Suplement d'àlgebra: orientacions

Sigui E un $\mathbf{R}$-espai vectorial de dimensió finita n. Donades dues bases $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ i $\bar{\mathcal{B}} = (\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n)$, sigui $\mathcal{M}(\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}})$ la matriu de canvi de base (els seus elements són els coeficients c^i_j tals que $\bar{\mathbf{e}}_j = \sum_i \mathbf{e}_i \, c^i_j$).

Es diu que $\mathcal{B}$ i $\bar{\mathcal{B}}$ tenen la *mateixa orientació* si $\det \mathcal{M}(\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}) > 0$, i *orientació oposada* si $\det \mathcal{M}(\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}) < 0$.

Així, el conjunt de les bases de E queda dividit en dues classes, anomenades *orientacions.*[1]

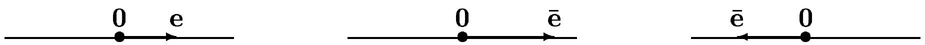
Diem que E és un *espai vectorial orientat* quan s'hi ha triat una orientació (de les dues possibles). Les bases que pertanyen a aquesta orientació es diuen *positives* o directes, i les altres es diuen *negatives* o inverses.

L'espai vectorial $\mathbf{R}^n$ té una orientació canònica, que és, naturalment, la definida per la base canònica.

Interpretació geomètrica de l'orientació

Dimensió 1 Orientar una recta és triar-hi una semirecta, o triar-hi un dels dos sentits.

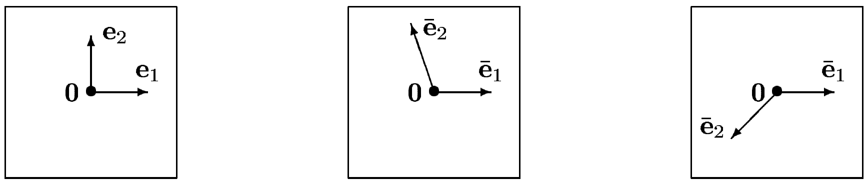
Donada una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e})$, la base $\bar{\mathcal{B}} = (\bar{\mathbf{e}})$, amb $\bar{\mathbf{e}} = c\,\mathbf{e}$, té la mateixa orientació si $c > 0$, i l'oposada si $c < 0$.



mateixa oposada

Dimensió 2 Orientar un pla és donar un sentit de rotació, del primer vector cap al segon vector.

Donada una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, la base $\bar{\mathcal{B}} = (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2)$, amb $\bar{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1$ i $\bar{\mathbf{e}}_2 = b\,\mathbf{e}_1 + d\,\mathbf{e}_2$, té la mateixa orientació si $d > 0$, i l'oposada si $d < 0$.



mateixa oposada

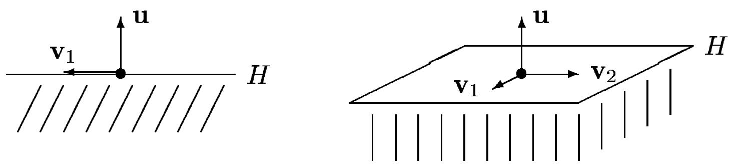
[1] Més precisament: dins el conjunt de les bases de E, la relació tal que $\mathcal{B} \sim \bar{\mathcal{B}}$ sii $\det \mathcal{M}(\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}) > 0$ és una relació d'equivalència. Una *orientació* és una classe d'equivalència, i el conjunt quocient té dos elements.

Hiperplans en un espai orientat

Sigui E un espai vectorial orientat, i $H \subset E$ un hiperplà (és a dir, un subespai de dimensió $n-1$). El conjunt $E - H$ està format per dos semiespais. És el mateix:

- orientar H
- triar un d'aquests semiespais

La relació entre els dos conceptes és la següent: si H està orientat per una base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$, els vectors $\mathbf{u} \notin H$ tals que la base de E $(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ és positiva formen un semiespai.



recta en el pla pla en l'espai

Hiperplans en un espai euclidià orientat

Si E és un espai euclidià i $H \subset E$ un hiperplà, el subespai ortogonal $H^\perp \subset E$ té dimensió 1, i per tant conté dos vectors unitaris. En el cas que E estigui orientat, orientar H equival, doncs, a

- triar un vector ortogonal (també dit normal) unitari

(per conveni prendrem aquell, $\mathbf{n}$, tal que, amb les notacions anteriors, $(\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ està orientada positivament).

El producte vectorial

Un cas particular el tenim quan E és un espai euclidià orientat de dimensió 3. En aquest cas està definit el producte vectorial $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ de dos vectors qualssevol. Aquest producte és un vector ortogonal als vectors multiplicats, i és diferent de zero sii són linealment independents.

Si $H \subset E$ és un pla orientat per una base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, llavors el vector normal unitari esmentat abans és el vector normalitzat $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \,/\, \|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|$.