Suplement d'àlgebra: formes quadràtiques

Sigui E un $\mathbf{R}$-espai vectorial. Una *forma bilineal simètrica* en E és una aplicació $g\colon E \times E \to \mathbf{R}$ que compleix les propietats de *bilinealitat*:

$$g(\lambda x + \lambda' x', y) = \lambda\, g(x,y) + \lambda' g(x',y), \quad g(x, \mu y + \mu' y') = \mu\, g(x,y) + \mu' g(x,y'),$$

i de *simetria*:

$$g(x,y) = g(y,x),$$

per a qualssevol vectors $x, x', y, y' \in E$ i escalars $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbf{R}$.

Dos vectors $x, y \in E$ es diuen *ortogonals* per g si $g(x,y) = 0$. Es diu que g és *no-degenerada* si l'únic vector ortogonal a tots els altres és el vector 0.

Anomenem *forma quadràtica associada* a g l'aplicació $Q\colon E \to \mathbf{R}$ definida per $Q(x) = g(x,x)$. (Atenció: Q *no* és lineal! Per exemple, $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$.) Una forma bilineal simètrica està determinada per la seva forma quadràtica associada:

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\big).$$

Per tant, podem referir-nos indistintament a g o a Q. Qualsevol d'aquestes es diu:

definida positiva si, $\forall x \neq 0$, $Q(x) > 0$
semidefinida positiva si, $\forall x$, $Q(x) \geq 0$
definida negativa si, $\forall x \neq 0$, $Q(x) < 0$
semidefinida negativa si, $\forall x$, $Q(x) \leq 0$
indefinida si $Q(x)$ pren valors > 0 i < 0.

Suposem d'ara endavant que E és de dimensió finita, i sigui $(e_1, \ldots, e_n)$ una base de E. S'anomena *matriu de g en la base (e_i)* la matriu

$$G = (g_{ij}), \text{ on } g_{ij} = g(e_i, e_j).$$

La propietat de simetria de g es tradueix en el fet que G és simètrica.

Donats dos vectors $x = \sum_i e_i \xi^i$, $y = \sum_j e_j \eta^j$, es pot escriure

$$g(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i g_{ij} \eta^j = \begin{pmatrix} \xi^1 & \ldots & \xi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \xi^\top G\, \eta,$$

i en particular $Q(x) = \xi^\top G\, \xi$.

Si $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ és una nova base de E i $P = (P^i_k)$ la matriu del canvi de base, $\bar{e}_k = \sum_i e_i P^i_k$, llavors la matriu $\bar{G} = (\bar{g}_{ij})$ de g en la nova base és $\bar{G} = P^\top G\, P$.

Afirmar que g és no-degenerada equival a afirmar que la seva matriu (en una base qualsevol) és invertible ($\det G \neq 0$).

Una base de E es diu *ortogonal* si està formada per vectors ortogonals dos a dos:

$$g(e_i, e_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Evidentment, afirmar que la base (e_i) és ortogonal equival a dir que la matriu de g en aquesta base és diagonal: $G = \begin{pmatrix} g_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{nn} \end{pmatrix}$. Llavors $Q(x) = g_{11}(\xi^1)^2 + \ldots + g_{nn}(\xi^n)^2$.

Teorema *Sigui E un $\mathbf{R}$-espai vectorial de dimensió finita n, g una forma bilineal simètrica en E. Existeix una base de E on la matriu de g és de la forma*

$$\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0_r \end{pmatrix}$$

En aquesta matriu, el nombre de uns i el de menys uns són característics de g, en el sentit que no depenen de la base triada; es diu que (p,q) és la signatura de g. Observem que g és no-degenerada sii $p + q = n$ (o sigui $r = 0$), és definida positiva (resp. definida negativa) sii $p = n$ (resp. $q = n$), i és indefinida sii ambdós p i q són no nuls.

Els nombres (p,q) es poden determinar mitjançant algun dels resultats següents:

Proposició (criteri de Sylvester) *Amb les hipòtesis anteriors, sigui G la matriu de g en alguna base, i considereu els menors diagonals principals de G:*

$$\Delta_1 = g_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}.$$

Llavors g és definida positiva sii $\Delta_k > 0$ ($1 \leq k \leq n$), i és definida negativa sii $(-1)^k \Delta_k > 0$ ($1 \leq k \leq n$).

Proposició *Amb les mateixes hipòtesis, p és el nombre de valors propis > 0 de G, i q és el nombre de valors propis < 0 de G.*

(Recordem que els valors propis de G són reals, ja que és simètrica.) Aquests nombres es poden determinar, per exemple, aplicant la regla de Descartes al polinomi característic de la matriu G.

En dimensions baixes, les formes quadràtiques es redueixen als casos següents:

Dimensió $n = 2$:

no-degenerat			*degenerat*		
def. positiu	*def. negatiu*	*indefinit*			
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}$
$\Delta_1 > 0$	$\Delta_1 < 0$				
$\Delta_2 > 0$		$\Delta_2 < 0$	$\Delta_2 = 0$		

Dimensió $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$