Solució: (Solució d'Esteve Casas, Sant Celoni.) Recordem en primer lloc la propietat següent dels nombres combinatoris:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Com a conseqüència directa, obtenim que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} &= \frac{1}{2^n}\left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k} + \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1}\right),\end{aligned}$$

és a dir, que $a_{n,k} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$, ja que satisfà les condicions inicials i la relació de recurrència.

De cara a la segona part, recordem la fórmula de Stirling, que diu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^n}} = 1.$$

En altres paraules, en el càlcul del límit podem substituir $n!$ per $\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$, $(n!)^2$ per $\frac{n^{2n}2\pi n}{e^{2n}}$ i $(2n)!$ per $\frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}}{e^{2n}} = \frac{2^{2n}n^{2n}2\sqrt{\pi n}}{e^{2n}}$. Per tant, $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ pot ser substituït per $\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$. Finalment, calculem el límit:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n a_{2n,n}^2 &= \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{2^{4n}}\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2\\ &= \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{2^{4n}}\frac{2^{4n}}{\pi n} = \frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

Matemots

Xavier Gràcia
Universitat Politècnica de Catalunya

Recordeu que es tracta d'un joc de llengua (vegeu l'article introductori al núm. 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses.

Exemple: «Criteri de convergència que s'amaga al jardí» (5 lletres). La resposta és «arrel», en referència al criteri de l'arrel sobre la convergència de sèries de termes positius, i també a l'arrel de les plantes del jardí.

En cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pàgina.[7]

1. Pot ser angle, i també penetrant, subtil o eixerit (menys de 5 lletres)
2. El polígon més bel·licós (8 lletres)
3. Branca de la matemàtica que provoca problemes al ronyó (6)
4. Regions de l'espai que omplen la benzinera (7 lletres)
5. Ésser que governa sobre els axiomes dels nombres reals (6 lletres)
6. Peculiaritat d'una superfície o d'un cos (14 lletres)
7. Fan una poesia amb els zeros de la funció zeta (5 lletres)
8. Problema NP-difícil que es resol anant de ciutat en ciutat (8 lletres)

[7] Respostes als Matemots: 8. viatjant; 3. càlcul; 6. característica; 2. pentàgon; 4. octants; 7. rimen; 5. suprem; 1. agut.