla\times\mathbf{F}=(xy^2+xz^2,yx^2+yz^2,-x^2z-y^2z-az^3)$, determineu a.

20. Sigui el camp vectorial $\mathbf{g}(x,y,z)=(-x,-y,2z)$.

    (a) Existeix algun camp $\mathbf{q}$ tal que $\operatorname{rot}\mathbf{q}=\mathbf{g}$? En cas afirmatiu, determineu-ne algun.

    (b) Calculeu $\iint_S \mathbf{g}\cdot\mathrm{d}S$, essent $S=\{(x,y,z)\mid (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,\ z>c\}$, semiesfera orientada en la direcció radial. (Useu el resultat anterior.)

Problemes addicionals

Operadors diferencials

21. Comproveu les propietats següents, on F i G són camps vectorials de classe C^2 en $\mathbf{R}^3$:

    (a) $\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{rot} F - F \cdot \operatorname{rot} G$.

    (b) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} F) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} F) - \Delta F$.

22. Si f i g són camps escalars de classe C^2 en $\mathbf{R}^3$, què val $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g)$?

23. Un fluid gira al voltant de l'eix OZ amb velocitat angular $\omega(x, y, z)$.

    (a) Calculeu el seu camp de velocitats $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (on $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$).

    (b) Calculeu el rotacional de $\mathbf{v}$.

    (c) En el cas que ω només depengui de la distància ρ a l'eix OZ, esbrineu quan $\mathbf{v}$ és irrotacional.

Teorema de Green i potencials al pla

24. Calculeu les integrals de línia següents, aplicant el teorema de Green:

    (a) $\oint_C (y^2 \cos x - 2e^y)\mathrm{d}x + (2y \sin x - 2xe^y)\mathrm{d}y$, on C és la corba d'equació $x^2 + y^2 = \pi$ (orientada positivament).

    (b) $\oint_C (2xe^{x^2-y^2} - 4y)\mathrm{d}x - (2ye^{x^2-y^2} - 4x)\mathrm{d}y$, on C és la circumferència $2x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 0$.

    (c) $\oint \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, amb $\mathbf{f} = (y - \cos x \cos y, -x + \sin x \sin y)$, al llarg de la circumferència $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

    (d) $\oint \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, on $\mathbf{f} = (xy + x^2 y, \frac{1}{2}x^2 + e^y \sin y)$, al llarg de la circumferència $x^2 + y^2 = 1$.

    (e) $\int_C (x^2+y^2)\mathrm{d}x + x(1+2y)\mathrm{d}y$, essent C la corba orientada definida per la parametrització $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 < t < 2\pi$ (cicloide).

25. Considereu el camp vectorial $\mathbf{f}(x, y) = \Big(\sqrt{x^2+y^2}, y\Big(xy + \log(x+\sqrt{x^2+y^2})\Big)\Big)$.

(a) Raoneu si s'hi pot aplicar el teorema de Green en el rectangle $R = [1,4] \times [0,2]$.

(b) Calculeu la circulació de $\mathbf{f}$ al llarg de la vora de R.

26. Determineu l'àrea del domini comprès entre l'eix OX i l'arc de cicloide definit per la parametrització $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$, amb $0 \leq t \leq 2\pi$.

27. Siguin $f(x,y)$ un camp escalar de classe C^2 en un obert $U \subset \mathbf{R}^2$, $R \subset U$ una regió, i $C = \partial R$ la vora de R, amb vector normal exterior unitari $\mathbf{n}$.

(a) Aplicant el teorema de la divergència, proveu la fórmula:

$$\iint_R \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_C \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \, \mathrm{d}\ell,$$

on $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ és la derivada direccional de f segons el vector normal unitari.

(b) Calculeu $\oint_C \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, \mathrm{d}\ell$, on $u = x^2 + 3y^2$ i $\mathbf{n}$ és el vector normal exterior unitari a la corba $x^2 + y^2 = 4$, directament i com a aplicació de l'apartat anterior.

28. Estudieu si els camps vectorials següents admeten funció potencial. En cas afirmatiu, calculeu-la.

(a) $\mathbf{f}(x,y) = (xy, 1)$.

(b) $\mathbf{f}(x,y) = (y, x)$.

(c) $\mathbf{f}(x,y) = (x^2 - 3xy, x^2 - x^3 + y)$.

(d) $\mathbf{f}(x,y) = (e^{x-y}(1 + x + y), e^{x-y}(1 - x - y))$.

(e) $\mathbf{f}(x,y) = \left(\dfrac{2x}{y + x^2}, \dfrac{1}{y + x^2} \right)$.

29. Comproveu que les integrals de línia següents són independents del camí, i calculeu-les.

(a) $\displaystyle\int_C x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$, al llarg de la corba $y = \varphi(x)$ des de $x = 0$ fins $x = 2\pi$.

(b) $\displaystyle\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)\mathrm{d}x + \psi(y)\mathrm{d}y$.

(c) $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{4x(y^2+1)\mathrm{d}x - 4x^2 y \mathrm{d}y}{(x^2+y^2+1)^2}$.

30. Siguin P i Q funcions $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1, tals que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Definim

$$f(x,y) = \int_0^1 (x\,P(tx,ty) + y\,Q(tx,ty))\,\mathrm{d}t\,.$$

(a) Proveu que f és potencial del camp $\mathbf{F} = (P,Q)$.

(b) Apliqueu-ho a les funcions $P = x + 2y$, $Q = 2x + y^3$.

Teorema de Kelvin–Stokes

31. Calculeu la circulació dels camps vectorials següents al llarg de les corbes indicades, utilitzant el teorema de Kelvin–Stokes:

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (3xz + yz, 3xz - 3zy, 2xy)$,
C, corba tancada obtinguda intersecant el pla $2x + 2y - z = 2$ amb la frontera del cub $Q = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$, recorreguda en el sentit que va de $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$.

(b) $\mathbf{f} = (x + y, y + z, z + x)$,
C, el·lipse intersecció del cilindre $x^2 + y^2 = 3$ amb el pla $2x + 2y + z = 0$, recorreguda de manera que la seva projecció al pla XY es recorri positivament.

(c) $\mathbf{f} = (y, z, x)$,
C, corba intersecció de les dues superfícies $x + y = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, recorreguda de manera que, vista des de l'origen, el sentit és el de les busques del rellotge.

(d) $\mathbf{F} = (x - y + z, y - z + x, z - x + y)$,
corba intersecció de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ amb $2x + 2y + z = 0$, orientada de manera que la seva projecció sobre el pla XY sigui recorreguda en sentit positiu.

32. Siguin $\mathbf{F} = (ye^{xy}, xe^{xy} + a(x - z), -ax)$ i C la corba intersecció de $x + y + z = 1$ amb $x^2 + y^2 = 1$. Calculeu a per tal que la circulació de $\mathbf{F}$ al llarg de C valgui π.

33. Obteniu $\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$, essent $\mathbf{F} = (x - z, x^3 + yz, -3xy^2)$ i S la superfície $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < z < 2$ orientada amb el vector normal «cap amunt».

34. Siguin $\mathbf{F}$ un camp amb rotacional $(1,2,3)$ i C la intersecció de $x^2+y^2=1$ amb $x+y+z=1$ recorreguda de manera que, en projectar sobre el pla XY, doni sentit positiu. Determineu $\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$.

35. Sigui $\mathbf{f}$ un camp vectorial de classe C^1 normal a una superfície regular S. Proveu que $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ és tangent a S. (Apliqueu el teorema de Kelvin–Stokes.)

Teorema de Gauss–Ostrogradskiĭ

36. Calculeu els fluxos dels camps vectorials a través de les superfícies orientades donades, utilitzant el teorema de Gauss–Ostrogradskiĭ:

    (a) $\mathbf{F}(x,y,z)=(yz,xz,xy)$,
    S, la vora del cub $|x|<1$, $|y|<1$, $|z|<1$.

    (b) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$,
    S, la mateixa.

    (c) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x-y,y-z,x-y)$,
    S, la mateixa.

37. Calculeu $\iint_S (\operatorname{rot}\mathbf{F})\cdot \mathrm{d}S$, on $\mathbf{F}$ és el camp vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=(-y,x^2,z^3)$ i S és la superfície que limita la regió $x^2+y^2+z^2\le 1$, $1/2\le z\le 1$.

38. Siguin $\mathbf{F}=(ye, x\cos z, x\cos y-b)$ i S la superfície $x^2+y^2+z^2-2az=1$, $z>0$, on $a>0$. Determineu b per tal que el flux radial positiu a través de S sigui π, independentment de a.

39. Donat el camp vectorial $\mathbf{F}=(y+z^2-x, z^2+y-x, a\sqrt{2}z/3)$ i les superfícies S_1: $(z-2)^2=x^2+y^2$, $0<z<2$, i S_2: $x^2+y^2<4$, $z=0$, trobeu el valor de a per tal que els fluxos «cap amunt» de $\mathbf{F}$ a través d'ambdues superfícies coincideixin.

40. Proveu que el flux d'un camp constant a través d'una superfície tancada S és nul. Proveu també que si $\mathbf{a}$ és un vector fixat, llavors $\iint_S \cos(\mathbf{n},\mathbf{a})\,\mathrm{d}S=0$.

41. Sigui U una regió de $\mathbf{R}^3$ que no contingui l'origen, i sigui S la vora de U. Expresseu $\iint_S r^\alpha \mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ com una integral en la regió U. Què s'obté si $\alpha=0$?

42. Suposem que els camps escalars f i g satisfan les equacions $\nabla^2 g=0$, $g\nabla^2 f=x+y$, i $\nabla\cdot(g\nabla f)=x+y+z$.

Calculeu la integral de superfície $\iint_S f \dfrac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\,\mathrm{d}S$, essent S l'el·lipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, i $\dfrac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}$ la derivada direccional segons el vector normal exterior a S.

43. Sigui V una regió de l'espai, i $S = \partial V$ la seva vora.

    (a) Aplicant el teorema de la Gauss–Ostrogradskiĭ a $\iint_S \phi \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ obteniu l'expressió

    $$\iiint_V \|\nabla\phi\|^2\,\mathrm{d}V = -\iiint_V \phi\nabla^2\phi\,\mathrm{d}V + \iint_S \phi\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S\,,$$

    essent $\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{n}}$ la derivada direccional segons el vector normal unitari exterior a S.

    (b) Demostreu que si ϕ_1 i ϕ_2 són dues solucions del *problema de Neumann*

    $$\nabla^2\phi = h \text{ en } V, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = g \text{ en } S,$$

    cal $\phi_1 - \phi_2 = \text{const.}$ (Considereu $\psi = \phi_1 - \phi_2$.)

    (c) Demostreu que un camp vectorial $\mathbf{f}$ definit en una regió V queda determinat pel seu rotacional i la seva divergència en V, i el seu component normal en $S = \partial V$.
    (Considereu $\mathbf{g} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$ amb $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$ dos camps amb mateixa divergència i rotacional en V, i mateix component normal en S.)

44. Demostreu que, a fi que el problema de Neumann

    $$\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} = g \text{ en } \Gamma = \partial\Omega,$$

    tingui una solució u, és necessari que $\int_\Omega f\,\mathrm{d}V = \int_\Gamma g\,\mathrm{d}S$.
    (Apliqueu el teorema de Gauss–Ostrogradskiĭ a $\int_\Gamma \nabla u \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S$.)

45. Es consideren coordenades esfèriques (r, θ, ϕ) ($r^2 = x^2+y^2+z^2$, $z = r\cos\theta$). Sigui u una solució del problema $\nabla^2 u = u$ si $r < 1$, i $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \sin\theta$ si $r = 1$. Obteniu $\iiint_{r\le 1} u\,\mathrm{d}V$.

Potencials a $\mathbf{R}^3$

46. Siguin u i v camps escalars de classe C^1 en un conjunt obert $D \subset \mathbf{R}^3$, i $C \subset D$ una corba tancada orientada. Obteniu $\oint_C (u\nabla v + v\nabla u) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$.

47. Sigui φ una funció de classe C^1 en un obert simplement connex D, i $\mathbf{f}$ un camp vectorial conservatiu de classe C^1 en D. Proveu que el camp vectorial $\varphi\,\mathbf{f}$ és conservatiu sii $\operatorname{grad}\varphi$ i $\mathbf{f}$ són en cada punt proporcionals.

48. Comproveu que els camps vectorials següents són conservatius, i calculeu-ne potencials escalars.

    (a) $\mathbf{f} = \mathbf{r}/r$.

    (b) $\mathbf{f} = \dfrac{\mathbf{r}}{r^2}$.

    (c) $\mathbf{f} = r^\alpha \mathbf{r}$, $(\alpha \neq -2)$.

    (d) $\mathbf{f}(x, y, z) = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2)$.

    (e) $\mathbf{f}(x, y, z) = (y^2 z, 2xyz, xy^2 - 1)$.

49. Trobeu $P(x, y, z)$ per tal que $\operatorname{rot}(P, (x - z)y, 0) = (y, z, x)$.

50. Demostreu que el camp vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$ és solenoïdal, i obteniu un camp vectorial $\mathbf{g}$ tal que $\mathbf{f} = \operatorname{rot}\mathbf{g}$.

51. Sigui el camp vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^{3/2}$ definit a $\mathbf{R}^3 - \{0\}$.

    (a) Proveu que no existeix un camp vectorial $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$.

    (b) Proveu que $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$, per a cert camp escalar U; trobeu-lo.

Respostes

1. (e) $h(r) = C/r^n$, $h(r) = C/r^{n-1}$.
   (i) 0.
   (j) $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^3$.
2. $2\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
3. (a) $-\pi R^4/2$.
   (b) 0.
   (c) 15π.
   (d) -4.
   (e) 4.
   (f) $\pi/4$.
   (g) 3π.

4. (a) Cal $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$.

6. (a) 0.
   (b) $b - a$.

7. (a) 2π.
   (c) 2π.
   (d) No.
   (e) La integral de línia dóna $\pi/2$, mentre que $\int_U \ldots$ val 0. La raó és que $\bar{U}$ inclou el punt $(0,0)$, que no és del domini del camp vectorial.

8. Un i quatre, respectivament.

9. (a) $-\pi R^6/8$.
   (b) $-3\pi R^2$.
   (c) 0.
   (d) $-4\pi/\sqrt{3}$.
   (e) $1/2$.
   (f) $-\pi$.

10. La circulació de $\mathbf{f}$ al llarg de la vora orientada en un sentit val $4/3 - \pi/8$.

11. $-\pi$.

12. (a) $5/2$.
    (b) $5a^6/24$.
    (c) $\pi a^2 b^2/2$.
    (d) $2\pi/3$.

13. $-\dfrac{1}{3}abc\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)$.

14. 8π.

15. (a) 4π; $\pi/2$.
    (c) $2\pi(1 - \cos\alpha)$.

16. $h = 2y + z^2 + g(x)$. Un potencial és $\phi = 2xy + xz^2 - y^3 z + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

17. (b) $\varphi(r) = k/r^3$.
    (c) $k - \dfrac{k}{\sqrt{1 + (\pi/2)^2}}$.

18. 4.

19. $a = 2/3$.

20. (a) Sí, per exemple $(0, 2zx, yx)$.
    (b) $2\pi c R^2$.

22. 0.

23. (a) $\mathbf{v}(x,y,z) = (-\omega y, \omega x, 0)$,
    (b) $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \left(-x\dfrac{\partial\omega}{\partial z}, -y\dfrac{\partial\omega}{\partial z}, 2\omega + x\dfrac{\partial\omega}{\partial x} + y\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\right)$.
    (c) $\omega = A/\rho^2$, amb $\rho^2 = x^2 + y^2$.

24. (a) 0.
    (b) 17π.
    (c) -4π.
    (d) $-\pi/4$.
    (e) $\dfrac{8\pi^3 a^3}{3} - 3\pi a^2$.

25. (a) Sí.
    (b) 8.

26. $3\pi R^2$.

27. (b) 32π.

28. (a) No.
    (b) Sí, $xy + C$.
    (c) No.
    (d) Sí, $e^{x-y}(x+y) + C$.
    (e) Sí, $\log|x^2 + y| + C$.

29. (a) $2\pi^2 + \dfrac{1}{2}(\varphi^2(2\pi) - \varphi^2(0))$.
    (b) $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y)\,\mathrm{d}y$.
    (c) $-1/9$.

30. (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}y^4 + 2xy$.

31. (a) $3/2$.

(b) -15π.

(c) $-2\sqrt{2}\pi$.

(d) $10\pi/3$.

32. $a = 1/3$.

33. 12π.

34. 6π.

36. (a) 0

(b) 0.

(c) 16.

37. 0.

38. -1.

39. 0.

41. $(3+\alpha)\iiint_T r^\alpha \mathrm{d}V$.

42. 0.

45. π^2.

46. 0.

48. (a) $r + k$.

(b) $\log r + k$.

(c) $\dfrac{r^{\alpha+2}}{\alpha+2} + k$.

(d) $x^2y + xz^3 + k$.

(e) $z(xy^2 - 1) + k$.

49. $\dfrac{1}{2}(-2xy + y^2 + z^2) + \varphi(x)$.

50. $\mathbf{g}(x,y,z) =$
$\left(x^2/2 - xy - yz + z^2/2\right)\mathbf{j}$ +
$\left(x^2/2 - xz\right)\mathbf{k}$.

51. (a) $\mathbf{F}$ no té divergència nul·la.

(b) $U = 2\sqrt{r}$.

5 Formes diferencials i teorema de Stokes

Problemes bàsics

1. A $\mathbf{R}^3$ considereu les formes diferencials $\alpha = x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y$, $\beta = z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}z$ i $\gamma = z\,\mathrm{d}y$. Calculeu $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$, $\mathrm{d}\alpha$, $\mathrm{d}\beta$, $\mathrm{d}\gamma$ i $\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)$.

2. Calculeu les diferencials exteriors de les formes diferencials següents:

   (a) $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$.

   (b) $P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$.

   (c) $P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

3. A $\mathbf{R}^n$ sigui $r = \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{1/2}$ la distància euclidiana a l'origen, i considereu la 1-forma diferencial $\theta = x_1\mathrm{d}x_1 + \ldots x_n\mathrm{d}x_n$.

   (a) Calculeu $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}h(r)$ (on h és una funció diferenciable d'una variable) i $\mathrm{d}r^\alpha$, expressant el resultat en termes de θ.

   (b) Calculeu $\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}(r^\alpha\theta)$.

4. A $\mathbf{R}^2$ considereu la 1-forma diferencial $\omega = r^\alpha(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$, amb $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
   Calculeu $\mathrm{d}\omega$. Existeix un α per al qual $\mathrm{d}\omega = 0$?

5. A $\mathbf{R}^3$ considereu la 2-forma $\omega = r^\alpha(x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$, essent $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
   Calculeu $\mathrm{d}\omega$. Existeix un α per al qual $\mathrm{d}\omega = 0$?

6. Considereu l'aplicació $F\colon\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ donada per $F(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Calculeu els *pull-backs* següents: $F^*(x^2+y^2)$, $F^*(\mathrm{d}x)$, $F^*(\mathrm{d}y)$, $F^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$, $F^*(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$.

7. Considereu l'aplicació $F\colon\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ donada per $F(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$.

   (a) Calculeu $F^*(\mathrm{d}x)$, $F^*(\mathrm{d}y)$, $F^*(\mathrm{d}z)$.

   (b) Calculeu $F^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$, $F^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z)$, $F^*(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)$.

   (c) Calculeu $F^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)$.

8. Sigui $F(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$. Calculeu el *pull-back* per F de les formes diferencials $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, $\dfrac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

9. Sigui $F(r,\theta,\phi) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$. Calculeu el *pull-back* per F de les formes diferencials $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ i $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$.

10. En $\mathbf{R}^2$ considereu la 1-forma diferencial $\omega = xy\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$. Calculeu $\int_C \omega$ on C és:
    (a) La circumferència amb centre l'origen i radi 1, recorreguda en sentit antihorari.
    (b) El fragment de la paràbola $x = y^2$ que va de $(1,-1)$ fins a $(1,1)$.
    (c) L'el·lipse $x^2 + 2y^2 = 4$, recorreguda en sentit antihorari.

11. Calculeu la integral de la 1-forma diferencial $\omega = (x-y)\,(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$ sobre la línia poligonal de $\mathbf{R}^2$ definida pels vèrtexs $(1,0) \to (0,1) \to (-1,0) \to (0,-1) \to (1,0)$.

12. En $\mathbf{R}^3$ considereu la 2-forma $\omega = x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - 2yz\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$. Calculeu la integral $\int_S \omega$, on S és la porció de cilindre definida per $x^2+y^2=9$, $0<z<2$, amb la normal dirigida vers l'«exterior» del cilindre.

13. En $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ la 1-forma diferencial

$$\omega = r^{-2}\,(-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$$

és tancada. Proveu que no és exacta calculant-ne la integral sobre la circumferència d'equació $x^2+y^2=R^2$.

14. En $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ la 2-forma diferencial

$$\omega = r^{-3}\,(x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$$

és tancada. Proveu que no és exacta calculant-ne la integral sobre l'esfera definida per l'equació $x^2+y^2+z^2=R^2$.

15. Calculeu $\int_S \omega$, on $S \subset \mathbf{R}^3$ és l'esfera de centre l'origen i radi 1 orientada amb el vector normal cap enfora i $\omega = x^2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

16. A $\mathbf{R}^3$, sigui

$$\omega = -(y+z)\,\mathrm{d}x + \cos(xyz)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z\,.$$

Sigui S el mig el·lipsoide definit per $(x/2)^2 + (y/6)^2 + (z/3)^2 = 1$, $y>0$, orientat amb el vector normal «cap enfora» respecte a l'el·lipsoide complet.

(a) Calculeu $\int_S \mathrm{d}\omega$ aplicant directament el teorema de Stokes.

(b) Sigui T la superfície plana definida per $(x/2)^2 + (z/3)^2 < 1$, $y = 0$, orientada amb el vector normal $(0, 1, 0)$ en cada punt. Calculeu $\int_T \mathrm{d}\omega$ a partir de la definició de la integral d'una forma diferencial.

(c) Expliqueu per què $\int_S \mathrm{d}\omega = \int_T \mathrm{d}\omega$.

17. Es considera la 2-forma

$$\omega = z(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + y(x^2 + z^2)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + x(z^2 - y^2)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\,.$$

Calculeu $\int_S \omega$, on S és el conjunt definit per $x^2+y^2+z^2 = 1$, $0 < z < 1/\sqrt{2}$, orientat amb el vector normal «cap enfora» de l'esfera.

Problemes addicionals

18. Considereu l'esfera unitat $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Digueu quins d'aquests camps vectorials de $\mathbf{R}^3$ hi són tangents.

(a) $F(x,\, y,\, z) = (-y,\, x,\, 0)$.

(b) $F(x,\, y,\, z) = (x,\, y,\, z)$.

(c) $F(x,\, y,\, z) = (y,\, x,\, 0)$.

(d) $F(x,\, y,\, z) = (yz,\, xz,\, -2xy)$.

19. Considereu l'esfera unitat S parametritzada amb coordenades esfèriques:

$$\sigma(u, v) = (\cos u\, \cos v, \sin u\, \cos v, \sin v), \quad u \in [0,\, 2\pi], \quad v \in [0, \pi]\,.$$

Siguin T_u, T_v els vectors tangents de la parametrització.

(a) Sigui $\omega_1 = -xz\,\mathrm{d}x - yz\,\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z$. Calculeu $\omega_1(T_u)$ i $\omega_1(T_v)$. Interpreteu el resultat.

(b) Sigui $\omega_2 = \omega_1 + x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$. Proveu que si X és un camp vectorial en $\mathbf{R}^3$ tangent a S en tot punt aleshores, per a tot $p \in S$, $\omega_2(p)\,(X) = \omega_1(p)\,(X)$. Interpreteu el resultat.

(c) Considereu els camps vectorials $F(x,\, y,\, z) = (-y,\, x,\, 0)$, $G(x,\, y,\, z) = (yz,\, xz,\, -2xy)$, $H(x,\, y,\, z) = (-xz,\, -yz,\, x^2 + y^2)$. Comproveu que $(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)\,(F, G, H) = 0$, i expliqueu el resultat.

20. Calculeu l'expressió en coordenades de $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g$, essent

$$f(x,y,z) = \ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right),\ g(x,y,z) = \sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$

21. A $\mathbf{R}^6$ considereu $\omega = \mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4 + \mathrm{d}x_5\wedge\mathrm{d}x_6$. Calculeu $\omega\wedge\omega\wedge\omega$.

22. Considereu l'espaitemps ordinari $\mathbf{R}^4$ amb coordenades cartesianes (t,x,y,z), i les formes diferencials

$$A = \varphi\,\mathrm{d}t - A_1\,\mathrm{d}x - A_2\,\mathrm{d}y - A_3\,\mathrm{d}z\,,$$

$$F = E_1\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x + E_2\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}y + E_3\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}z - B_1\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - B_2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - B_3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\,.$$

(a) Utilitzant l'operador ∇ en el mateix sentit que en el càlcul vectorial de $\mathbf{R}^3$, proveu que la relació $F = \mathrm{d}A$ equival a

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\,,\quad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}\,.$$

(b) Semblantment, proveu que $\mathrm{d}F = 0$ equival a

$$\nabla\times\mathbf{E} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,,\quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0\,.$$

23. A $\mathbf{R}^4-\{0\}$, considereu la funció $r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$, el camp vectorial radial

$$\Delta = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3} + x_4\frac{\partial}{\partial x_4}\,,$$

la 3-forma diferencial

$$\Sigma = x_1\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4 - x_2\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4 - x_3\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_4\wedge\mathrm{d}x_2 - x_4\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3$$

i la forma de volum

$$\Omega = \mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4\,.$$

(a) Comproveu que $\mathrm{d}\Sigma = 4\Omega$.

(b) Comproveu que $\frac{1}{r}\mathrm{d}r\wedge\Sigma = \Omega$.

(c) Comproveu que $i_\Delta\Omega = \Sigma$.

24. Recordem que una forma diferencial θ es diu tancada si $\mathrm{d}\theta = 0$, i es diu exacta si existeix una altra forma diferencial ω tal que $\theta = \mathrm{d}\omega$.

(a) Demostreu que el producte exterior de dues formes tancades és una forma tancada.

(b) Demostreu que el producte exterior d'una forma exacta per una forma tancada és una altra forma exacta.

(c) Demostreu que si ω és una 1-forma diferencial i f una funció enlloc nul·la tals que $f\omega$ és tancada, aleshores $\omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0$.

(d) Doneu un exemple d'una forma diferencial ω tal que $\omega \wedge \mathrm{d}\omega \neq 0$.

(e) Si ω és una forma diferencial de grau parell, proveu que $\omega \wedge \mathrm{d}\omega$ és tancada.

25. Considereu l'aplicació $L(\omega) = \omega \wedge \mathrm{d}\omega$. És cert que $L^2(\omega) = 0$? I és cert que $\mathrm{d}\, L(\omega) = L(\mathrm{d}\omega)$?

26. Considereu l'aplicació $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ donada per $F(u, v) = (uv, 1)$. Calculeu $F^*(\mathrm{d}x)$, $F^*(\mathrm{d}y)$, $F^*(y\mathrm{d}x)$, $F^*(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$.

27. Calculeu $\int_D (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, on $\alpha \geq 0$ i D és la mitja bola definida per $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$, $z > 0$.

28. Donada la 2-forma

$$\omega = \left(\frac{x}{r^3} + a\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{y}{r^3} + b\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{z}{r^3} + c\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\,,$$

amb a, b, c constants, calculeu $\int_S \omega$, on S és una esfera de radi R i centre l'origen orientada amb el vector normal cap enfora.

Respostes

1. $\alpha \wedge \beta = yz\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + x^2\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z - xy\, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$,
   $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma = -x^2 z\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$,
   $\mathrm{d}\alpha = 0 = \mathrm{d}\beta$, $\mathrm{d}\gamma = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$,
   $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = 0$.

2. (a) $(Q_x - P_y)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.
   (b) $(Q_x - P_y)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + (R_y - Q_z)\, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (P_z - R_x)\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$.
   (c) $(P_x + Q_y + R_z)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

3. (a) $\mathrm{d}r = \frac{1}{r}\theta$, $\mathrm{d}h(r) = h'(r)\, \mathrm{d}r = \frac{h'(r)}{r}\theta$,
   $\mathrm{d}r^\alpha = \alpha r^{\alpha-1} \mathrm{d}r = \alpha r^{\alpha-2}\theta$.

4. $\mathrm{d}\omega = (\alpha + 2) r^\alpha\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.
   És zero sii $\alpha = -2$.

5. $\mathrm{d}\omega = (\alpha+3)r^\alpha\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$.
   És zero sii $\alpha=-3$.

6. $F^*(x^2+y^2) = (u^2+v^2)^2$,
   $F^*(\mathrm{d}x) = 2u\mathrm{d}u - 2v\mathrm{d}v$,
   $F^*(\mathrm{d}y) = 2v\mathrm{d}u + 2u\mathrm{d}v$,
   $F^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) = 4(u^2+v^2)\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$,
   $F^*(-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y) = 2(u^2+v^2)(-v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v)$.

7. (a) $F^*(\mathrm{d}x) = -\sin u\,\mathrm{d}u$,
   $F^*(\mathrm{d}y) = \cos u\,\mathrm{d}u$,
   $F^*(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}v$.

   (b) $F^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) = 0$,
   $F^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z) = -\sin u\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$,
   $F^*(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z) = \cos u\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$.

   (c) $F^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z) = 0$.

8. $F^*(\mathrm{d}x) = \cos\phi\,\mathrm{d}r - r\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$,
   $F^*(\mathrm{d}y) = \sin\phi\,\mathrm{d}r + r\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$,
   $F^*(-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = r^2\,\mathrm{d}\phi$,
   $F^*\left(\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\right) = \mathrm{d}\phi$,
   $F^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) = r\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\phi$.

9. $F^*(\mathrm{d}x) = \sin\theta\cos\phi\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$,
   $F^*(\mathrm{d}y) = \sin\theta\sin\phi\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$,
   $F^*(\mathrm{d}z) = \cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$,
   $F^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) =$
   $r\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\phi + r^2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi$,
   $F^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z) =$
   $-r\cos\phi\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\theta\sin\phi\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\phi - r^2\sin^2\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi$,
   $F^*(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z) =$
   $-r\sin\phi\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\cos\theta\cos\phi\,\mathrm{d}r\wedge d\phi + r^2\sin^2\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi$,
   $F^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z) = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi$.

10. Les integrals valen 0, 8/15, 0.

11. 4.

12. $18\,\pi$.

13. 2π (amb la circumferència orientada positivament). Si ω fos exacta llavors la seva integral sobre una corba «tancada» seria 0.

14. 4π (amb S orientada vers l'exterior). Si ω fos exacta llavors la seva integral sobre una superfície «tancada» seria 0.

15. 0.

16. $\int_S \mathrm{d}\omega = \int_T \mathrm{d}\omega = -12\pi$.

17. $-\pi\sqrt{2}/16$.

18. (a) Hi és tangent en tot punt.

    (b) No hi és tangent en cap punt.

    (c) Només hi és tangent sobre els meridians que s'obtenen en tallar l'esfera amb els plans $x=0$ o $y=0$.

    (d) Hi és tangent en tot punt.

19. (a) $\omega_1(T_u) = 0$ i $\omega_1(T_v) = \cos(v)$.

    (b) La diferència entre ω_1 i ω_2 és la 1-forma $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$, que precisament anul·la els vectors tangents a l'esfera.

    (c) Es veu fàcilment que els tres camps són tangents a qualsevol esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, i, a més, s'anul·len a l'origen. Per tant, són linealment dependents en tot punt de l'espai; així doncs, en aplicar-los qualsevol 3-forma dóna 0.

20. $\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g = 0$.

21. $\omega^{\wedge 3} = 6\,\Omega$, essent
    $\Omega = \mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4\wedge\mathrm{d}x_5\wedge\mathrm{d}x_6$.

24. (d) $\omega = \mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}z$.

25. Les dues afirmacions són falses. Per a la primera podeu considerar una expressió del tipus $\mathrm{d}x_1 + x_2\,\mathrm{d}x_3 + {+}x_4\,\mathrm{d}x_5 + \ldots$

26. $F^*(\mathrm{d}x) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v = F^*(y\mathrm{d}x)$, $F^*(\mathrm{d}y) = 0$, $F^*(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = 0$.

27. $\dfrac{2\pi}{\alpha+3} R^{\alpha+3}$.

28. Dóna $4\,\pi$, com en el problema 14; la integral de $a\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + b\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + c\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ és nul·la, com es veu immediatament.