# Anàlisi Vectorial
# Fascicles de resultats

apunts per a l'assignatura d'Anàlisi Vectorial
de l'enginyeria de Telecomunicació de l'ETSETB

Xavier Gràcia

xgracia@ma4.upc.edu

http://www-ma4.upc.edu/~xgracia/anvec

*Departament de Matemàtica Aplicada IV*
*Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona*
*Universitat Politècnica de Catalunya*

primavera del 2000 / versió 8 maig 2014

# Sumari

**1 Topologia de $\mathbf{R}^n$ 3**
1.1 Funcions de diverses variables . . . 3
1.2 Normes i distàncies . . . 3
1.3 Conjunts oberts i tancats . . . 4
1.4 Successions. Conjunts compactes . . . 5
**2 Límits i continuïtat 6**
2.1 Continuïtat . . . 6
2.2 Propietats de les funcions contínues . . . 6
2.3 Límit d'una funció en un punt . . . 7
2.4 Casos especials de límits . . . 7
**3 Derivació 9**
3.1 Diferenciabilitat . . . 9
3.2 Derivades parcials i direccionals . . . 9
3.3 Condicions suficients de diferenciabilitat . . . 9
3.4 Propietats de la derivació . . . 10
3.5 Derivades parcials d'ordre superior . . . 10
3.6 Teorema de la funció inversa. Canvis de coordenades . . . 11
3.7 Teorema de la funció implícita . . . 11
**4 Aplicacions geomètriques de la derivació 13**
4.1 Vectors tangents . . . 13
4.2 Gradient d'una funció escalar . . . 13
4.3 Superfícies . . . 13
4.4 Vectors tangents a una superfície . . . 14
4.5 Corbes . . . 15
4.6 Vectors tangents a una corba . . . 15
4.7 Varietats $m$-dimensionals . . . 16
**5 Estudi local de funcions 17**
5.1 Fórmula de Taylor . . . 17
5.2 Extrems locals de funcions . . . 17
5.3 Extrems condicionats locals . . . 18
5.4 Extrems absoluts . . . 19
**6 Integració 20**
6.1 Integral de Riemann sobre rectangles compactes . . . 20
6.2 Conjunts de mesura nul·la . . . 21
6.3 Integral de Riemann sobre conjunts mesurables Jordan . . . 21
6.4 Teorema de Fubini . . . 22
6.5 Teorema del canvi de variables . . . 22
6.6 Integrals dependents de paràmetres . . . 23
6.7 Integrals impròpies . . . 23
**7 Integrals de línia i de superfície 24**
7.1 Integrals de línia de funcions escalars . . . 24
7.2 Integrals de línia de funcions vectorials . . . 24
7.3 Integrals de superfície de funcions escalars . . . 25
7.4 Integrals de superfície de funcions vectorials en $\mathbf{R}^3$ . . . 25
**8 Teoremes integrals de l'anàlisi vectorial 27**
8.1 Operadors diferencials sobre camps en $\mathbf{R}^3$ . . . 27
8.2 Teoremes del rotacional i de la divergència . . . 27
8.3 Potencials . . . 28
8.4 Camps en $\mathbf{R}^2$: teorema de Green i potencials . . . 29
8.5 Complements: vora i condicions de validesa dels teoremes integrals . . . 30
8.6 Els operadors diferencials en altres sistemes de coordenades 30
**Índex terminològic 32**

# Propòsit

Aquests «fascicles» recullen l'esquelet de l'assignatura d'Anàlisi Vectorial, impartida per l'autor dins la titulació d'Enginyeria de Telecomunicació de l'ETSETB (pla 1992) durant la primavera de l'any dos mil. No hi ha demostracions, ni gairebé exemples. Només les definicions i els teoremes.
No són, doncs, un material que pugui substituir d'alguna manera els apunts, ni tan sols pot servir d'introducció als diversos temes de l'assignatura. Les finalitats bàsiques d'aquestes notes són ser un resum de referència de la teoria, (amb el benentès que cal haver-la estudiada i treballada abans) i ser un ajut per a foragitar els errors que a vegades habiten les pissarres i els apunts.

Aquests apunts van ser revisats en els anys posteriors. L'assignatura va desaparèixer amb el següent pla d'estudis (2009), però si s'hi troben errades o possibles millores encara se'n farà alguna revisió.

Les definicions apareixen <u>subratllades</u>. La resta d'enunciats són proposicions, teoremes, corol·laris, … Alguns comentaris i resultats auxiliars també hi apareixen, amb una lletra més petita.

# 1 Topologia de $\mathbf{R}^n$

## 1.1 Funcions de diverses variables

**(1.1.1)** L'espai euclidià de dimensió $m$ ($m \geq 1$) és el conjunt $\mathbf{R}^m$ de $m$-ples de nombres reals

$$x = (x^1, \ldots, x^m) = (x^i)_{1 \leq i \leq n}\,,$$

on $x^1, \ldots, x^m \in \mathbf{R}$ són els components de $x$.

**(1.1.2)** Una funció real de $m$ variables és una aplicació $f\colon A \to \mathbf{R}$ que a cada *punt* $x$ d'un subconjunt $A \subset \mathbf{R}^m$ (el domini de $f$) li assigna un nombre real $f(x)$ (el *valor* de $f$ en $x$).

Si la funció ve donada per una «fórmula» considerarem, en principi, que el seu domini són tots els punts on aquesta fórmula es pot calcular.

**(1.1.3)** Més generalment considerarem funcions vectorials $f\colon A \to \mathbf{R}^n$,

$$f(x) = (f^1(x), \ldots, f^n(x))\,,$$

on les funcions escalars $f^j\colon A \to \mathbf{R}$ són les components de $f$.

**(1.1.4)** La imatge o recorregut de $f$ és el conjunt $f(A)$ dels seus valors:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset \mathbf{R}^n\,.$$

**(1.1.5)** El graf de $f$ és el conjunt dels parells formats per cada punt de $A$ i el seu valor:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in A,\ y = f(x)\} \subset A \times \mathbf{R}^n\,.$$

**(1.1.6)** Donat $c \in \mathbf{R}^n$, el conjunt de nivell $c$ és

$$f^{-1}(c) = \{x \in A \mid f(x) = c\} \subset A\,.$$

Observem que tot $A$ és la reunió de tots els conjunts de nivell:

$$A = \cup_{c \in \mathbf{R}^n} f^{-1}(c)\,.$$

D'altra banda, geomètricament els conjunts de nivell es poden obtenir tallant el graf de $f$ amb els subespais $y = c$: $\Gamma_f \cap (A \times \{c\}) = f^{-1}(c) \times \{c\}$.

## 1.2 Normes i distàncies

**(1.2.1)** Sigui $E$ un espai vectorial real (o complex). Una norma en $E$ és una aplicació $p\colon E \to \mathbf{R}$ tal que, per a qualssevol vectors $x, y$ i escalar $\lambda$,

- $p(x) \geq 0$, i $p(x) = 0$ sii $x = 0$
- $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (desigualtat triangular)

Es diu que $(E, p)$ és un espai normat.

Quan s'utilitza una sola norma és habitual representar-la amb una notació com ara $\|x\| \equiv p(x)$.

**(1.2.2)** Sigui $E$ un espai euclidià (o unitari), amb producte escalar $(x|y)$. La igualtat

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

defineix una norma en $E$, dita *norma euclidiana.*

Tot espai euclidià és doncs un espai normat, però hi ha normes que no provenen d'un producte escalar. Perquè una norma es pugui definir per un producte escalar és necessari i sufucient que satisfaci la *llei del paral·lelogram*

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\,.$$

**(1.2.3)** Els exemples més importants de normes a $\mathbf{R}^n$ són:

- La norma euclidiana
  $$\|x\|_2 = \left(|x^1|^2 + \ldots + |x^n|^2\right)^{1/2}\,,$$
  que prové del producte escalar estàndard: $x \cdot y \equiv (x|y) = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$.
- La norma del taxi
  $$\|x\|_1 = |x^1| + \ldots + |x^n|\,.$$
- La norma del suprem
  $$\|x\|_\infty = \sup(|x^1|, \ldots, |x^n|)\,.$$

Estan relacionades. Per exemple es compleix

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty\,.$$

Aquestes normes són casos particulars de la les normes $\mathrm{L}^p$ (amb $p \geq 1$), definides per

$$\|x\|_p = \left(|x^1|^p + \ldots + |x^n|^p\right)^{1/p}\,.$$

La norma del suprem n'és el límit quan $p$ tendeix a infinit.

**(1.2.4)** De manera anàloga, si es considera l'espai de les funcions reals contínues definides en un interval compacte, $\mathrm{C}([a, b], \mathbf{R})$, s'hi poden definir normes similars:

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\, \mathrm{d}t\right)^{1/2}\,,$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\,,$$
$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\,.$$

**(1.2.5)** Els exemples anteriors s'apliquen sense cap canvi als espais complexos $\mathbf{C}^n$ o $\mathrm{C}([a,b],\mathbf{C})$.

**(1.2.6)** Sigui $E$ un conjunt. Una distància en $E$ és una aplicació $\mathrm{d}\colon E\times E\to\mathbf{R}$ tal que, per a qualssevol punts $x,y,z\in E$,

- $\mathrm{d}(x,y)\geq 0$, i $\mathrm{d}(x,y)=0$ sii $x=y$
- $\mathrm{d}(x,y)=\mathrm{d}(y,x)$
- $\mathrm{d}(x,z)\leq \mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,z)$

Es diu que $(E,\mathrm{d})$ és un espai mètric.

**(1.2.7)** Sigui $E$ un espai normat. La igualtat
$$\mathrm{d}(x,y)=\|x-y\|$$
defineix una distància en $E$.

Així doncs tot espai normat és un espai mètric, però evidentment no tota distància prové d'una norma.

**(1.2.8)** En el cas que la norma sigui una norma euclidiana, es diu que la distància corresponent és la distància euclidiana.

Per exemple, la distància euclidiana a $\mathbf{R}^n$ és
$$\mathrm{d}(x,y)=\left(\sum_{i=1}^n |x^i-y^i|^2\right)^{1/2}.$$
Semblantment, la distància euclidiana entre dues funcions $f,g\in\mathrm{C}([a,b],\mathbf{R})$, dotat del producte escalar integrant en $[a,b]$, és
$$\mathrm{d}(f,g)=\left(\int_a^b |f(t)-g(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

## 1.3 Conjunts oberts i tancats

**(1.3.1)** Siguin $p\in\mathbf{R}^n$, $r>0$. Es defineixen:

- Bola oberta de centre $p$ i radi $r$:
  $$\mathrm{B}(p;r)=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \mathrm{d}(p,x)<r\}\,.$$
- Bola tancada de centre $p$ i radi $r$:
  $$\overline{\mathrm{B}}(p;r)=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \mathrm{d}(p,x)\leq r\}\,.$$

**(1.3.2)** A vegades també s'usen:

- Esfera de centre $p$ i radi $r$:
  $$\mathrm{S}(p;r)=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \mathrm{d}(p,x)=r\}\,.$$
- Bola perforada de centre $p$ i radi $r$:
  $$\mathrm{B}^*(p;r)=\mathrm{B}(p;r)-\{p\}\,.$$

**(1.3.3)** Un conjunt fitat és aquell que està contingut en alguna bola.

Una funció es diu fitada si el seu recorregut és un conjunt fitat.

**(1.3.4)** Donats $p\neq q$, existeix $r>0$ tal que $\mathrm{B}(p;r)\cap\mathrm{B}(q;r)=\emptyset$.

**(1.3.5)** Respecte a un subconjunt $A$, es diu que un punt $p$ és:

- Punt interior: si hi ha alguna bola $\mathrm{B}(p;r)\subset A$.
- Punt adherent: si tota bola $\mathrm{B}(p;r)$ conté punts de $A$. Pot ser:
  aïllat (o isolat): hi ha alguna bola $\mathrm{B}(p;r)$ tal que $A\cap\mathrm{B}(p;r)=\{p\}$,
  d'acumulació: tota bola $\mathrm{B}(p;r)$ conté punts de $A$ diferents de $p$.
- Punt frontera: és adherent però no interior.
  O sigui: tota bola $\mathrm{B}(p;r)$ conté punts de $A$ i punts que no són de $A$.
- Punt exterior: si no és adherent.
  O sigui: alguna bola $\mathrm{B}(p;r)$ no conté cap punt de $A$.

**(1.3.6)** Sigui $A\subset\mathbf{R}^n$ un subconjunt. Es defineixen:

- Interior de $A$, $\mathring{A}=\mathrm{Int}(A)=\{\text{punts interiors de } A\}$.
- Adherència de $A$, $\bar{A}=\{\text{punts adherents de } A\}$.
- Frontera de $A$, $\mathrm{Fr}(A)=\{\text{punts frontera de } A\}=\bar{A}-\mathring{A}$.
- Exterior de $A$, $\mathrm{Ext}(A)=\{\text{punts exteriors de } A\}=\mathbf{R}^n-\bar{A}$.

**(1.3.7)** Es té $\mathring{A}\subset A\subset\bar{A}$.

Donat qualsevol $A\subset\mathbf{R}$, es pot escriure $\mathbf{R}^n=\mathrm{Int}(A)\cup\mathrm{Fr}(A)\cup\mathrm{Ext}(A)$, i aquests tres conjunts són disjunts.

**(1.3.8)** Si $p$ és un punt interior de $A$, es diu que $A$ és un veïnat de $p$.

**(1.3.9)** Un subconjunt $A$ es diu obert si $\mathring{A}=A$ (tots els seus punts són interiors).

Un subconjunt $A$ es diu tancat si el seu complementari és obert.

**(1.3.10)** Un subconjunt $A$ és tancat sii $\bar{A} = A$.

**(1.3.11)** Un subconjunt és tancat sii conté tots els seus punts d'acumulació.
Un subconjunt és tancat sii conté tots els seus punts frontera.

**(1.3.12)** Les boles obertes [tancades] són conjunts oberts [tancats].
Els conjunts finits són tancats.
Els únics conjunts oberts i tancats alhora dins $\mathbf{R}^n$ són $\emptyset$ i $\mathbf{R}^n$.

**(1.3.13)** Propietats dels conjunts oberts de $\mathbf{R}^n$:

i) $\emptyset$ i $\mathbf{R}^n$ són oberts.
ii) La unió d'una família arbitrària de conjunts oberts és obert.
iii) La intersecció de dos conjunts oberts és obert.

**(1.3.14)** Propietats dels conjunts tancats de $\mathbf{R}^n$:

i) $\emptyset$ i $\mathbf{R}^n$ són tancats.
ii) La intersecció d'una família arbitrària de conjunts tancats és tancat.
iii) La unió de dos conjunts tancats és tancat.

**(1.3.15)** En canvi, la intersecció d'una família infinita de conjunts oberts pot no ser obert, i la unió d'un família infinita de conjunts tancats pot no ser tancat.

## 1.4 Successions. Conjunts compactes

**(1.4.1)** Una successió de punts de $\mathbf{R}^n$ és una aplicació $\mathbf{N} \to \mathbf{R}^n$; usualment es representa amb una expressió com ara $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$, o fins i tot $(x_k)$.
Ja que cada punt $x_k$ té $n$ components, donar una successió $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de punts de $\mathbf{R}^n$ equival a donar $n$ successions de nombres reals $(x_k^i)_{k\in\mathbf{N}}$, amb $i = 1 \dots n$, $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$.

**(1.4.2)** Es diu que $a$ és límit de $(x_k)$ si

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists k_\circ \in \mathbf{N})\ \big(k > k_\circ \Longrightarrow \mathrm{d}(x_k, a) < \varepsilon\big)\,.$$

Equival a afirmar que $\mathrm{d}(x_k, a) \to 0$.

**(1.4.3)** Si una successió té límit, és únic.
En tal cas la successió es diu convergent i es posa $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, i també $x_k \to a$.

**(1.4.4)** Tota successió convergent és fitada.

**(1.4.5)** Una successió en $\mathbf{R}^n$ és convergent sii ho són les $n$ successions coordenades; en tal cas, $\lim x_k = a \iff \lim x_k^i = a^i$ per a cada $i = 1 \dots n$.

**(1.4.6)** Siguin $a_k \to a$, $b_k \to b$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Llavors

$$a_k + b_k \to a + b, \quad \lambda a_k \to \lambda a, \quad (a_k|b_k) \to (a|b)\,.$$

Si $(y_k)$ és fitada i $z_k \to 0$, llavors $(y_k|z_k) \to 0$.

**(1.4.7)** Una successió $(x_k)$ és de Cauchy si

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists k_\circ \in \mathbf{N})\ (k, l > k_\circ \Longrightarrow \mathrm{d}(x_k, x_l) < \varepsilon)\,.$$

**(1.4.8)** Una successió $(x_k)$ en $\mathbf{R}^n$ és de Cauchy sii cada successió coordenada $(x_k^i)$ $(i = 1 \dots n)$ és de Cauchy.

**(1.4.9)** $\mathbf{R}^n$ és un espai complet: una successió és convergent sii és de Cauchy.

**(1.4.10)** Siguin $p$ un punt, $A$ un subconjunt. Llavors $p \in \bar{A}$ sii existeix una successió d'elements de $A$ convergent cap a $p$.

**(1.4.11)** Siguin $p$ un punt, $A$ un subconjunt. Llavors $p$ és un punt d'acumlació de $A$ sii existeix una successió d'elements de $A - \{p\}$ convergent cap a $p$.

**(1.4.12)** Sigui $(k_j)_{j\in\mathbf{N}}$ una successió estrictament creixent de nombres naturals. Donada una successió $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'elements de $A$, es diu que la successió $(a_{k_j})_{j\in\mathbf{N}}$ és una successió parcial (o subsuccessió) de $(a_k)$.

**(1.4.13)** Un subconjunt $A \subset \mathbf{R}^n$ es diu compacte (o, per ser més precisos, *compacte per successions*) si compleix la propietat següent: tota successió d'elements de $A$ té una successió parcial convergent cap a un punt de $A$.

**(1.4.14)** *Teorema de Borel–Lebesgue*
Un subconjunt de $\mathbf{R}^n$ és compacte sii és tancat i fitat.

# 2 Límits i continuïtat

## 2.1 Continuïtat

**(2.1.1)** Siguin $A \subset \mathbf{R}^m$ un subconjunt, $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ una funció, i $a \in A$ un punt. $f$ es diu contínua en $a$ si

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in A) \quad \mathrm{d}(a,x) < \delta \Longrightarrow \mathrm{d}(f(a), f(x)) < \varepsilon\,,$$

que també es pot escriure

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0) \quad f(A \cap \mathrm{B}(a;\delta)) \subset \mathrm{B}(f(a);\varepsilon)\,.$$

**(2.1.2)** $f$ es diu contínua si ho és en tot punt del seu domini.

**(2.1.3)** Si $a$ és un punt aïllat de $A$, $f$ hi és contínua automàticament.

**(2.1.4)** Siguin $f\colon A \to \mathbf{R}^n$, $a \in A \subset \mathbf{R}^m$. Són equivalents:

i) $f$ és contínua en $a$.
ii) Per a tota successió $(a_k)$ d'elements de $A$ tal que $a_k \to a$, $f(a_k) \to f(a)$.

**(2.1.5)** Sigui $f = (f^1, \ldots, f^n)\colon A \to \mathbf{R}^n$. $f$ és contínua en $a$ sii ho són les seves funcions components $f^j\colon A \to \mathbf{R}$.

**(2.1.6)** Si $f$ és contínua en $a$, $f$ és fitada en algun veïnat de $a$.

**(2.1.7)** Si $f\colon A \to \mathbf{R}$ és contínua en $a$ i $f(a) \neq 0$, $f$ no canvia de signe en un veïnat de $a$.

**(2.1.8)** Siguin $f, g\colon A \to \mathbf{R}^n$, on $A \subset \mathbf{R}^m$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Si $f$ i $g$ són contínues, també ho són $f + g$, $\lambda f$ i $(f|g)$.
En el cas $n = 1$, si $f$ no s'anul·la llavors $1/f$ és contínua.

**(2.1.9)** Les projeccions coordenades $\mathrm{pr}_i\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, $\mathrm{pr}_i(x) = x^i$, són contínues.
Les aplicacions lineals són contínues.
Les funcions polinòmiques són contínues.
Les funcions racionals són contínues arreu on no s'anul·la el denominador.

**(2.1.10)** Siguin $A \subset \mathbf{R}^m$, $B \subset \mathbf{R}^n$, $A \xrightarrow{f} \mathbf{R}^n$, $B \xrightarrow{g} \mathbf{R}^p$ amb $f(A) \subset B$.
Siguin $a \in A$, $b = f(a)$ i suposem que $f$ és contínua en $a$ i $g$ és contínua en $b$.
Llavors $g \circ f$ és contínua en $a$.

**(2.1.11)** Sigui $f\colon A \to \mathbf{R}^n$, on $A \subset \mathbf{R}^m$. Són equivalents:

i) $f$ és contínua.
ii) Per a tot conjunt obert $V \subset \mathbf{R}^n$, $f^{-1}(V) = A \cap U$, on $U \subset \mathbf{R}^m$ és obert.
iii) Per a tot conjunt tancat $T \subset \mathbf{R}^n$, $f^{-1}(T) = A \cap S$, on $S \subset \mathbf{R}^m$ és tancat.

**(2.1.12)** El teorema anterior s'aplica a la construcció de subconjunts oberts o tancats de $\mathbf{R}^m$.

## 2.2 Propietats de les funcions contínues

**(2.2.1)** Sigui $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ contínua, on $A \subset \mathbf{R}^m$. Si $A$ és compacte, $f(A)$ és compacte.

**(2.2.2)** *Teorema de Weierstrass*
Si $f\colon A \to \mathbf{R}$ és contínua i $A$ és compacte, $f$ assoleix un màxim i un mínim.

**(2.2.3)** Siguin $A \subset \mathbf{R}^m$, $f\colon A \to \mathbf{R}^n$. $f$ es diu uniformement contínua si

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x, y \in A) \quad \mathrm{d}(x,y) < \delta \Longrightarrow \mathrm{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon\,.$$

**(2.2.4)** Si $f$ és uniformement contínua llavors és contínua.

**(2.2.5)** *Teorema de Heine*
Si $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ és contínua i $A \subset \mathbf{R}^m$ és compacte, $f$ és uniformement contínua.

**(2.2.6)** Siguin $A \subset \mathbf{R}^m$, $f\colon A \to \mathbf{R}^n$. $f$ és lipschitziana si existeix un nombre $L > 0$ (constant de Lipschitz) tal que

$$(\forall x, y \in A) \quad \mathrm{d}(f(x), f(y)) \le L\,\mathrm{d}(x,y)\,.$$

**(2.2.7)** $f$ lipschitziana $\Longrightarrow$ $f$ uniformement contínua.

**(2.2.8)** Un camí és una aplicació contínua $\gamma\colon I \to A$, on $I \subset \mathbf{R}$ és un interval.
Si $I = [t_0, t_1]$ i $\gamma(t_0) = a_0$, $\gamma(t_1) = a_1$, es diu que $\gamma$ uneix $a_0$ amb $a_1$.

**(2.2.9)** Un subconjunt $A \subset \mathbf{R}^m$ es diu arc-connex (o connex per arcs) si, donats dos punts qualssevol $a_0, a_1 \in A$, existeix un camí (dins $A$) que els uneix.

**(2.2.10)** Si $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ és contínua i $A$ és arc-connex, $f(A)$ és arc-connex.

**(2.2.11)** Un subconjunt $J \subset \mathbf{R}$ és arc-connex sii és un interval.

**(2.2.12)** *Teorema del valor intermedi*
Sigui $f\colon A \to \mathbf{R}$ contínua, on $A$ és arc-connex. Siguin $b_0, b_1 \in f(A)$ dos valors de $f$. Si $b_0 < b < b_1$, existeix $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

**(2.2.13)** Donats dos punts $a, b \in \mathbf{R}^n$, el <u>segment</u> que els uneix és el conjunt
$$[a, b] = \{a + t(b - a) \mid 0 \leq t \leq 1\}\,.$$

**(2.2.14)** Un subconjunt $A \subset \mathbf{R}^n$ es diu <u>convex</u> si, donats dos punts qualssevol de $A$, el segment que els uneix també és dins de $A$.

**(2.2.15)** Les boles són subconjunts convexos de $\mathbf{R}^n$.

**(2.2.16)** Tot subconjunt convex de $\mathbf{R}^n$ és arc-connex.

## 2.3 Límit d'una funció en un punt

**(2.3.1)** Siguin $A \subset \mathbf{R}^m$, i $f\colon A \to \mathbf{R}^n$. Siguin $a$ punt d'acumulació de $A$, i $b \in \mathbf{R}^n$. Es diu que $b$ és <u>límit</u> de $f(x)$ quan $x \to a$ si
$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in A - \{a\}) \quad \mathrm{d}(x, a) < \delta \Longrightarrow \mathrm{d}(f(x), b) < \varepsilon\,.$$
La darrera implicació es pot escriure $x \in \mathrm{B}(a; \delta) \Longrightarrow f(x) \in \mathrm{B}(b; \varepsilon)$. Per tant la definició també es pot expressar així:
$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0) \quad f(A \cap \mathrm{B}^*(a; \delta)) \subset \mathrm{B}(b; \varepsilon)\,.$$

**(2.3.2)** Si una funció té límit, és únic.
Llavors s'escriu $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$, i també $f(x) \to b$ quan $x \to a$, $x \in A$.

**(2.3.3)** Siguin $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ ($A \subset \mathbf{R}^m$), i $a$ punt d'acumulació de $A$. Són equivalents:
i) $\lim_{x \to a} f(x) = b$,
ii) Donada qualsevol successió $(a_k)$ d'elements de $A - \{a\}$ amb límit $a$, la successió $(f(a_k))$ convergeix cap a $b$.

**(2.3.4)** Sigui $f\colon A \to \mathbf{R}^n$. Si $a \in A$ és un punt d'acumulació, $f$ hi és contínua sii $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

**(2.3.5)** Escrivint $f = (f^1, \ldots, f^n)$, $b = (b^1, \ldots, b^n)$, es té que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ sii $\lim_{x \to a} f^j(x) = b^j$ per a cada $j = 1 \ldots n$.

**(2.3.6)** Si $f$ té límit en un punt $a$, llavors és fitada sobre alguna bola de centre $a$.

**(2.3.7)** Sigui $f\colon A \to \mathbf{R}$ (amb $A \subset \mathbf{R}^m$) tal que $\lim_{x \to a} f(x) = b > 0$. Existeix una bola perforada $\mathrm{B}^*(a; r)$ sobre la qual $f$ pren valors $> 0$.

**(2.3.8)** Siguin $f, g\colon A \to \mathbf{R}^n$, on $A \subset \mathbf{R}^m$, $\lambda \in \mathbf{R}$ i $a$ punt d'acumulació de $A$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ i $\lim_{x \to a} g(x) = c$, llavors
$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c, \qquad \lim_{x \to a} (\lambda\, f(x)) = \lambda b\,,$$
$$\lim_{x \to a} (f(x)|g(x)) = (b|c)\,.$$
En el cas $n = 1$, si $b \neq 0$ llavors $\lim_{x \to a} 1/f(x) = 1/b$.

**(2.3.9)** Siguin $f, g, h\colon A \to \mathbf{R}$, on $A \subset \mathbf{R}^m$, amb $\lim_{x \to a} f(x) = l = \lim_{x \to a} h(x)$. Si $f \leq g \leq h$ en un veïnat perforat de $a$, llavors $\lim_{x \to a} g(x) = l$.

**(2.3.10)** Siguin $A \subset \mathbf{R}^m$, $B \subset \mathbf{R}^n$, $A \xrightarrow{f} \mathbf{R}^n$, $B \xrightarrow{g} \mathbf{R}^p$ amb $f(A) \subset B$.
Suposem que $a$ és un punt d'acumulació de $A$ i que $b := \lim_{x \to a} f(x)$ és punt d'acumulació de $B$, i sigui $c := \lim_{y \to b} g(y)$.
Llavors $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$ si es compleix una de les dues hipòtesis següents:
(i) $b \notin B$ (ii) $g$ és contínua en $b$.

**(2.3.11)** Sigui $f\colon A \to \mathbf{R}^n$, on $A \subset \mathbf{R}^m$. Suposem que $A = A_1 \cup A_2$, i que $a$ és un punt d'acumulació de $A_1$ i $A_2$. Llavors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$ sii $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A_1}} f(x) = b$ i $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A_2}} f(x) = b$.

## 2.4 Casos especials de límits

**(2.4.1)** *Límits direccionals, límits segons corbes*
Siguin $f\colon A \to \mathbf{R}$, $a$ punt d'acumulació de $A \subset \mathbf{R}^m$. Es pot intentar estudiar $\lim_{x \to a} f(x)$ apropant-se a $a$ de la manera següent.
Sigui un vector $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{u} \neq 0$, tal que $a + t\mathbf{u} \in A$ per a $0 < t < T$. El <u>límit direccional</u> de $f$ en $a$ segons el vector $\mathbf{u}$ és $\lim_{t \to 0+} f(a + t\mathbf{u})$.

**(2.4.2)** Si existeix $\lim_{x \to a} f(x)$ llavors existeixen els límits direccionals, i valen el mateix.

**(2.4.3)** Tanmateix, l'existència i igualtat de tots els límits direccionals no garanteix l'existència del límit.

**(2.4.4)** Més generalment: el <u>límit segons un camí</u> $\gamma\colon ]0, T[ \ \to A - \{a\}$ tal que $\lim_{t \to 0+} \gamma(t) = a$ és $\lim_{t \to 0+} f(\gamma(t))$.

**(2.4.5)** Si existeix $\lim_{x \to a} f(x)$ llavors existeixen els límits segons corbes, i valen el mateix.

**(2.4.6)** *Límits reiterats*

Sigui $f\colon A \to \mathbf{R}$, on $A \subset \mathbf{R}^2$, tal que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$. Si existeixen $\lim_{x\to a} f(x,y)$ i $\lim_{y\to b} f(x,y)$, llavors també existeixen $\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y))$ i $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$, i valen $l$.

Però també pot passar que els dos darrers límits existeixin i siguin iguals, i tanmateix no existeixi $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

**(2.4.7)** *Límits infinits*

Sigui $f\colon A \to \mathbf{R}^n$, on $A \subset \mathbf{R}^m$. Escriurem $\lim_{x\to x_\circ} f(x) = \infty$ quan

$$(\forall L > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in A - \{x_\circ\}) \quad \mathrm{d}(x, x_\circ) < \delta \Longrightarrow \|f(x)\| > L\,.$$

En el cas de $n = 1$ podem distingir $\lim_{x\to x_\circ} f(x) = \pm\infty$.

**(2.4.8)** *Límit en l'infinit*

Sigui $f\colon A \to \mathbf{R}^n$, on $A \subset \mathbf{R}^m$ no és fitat. Escriurem $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ quan

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists M > 0)\ (\forall x \in A) \quad \|x\| > M \Longrightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon\,.$$

**(2.4.9)** Anàlogament es pot definir *límit infinit en l'infinit.*

Tots aquests casos es poden estudiar utilitzant successions com en 2.3.3.

# 3 Derivació

## 3.1 Diferenciabilitat

**(3.1.1)** Siguin $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ una funció definida en un conjunt obert $A \subset \mathbf{R}^m$, i $a \in A$ un punt. Es diu que $f$ és diferenciable (o derivable) en $a$ quan existeix una aplicació lineal $T_a\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ tal que se satisfà la condició de tangència, que es pot expressar de qualsevol de les formes equivalents següents:

i) $f(a+h) - f(a) = T_a{\cdot}h + R_a(h)$, on $R_a(h) = o(\|h\|)$ quan $h \to 0$.

ii) $f(a+h) = f(a) + T_a{\cdot}h + o(\|h\|)$ quan $h \to 0$.

iii) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T_a{\cdot}h}{\|h\|} = 0.$

iv) $f(a+h) - f(a) = T_a{\cdot}h + E_a(h)\|h\|$, on $\lim_{h\to 0} E_a(h) = 0$.

Aquestes condicions es poden escriure també amb $a + h = x$: per exemple

ii) $f(x) = f(a) + T_a{\cdot}(x-a) + o(\|x-a\|)$ quan $x \to a$.

**(3.1.2)** En cas d'existir, l'aplicació lineal $T_a$ que satisfà la condició de tangència és única.
Llavors es representa per $f'(a)$, o $\mathrm{D}f(a)$, i s'anomena diferencial (o derivada) de $f$ en $a$.

**(3.1.3)** Quan $f$ és diferenciable en $a$, l'aplicació afí

$$x \mapsto f(a) + \mathrm{D}f(a){\cdot}(x-a)$$

s'anomena aproximació lineal de $f$ en $a$.

**(3.1.4)** $f$ es diu diferenciable si ho és en tot punt del seu domini.
En aquest cas es pot definir l'aplicació derivada $f'\colon A \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$.

**(3.1.5)** Si $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ és diferenciable en $a$, llavors $f$ és contínua en $a$.

**(3.1.6)** $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ és diferenciable en $a$ sii ho són les seves funcions components $f^j$. Llavors les components $[\mathrm{D}f(a)]^j$ de $\mathrm{D}f(a)$ són les diferencials $\mathrm{D}f^j(a)$.

## 3.2 Derivades parcials i direccionals

**(3.2.1)** Siguin $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ una funció definida en un conjunt obert $A \subset \mathbf{R}^m$. Siguin $a \in A$ un punt i $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ un vector. S'anomena derivada direccional de $f$ en $a$ segons el vector $\mathbf{u}$ el límit (si existeix)

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\mathbf{u}) - f(a)}{t}\,.$$

Es representa per $f'(a;\mathbf{u})$, $\mathrm{D}_{a,\mathbf{u}}f$ o $\mathrm{D}_{\mathbf{u}}f(a)$.

**(3.2.2)** Es compleix: $f'(a;\lambda\mathbf{u}) = \lambda f'(a;\mathbf{u})$, $f'(a;0) = 0$.

**(3.2.3)** Si $f$ és diferenciable en $a$ llavors existeixen totes les derivades direccionals de $f$ en $a$, i $f'(a;\mathbf{u}) = f'(a){\cdot}\mathbf{u}$.

**(3.2.4)** Tanmateix, l'existència de totes les derivades direccionals en un punt no hi garanteix la diferenciabilitat de la funció, ni tan sols la continuïtat.

**(3.2.5)** Sigui $(\mathbf{e}_i)_{1\le i\le m}$ la base canònica de $\mathbf{R}^m$. S'anomena derivada parcial de $f$ en $a$ respecte a la variable $x^i$ la derivada direccional $f'(a;\mathbf{e}_i)$:

$$\mathrm{D}_i f(a) \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) := f'(a;\mathbf{e}_i) = \\ = \lim_{t\to 0} \frac{f(a^1,\dots,a^i+t,\dots,a^m) - f(a^1,\dots,a^m)}{t}\,.$$

**(3.2.6)** L'existència de les derivades parcials en un punt no hi garanteix l'existència de totes les derivades direccionals.

**(3.2.7)** La matriu jacobiana de $f$ en $a$ és la matriu $n \times m$ de les derivades parcials (si existeixen) de les components de $f$:

$$\mathrm{J}f(a) := \left(\frac{\partial f^j(a)}{\partial x^i}\right)_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m}(a) \end{pmatrix}$$

Si $n = m$ el seu determinant s'anomena jacobià de $f$ en $a$.

**(3.2.8)** Si $f$ és diferenciable en $a$ llavors existeix $\mathrm{J}f(a)$, i és la matriu de l'aplicació lineal $\mathrm{D}f(a)\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ en les bases canòniques respectives.

## 3.3 Condicions suficients de diferenciabilitat

**(3.3.1)** Sigui $f\colon A \to \mathbf{R}$ una funció definida en un conjunt obert $A \subset \mathbf{R}^m$. Si la derivada parcial $\mathrm{D}_i f(x)$ existeix en cada punt $x \in A$, s'obté la funció derivada parcial $\mathrm{D}_i f\colon A \to \mathbf{R}$.

**(3.3.2)** Siguin $f\colon A \to \mathbf{R}$, on $A \subset \mathbf{R}^m$ és obert, i $a \in A$. Si les derivades parcials $\mathrm{D}_i f$ existeixen en un veïnat de $a$ i són contínues en $a$, llavors $f$ és diferenciable en $a$.

**(3.3.3)** Una funció $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ es diu de classe $\mathrm{C}^1$ (o contínuament diferenciable) si les derivades parcials $D_i f^j\colon A \to \mathbf{R}$ existeixen i són funcions contínues. En tal cas $f$ és diferenciable en tot punt.

**(3.3.4)** Tanmateix, una funció diferenciable pot no ser de classe $\mathrm{C}^1$.

## 3.4 Propietats de la derivació

**(3.4.1)** Siguin $f, g\colon A \to \mathbf{R}^n$ diferenciables en $a$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
ii) $(\lambda f)'(a) = \lambda\, f'(a)$.
iii) En el cas $n = 1$, $(fg)'(a) = g(a)f'(a) + f(a)g'(a)$.
iv) En el cas $n = 1$, $(1/f)'(a) = -\dfrac{1}{f(a)^2} f'(a)$.

**(3.4.2)** Sigui $T\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ lineal. Existeix $M \geq 0$ tal que, per a tot $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$, $\|T\cdot\mathbf{u}\| \leq M\|\mathbf{u}\|$.

**(3.4.3)** Si $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ és diferenciable en $x_\circ \in A \subset \mathbf{R}^m$, llavors $\dfrac{f(x) - f(x_\circ)}{\|x - x_\circ\|}$ és fitada en un veïnat perforat de $x_\circ$.

**(3.4.4)** *Regla de la cadena*
Siguin $U \subset \mathbf{R}^m$ obert, $f\colon U \to \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^n$ obert, $g\colon V \to \mathbf{R}^p$, de forma que $f(U) \subset V$.
Suposem que $f$ és diferenciable en $x_\circ$, i que $g$ és diferenciable en $y_\circ = f(x_\circ)$. Llavors $g \circ f$ és diferenciable en $x_\circ$, i

$$\mathrm{D}(g \circ f)(x_\circ) = \mathrm{D}g(y_\circ) \circ \mathrm{D}f(x_\circ)\,.$$

**(3.4.5)** En termes de les matrius jacobianes,

$$\mathrm{J}(g \circ f)(x_\circ) = \mathrm{J}g(y_\circ)\,\mathrm{J}f(x_\circ)\,.$$

Això també s'expressa per

$$\mathrm{D}_i(g \circ f)^k(x_\circ) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j g^k(y_\circ)\,\mathrm{D}_i f^j(x_\circ)\,.$$

**(3.4.6)** Si $f$ i $g$ són de classe $\mathrm{C}^1$, $g \circ f$ també ho és.

**(3.4.7)** L'existència de totes les derivades parcials, i fins i tot les derivades direccionals, no basta per a garantir l'acompliment de la regla de la cadena.

**(3.4.8)** *Teorema del valor mitjà*
Sigui $f\colon A \to \mathbf{R}$ diferenciable en un conjunt obert $A \subset \mathbf{R}^m$. Siguin $a \in A$, $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^m$ tals que $[a, a+\mathbf{h}] \subset A$. Llavors

$$f(a+\mathbf{h}) - f(a) = \mathrm{D}f(a+\theta\mathbf{h})\cdot\mathbf{h}$$

per a certa $0 < \theta < 1$.

**(3.4.9)** L'enunciat anterior és fals per a funcions amb valors vectorials.

**(3.4.10)** Si $A \subset \mathbf{R}^m$ és un conjunt obert arc-connex i $f\colon A \to \mathbf{R}$ és diferenciable amb derivada nul·la arreu, llavors $f$ és constant.

**(3.4.11)** Si $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ és diferenciable amb derivades parcials fitades, $f$ és lipschitziana.

## 3.5 Derivades parcials d'ordre superior

**(3.5.1)** Siguin $U \subset \mathbf{R}^n$ obert, $f\colon U \to \mathbf{R}$, i suposem que existeixen les derivades parcials de $f$ en cada punt. S'obtenen les $n$ funcions $\mathrm{D}_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}\colon U \to \mathbf{R}$. Suposant que $f$ sigui de classe $\mathrm{C}^1$, ens podem demanar per l'existència de les derivades parcials segones $\mathrm{D}_j(\mathrm{D}_i f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^j}$. Si existeixen i són contínues (en $U$) es diu que $f$ és de classe $\mathrm{C}^2$.

**(3.5.2)** Anàlogament es defineixen les derivades parcials d'ordre $r$, $\mathrm{D}_{i_r} \ldots \mathrm{D}_{i_1} f = \dfrac{\partial^r f}{\partial x^{i_1}\,\partial x^{i_2}\,\ldots\,\partial x^{i_r}}$.

**(3.5.3)** $f$ es diu de classe $\mathrm{C}^r$ (on $r \in \mathbf{N}$) si existeixen totes les derivades parcials d'ordre $\leq r$ i són contínues.
$f$ es diu de classe $\mathrm{C}^\infty$ si és de classe $\mathrm{C}^r$ per a tota $r$.

**(3.5.4)** Anàlogament es defineix per a funcions amb valors vectorials.

**(3.5.5)** *Teorema de Schwarz*
Siguin $U \subset \mathbf{R}^n$ obert, $f\colon U \to \mathbf{R}$, i $p \in U$. Suposem que $f$ és de classe $\mathrm{C}^1$, i que les derivades parcials $\mathrm{D}_i f, \mathrm{D}_j f\colon U \to \mathbf{R}$ són diferenciables en $p$. Llavors les derivades parcials creuades són iguals:

$$\mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(p) = \mathrm{D}_j \mathrm{D}_i f(p)\,.$$

**(3.5.6)** Si $f$ és de classe $\mathrm{C}^2$ llavors les derivades parcials creuades són iguals.

**(3.5.7)** Si $f$ és de classe $\mathrm{C}^r$ llavors les derivades parcials d'ordre $r$ es poden calcular derivant en qualsevol ordre: $\mathrm{D}_{i_r} \dots \mathrm{D}_{i_1} f = \mathrm{D}_{i_{\pi(r)}} \dots \mathrm{D}_{i_{\pi(1)}} f$ per a qualsevol permutació $\pi$ de $\{1, \dots, r\}$.

**(3.5.8)** Hi ha funcions de classe $\mathrm{C}^1$ tals que $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f$, $\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f$ existeixen però són diferents.

**(3.5.9)** Si $f$ i $g$ són de classe $\mathrm{C}^r$, $g \circ f$ també ho és.

## 3.6 Teorema de la funció inversa. Canvis de coordenades

**(3.6.1)** *Teorema de la funció inversa*

Siguin $A \subset \mathbf{R}^n$ un conjunt obert, $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ una funció de classe $\mathrm{C}^1$. Sigui $a \in A$ un punt on $f$ té jacobià no nul: $\det \mathrm{D}f(a) \neq 0$.

Llavors existeixen un conjunt obert $V \ni a$ i un conjunt obert $W \ni f(a)$ tals que

- $f(V) = W$
- l'aplicació $f\colon V \to W$ és bijectiva
- la inversa $f^{-1}\colon W \to V$ és $\mathrm{C}^1$

A més, per a tot $y \in W$,

$$\mathrm{D}f^{-1}(y) = \big(\mathrm{D}f(f^{-1}(y))\big)^{-1}.$$

Si $f$ és de classe $\mathrm{C}^r$, $f^{-1}$ també ho és.

**(3.6.2)** La condició de tenir jacobià no nul no és necessària per a l'existència de la funció inversa, però sí perquè aquesta sigui diferenciable.

**(3.6.3)** El teorema només garanteix l'existència *local* de la funció inversa. Hi ha funcions $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, de classe $\mathrm{C}^\infty$ i amb jacobià enlloc nul, però que no són injectives.

**(3.6.4)** Un difeomorfisme de classe $\mathrm{C}^r$ $(r \geq 1)$ és una aplicació bijectiva $\varphi\colon U \to V$ entre dos conjunts oberts de $\mathbf{R}^n$ tal que $\varphi$ i $\varphi^{-1}$ són de classe $\mathrm{C}^r$.

El teorema de la funció inversa afirma que si $f$ és $\mathrm{C}^r$ $(r \geq 1)$ amb jacobià no nul llavors $f$ és localment un difeomorfisme de classe $\mathrm{C}^r$.

A la pràctica el concepte de difeomorfisme pot tenir dues interpretacions, el d'una transformació diferenciable (que envia punts a d'altres punts) o el d'un canvi de coordenades, que etiqueta cada punt amb diferents sistemes de coordenades.

**(3.6.5)** Coordenades polars: $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$

$$\begin{aligned} ]0,+\infty[ \times ]{-\pi},\pi[ &\longrightarrow \mathbf{R}^2 - \{(x,0) \mid x \leq 0\} \\ (r,\phi) &\mapsto (x,y). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}, \text{ jacobià } r.$$

**(3.6.6)** Coordenades cilíndriques: $\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$

$$\begin{aligned} ]0,+\infty[ \times ]{-\pi},\pi[ \times \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^3 - \{(x,y,z) \mid x \leq 0, y = 0, z \in \mathbf{R}\} \\ (\rho,\phi,z) &\mapsto (x,y,z) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,z)} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ jacobià } \rho.$$

**(3.6.7)** Coordenades esfèriques: $\begin{cases} x = r\cos\phi\sin\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

$$\begin{aligned} ]0,+\infty[ \times ]0,\pi[ \times ]{-\pi},\pi[ &\longrightarrow \mathbf{R}^3 - \{(x,y,z) \mid x \leq 0, y = 0, z \in \mathbf{R}\} \\ (r,\theta,\phi) &\mapsto (x,y,z) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \text{ jacobià } r^2\sin\theta.$$

## 3.7 Teorema de la funció implícita

**(3.7.1)** *Teorema de la funció implícita*

Siguin $W \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ un conjunt obert, $F\colon W \to \mathbf{R}^n$ una aplicació de classe $\mathrm{C}^1$, $(a,b) \in W$ un punt tal que $F(a,b) = 0$. Suposem que la diferencial de $F(x,y)$ respecte a les variables $y \in \mathbf{R}^n$, $\mathrm{D}_2 F(x,y)$, és invertible en el punt $(a,b)$: $\det \left( \dfrac{\partial F^k}{\partial y^j}(a,b) \right)_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \neq 0$.

Llavors existeixen conjunts oberts $A \subset \mathbf{R}^m$, $a \in A$, i $B \subset \mathbf{R}^n$, $b \in B$, amb $A \times B \subset W$, i una única aplicació $f\colon A \to B$ de classe $\mathrm{C}^1$ tals que

$$\text{si } (x,y) \in A \times B, \quad F(x,y) = 0 \iff y = f(x).$$

A més, per a tot $x \in A$,

$$\mathrm{D}f(x) = -\big(\mathrm{D}_2 F(x, f(x))\big)^{-1} \circ \mathrm{D}_1 F(x, f(x))\,.$$

Si $F$ és de classe $\mathrm{C}^r$, $f$ també ho és.

**(3.7.2)** Es diu que la funció $y = f(x)$ és la <u>funció definida implícitament</u> per l'equació $F(x, y) = 0$.

L'existència de $f$ és només *local* (al voltant d'un punt).

**(3.7.3)** La derivada de $f$ es calcula aplicant la regla de la cadena a l'equació $F(x, f(x)) = 0$, i és la solució del sistema lineal

$$\left.\frac{\partial F^k}{\partial x^i}\right|_{(x,f(x))} + \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial F^k}{\partial y^j}\right|_{(x,f(x))} \left.\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right|_{x} = 0\,.$$

# 4 Aplicacions geomètriques de la derivació

## 4.1 Vectors tangents

**(4.1.1)** Un vector tangent és un parell $(p, \mathbf{v})$, on $p \in \mathbf{R}^n$ és un punt i $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ és un vector. S'escriu també $\mathbf{v}_p$.
Es representa gràficament amb una fletxa d'origen $p$ i extrem $p + \mathbf{v}$.

**(4.1.2)** El conjunt de vectors tangents en el punt $p$, $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$, és un espai vectorial igual que $\mathbf{R}^n$. Es pot sumar vectors tangents en $p$ $[\mathbf{u}_p + \mathbf{v}_p = (\mathbf{u} + \mathbf{v})_p]$, fer-ne el producte escalar, etc.

**(4.1.3)** Sigui $U \subset \mathbf{R}^n$ un conjunt obert. Un camp vectorial en $U$ és assignar a cada punt $p \in U$ un vector tangent en $p$. Per tant, és una aplicació de la forma $U \to U \times \mathbf{R}^n$, $p \mapsto (p, \mathbf{f}(p))$. El camp vectorial queda definit per l'aplicació $\mathbf{f}\colon U \to \mathbf{R}^n$, i per això es diu simplement que $\mathbf{f}$ és el camp vectorial.

**(4.1.4)** Recordem que un camí (o *corba parametritzada*) és una aplicació contínua $c\colon I \to \mathbf{R}^n$, on $I \subset \mathbf{R}$ és un interval. Si $c$ és diferenciable en $t_\circ \in I$, la derivada
$$c'(t_\circ) = \lim_{h \to 0} \frac{c(t_\circ + h) - c(t_\circ)}{h} \in \mathbf{R}^n$$
s'interpreta com un vector tangent en el punt $c(t_\circ)$. S'anomena vector tangent o velocitat de $c$ en $t_\circ$.

El vector $c'(t_\circ)$ s'identifica amb la matriu jacobiana de $c$, i per tant és el vector columna $c'(t_\circ) = (\mathrm{D}c^i(t_\circ))$, si $c(t) = (c^1(t), \ldots, c^n(t))$.

**(4.1.5)** Sigui $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ una aplicació diferenciable. Si el vector tangent a $t = 0$ d'un camí $c\colon I \to \mathbf{R}^m$ és $\mathbf{u}_p$, el vector tangent del camí $f \circ c\colon I \to \mathbf{R}^n$ és $\mathbf{v}_q$, on $q = f(p)$ i $\mathbf{v} = \mathrm{D}f(p) \cdot \mathbf{u}$.

## 4.2 Gradient d'una funció escalar

**(4.2.1)** Siguin $V \subset \mathbf{R}^n$ un conjunt obert, $f\colon V \to \mathbf{R}$ una funció diferenciable, $p \in V$. S'anomena gradient de $f$ en $p$ el vector $\operatorname{grad} f(p) \equiv \nabla f(p) \in \mathbf{R}^n$ tal que, per a tot $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$,
$$(\operatorname{grad} f(p) | \mathbf{u}) = \mathrm{D}f(p) \cdot \mathbf{u}\,.$$

**(4.2.2)** Es pot considerar $\operatorname{grad} f(p)$ com un vector tangent en $p$. Prenent tots els punts $p \in V$, s'obté un camp vectorial en $V$, anomenat gradient de $f$, $\operatorname{grad} f \equiv \nabla f$.

**(4.2.3)** Usant coordenades cartesianes $(x^j)$ i la base canònica $(\mathbf{e}_j)$ de $\mathbf{R}^n$, el gradient s'expressa
$$\operatorname{grad} f = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f \; \mathbf{e}_j\,.$$

**(4.2.4)** Algunes propietats del gradient:
$$\operatorname{grad}(f + g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$$
$$\operatorname{grad}(\lambda f) = \lambda \operatorname{grad} f$$
$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$$
si $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és diferenciable, $\operatorname{grad}(h \circ f) = (h' \circ f) \operatorname{grad} f$

**(4.2.5)** *Interpretació geomètrica del gradient*
Siguin $V \subset \mathbf{R}^n$ un conjunt obert, $f\colon V \to \mathbf{R}$ una funció diferenciable, $p \in V$. Per a cada vector *unitari* $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$, la derivada direccional $f'(p; \mathbf{u})$ val
$$f'(p; \mathbf{u}) = \| \operatorname{grad} f(p) \| \cos\Big(\text{angle}\,\big(\operatorname{grad} f(p), \mathbf{u}_p\big)\Big)$$
i per tant el seu valor màxim és $\| \operatorname{grad} f(p) \|$, i s'assoleix en la direcció donada pel vector gradient.

## 4.3 Superfícies

**(4.3.1)** Una superfície regular de $\mathbf{R}^3$ és un subconjunt $S \subset \mathbf{R}^3$ que satisfà la propietat següent: per a tot $p \in S$, existeixen un conjunt obert $U \ni p$ dins $\mathbf{R}^3$, i un difeomorfisme $\varphi\colon U \to V$, tals que
$$\varphi(U \cap S) = V \cap (\mathbf{R}^2 \times \{0\}) =: T\,.$$
En termes informals: al voltant de cada punt, la superfície, amb un canvi de coordenades apropiat, es transforma en un tros de pla.

**(4.3.2)** En les noves coordenades $y = (y^1, y^2, y^3)$ la superfície es descriu localment
• implícitament: $y^3 = 0$
• paramètricament: $\left[\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (y^1, y^2) & \mapsto & (y^1, y^2, 0) \end{array}\right]$
Per tant en les velles coordenades $x = (x^1, x^2, x^3)$ la superfície es descriu localment

• implícitament: $\varphi^3(x) = 0$

• paramètricament: $\begin{bmatrix} T & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (y^1, y^2) & \mapsto & \varphi^{-1}(y^1, y^2, 0) \end{bmatrix}$

**(4.3.3)** Es diu que la superfície és de classe $\mathrm{C}^k$ quan, en la definició, tots els difeomorfismes $\varphi$ es poden prendre de classe $\mathrm{C}^k$.

**(4.3.4)** *Descripció explícita*

Siguin $V \subset \mathbf{R}^2$ un conjunt obert, i $f\colon V \to \mathbf{R}$ una funció de classe $\mathrm{C}^k$ ($k \geq 1$). El graf de $f$,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in V, z = f(x, y)\},$$

és una superfície regular en $\mathbf{R}^3$, de classe $\mathrm{C}^k$.

**(4.3.5)** *Descripció implícita*

Siguin $W \subset \mathbf{R}^3$ un conjunt obert, i $F\colon W \to \mathbf{R}$ una funció de classe $\mathrm{C}^k$ ($k \geq 1$). Sigui

$$S = \{x \in W \mid F(x) = 0\} = F^{-1}(0),$$

i suposem que $S \neq \emptyset$. Si en tot punt $x \in S$ es té $\mathrm{D}F(x) \neq 0$ (és a dir, que el rang de $\mathrm{D}F(x)$ és màxim, 1), llavors $S$ és una superfície regular de classe $\mathrm{C}^k$.

**(4.3.6)** *Descripció paramètrica*

Sigui $g\colon U \to \mathbf{R}^3$ una aplicació de classe $\mathrm{C}^k$ ($k \geq 1$) en un conjunt obert $U \subset \mathbf{R}^2$ (es diu que $g$ és una superfície parametritzada). Sigui $u_\circ \in U$ tal que $\operatorname{rang} \mathrm{D}g(u_\circ) = 2$ (rang màxim; es diu que la parametrització és regular en $u_\circ$). Llavors existeix un conjunt obert $U' \subset U$ contenint $u_\circ$ tal que

$$g(U') = \{g(u^1, u^2) \mid (u^1, u^2) \in U'\} \subset \mathbf{R}^3$$

és una superfície regular de classe $\mathrm{C}^k$.

**(4.3.7)** Convé notar que, encara que $g$ sigui $\mathrm{C}^\infty$, injectiva i amb rang màxim en tot punt, pot ser que la imatge *sencera* $g(U)$ no sigui una superfície regular.

**(4.3.8)** Una superfície descrita explícitament com el graf d'una funció, $S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in V, z = f(x, y)\}$, també es pot descriure:

• implícitament, amb l'equació $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$

• paramètricament, amb la parametrització $g(x, y) = (x, y, f(x, y))$

## 4.4 Vectors tangents a una superfície

**(4.4.1)** Siguin $S \subset \mathbf{R}^3$ una superfície regular, $p \in S$. S'anomenen vectors tangents a $S$ en $p$ els vectors tangents $(p, \mathbf{u})$ dels camins continguts en $S$ i que passen per $p$.

L'espai tangent a $S$ en $p$ és el conjunt dels vectors tangents a $S$ en $p$:

$$\mathrm{T}_p(S) = \{(p, \mathbf{u}) \mid \text{existeix } \gamma\colon I \to S \subset \mathbf{R}^3 \text{ tal que } \gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = \mathbf{u}\}.$$

**(4.4.2)** L'espai tangent a $S$ en $p$ és un espai vectorial de dimensió 2.

**(4.4.3)** El conjunt de punts de la forma

$$\{x = p + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \text{ és tangent a } S \text{ en } p\}$$

és per tant un pla dins $\mathbf{R}^3$, anomenat pla tangent a $S$ en $p$.

**(4.4.4)** *Superfície descrita implícitament*

Siguin $S \subset \mathbf{R}^3$ una superfície regular, $p \in S$. Suposem que $S = F^{-1}(0)$ on $F\colon W \to \mathbf{R}$ és $\mathrm{C}^1$ en un conjunt obert $W \subset \mathbf{R}^3$ i $\operatorname{rang} \mathrm{D}F(p) = 1$. Llavors

$$\mathrm{T}_p(S) = \{(p, \mathbf{u}) \mid \mathrm{D}F(p) \cdot \mathbf{u} = 0\}.$$

**(4.4.5)** Amb les hipòtesis anteriors, l'equació del pla tangent a $S$ en $p$ és

$$\mathrm{D}F(p) \cdot (x - p) = 0.$$

També es pot escriure $\mathrm{D}_1F(p)(x^1 - p^1) + \mathrm{D}_2F(p)(x^2 - p^2) + \mathrm{D}_3F(p)(x^3 - p^3) = 0$, i $(\operatorname{grad} F(p) \mid x - p) = 0$.

La *recta normal* a $S$ en $p$ s'escriu doncs

$$p + \lambda \operatorname{grad} F(p) \quad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

**(4.4.6)** *Superfície descrita explícitament*

Suposem que $S$ és el graf de $f\colon V \to \mathbf{R}$ ($V \subset \mathbf{R}^2$ obert), i sigui $(x_\circ, y_\circ, z_\circ) \in S$: $(x_\circ, y_\circ) \in V$, $z_\circ = f(x_\circ, y_\circ)$. L'equació del pla tangent a $S$ en $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ és

$$z = z_\circ + \mathrm{D}_1f(x_\circ, y_\circ)(x - x_\circ) + \mathrm{D}_2f(x_\circ, y_\circ)(y - y_\circ),$$

o sigui, és el graf de l'aproximació lineal de $f$ en $(x_\circ, y_\circ)$.

La recta normal s'escriu $\begin{pmatrix} x_\circ \\ y_\circ \\ z_\circ \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \partial f/\partial x(x_\circ, y_\circ) \\ \partial f/\partial y(x_\circ, y_\circ) \\ -1 \end{pmatrix}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$).

**(4.4.7)** *Superfície descrita paramètricament*

Sigui $g\colon U \to \mathbf{R}^3$ ($U \subset \mathbf{R}^2$ obert) una parametrització injectiva de classe $\mathrm{C}^1$ d'una superfície regular $S = g(U)$. Sigui $u_\circ = (u_\circ^1, u_\circ^2) \in U$. Les columnes

$\mathbf{T}_1(u_\circ)$, $\mathbf{T}_2(u_\circ)$ de la matriu jacobiana $\mathrm{J}g(u_\circ)$,

$$\mathbf{T}_1(u_\circ) = \mathrm{D}_1 g(u_\circ) = \begin{pmatrix} \partial g^1/\partial u^1 \\ \partial g^2/\partial u^1 \\ \partial g^3/\partial u^1 \end{pmatrix}_{u=u_\circ}, \quad \mathbf{T}_2(u_\circ) = \mathrm{D}_2 g(u_\circ) = \begin{pmatrix} \partial g^1/\partial u^2 \\ \partial g^2/\partial u^2 \\ \partial g^3/\partial u^2 \end{pmatrix}_{u=u_\circ},$$

són vectors tangents a $S$ en $p = g(u_\circ)$, i si la parametrització és regular són una base de l'espai tangent $\mathrm{T}_p(S)$.

**(4.4.8)** Amb les hipòtesis anteriors, l'equació del pla tangent a $S$ en $p$ és

$$p + \lambda^1\, \mathbf{T}_1(u_\circ) + \lambda^2\, \mathbf{T}_2(u_\circ) \quad (\lambda^1, \lambda^2 \in \mathbf{R}),$$

i l'equació de la recta normal és

$$(\mathbf{T}_1(u_\circ) \mid x - p) = 0, \quad (\mathbf{T}_2(u_\circ) \mid x - p) = 0\,.$$

**(4.4.9)** A vegades s'anomena producte vectorial fonamental de la parametrització el vector $\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2$, que és $\neq 0$ sii la parametrització és regular. En aquest cas el pla tangent es pot escriure $(\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2 | x - p) = 0$, i la recta normal $p + \lambda\, \mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2$ $(\lambda \in \mathbf{R})$.

## 4.5 Corbes

**(4.5.1)** Una corba regular en $\mathbf{R}^3$ és un subconjunt $C \subset \mathbf{R}^3$ que satisfà la propietat següent: per a tot $p \in C$, existeixen un conjunt obert $U \ni p$ dins $\mathbf{R}^3$ i un difeomorfisme $\varphi \colon U \to V$ tals que

$$\varphi(U \cap C) = V \cap (\mathbf{R} \times \{0\} \times \{0\}) =: T\,.$$

En termes informals: al voltant de cada punt la corba, amb un canvi de coordenades apropiat, es transforma en un tros de recta.

**(4.5.2)** En les noves coordenades $y = (y^1, y^2, y^3)$ la corba es descriu localment
- implícitament: $y^2 = y^3 = 0$
- paramètricament: $\left[\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ y^1 & \mapsto & (y^1, 0, 0) \end{array}\right]$

Per tant en les velles coordenades $x = (x^1, x^2, x^3)$ la corba es descriu localment
- implícitament: $\varphi^2(x) = \varphi^3(x) = 0$
- paramètricament: $\left[\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ y^1 & \mapsto & \varphi^{-1}(y^1, 0, 0) \end{array}\right]$

**(4.5.3)** Es diu que la corba és de classe $\mathrm{C}^k$ quan, en la definició, tots els difeomorfismes $\varphi$ es poden prendre de classe $\mathrm{C}^k$.

**(4.5.4)** *Descripció explícita*
Siguin $U \subset \mathbf{R}$ un conjunt obert, i $f, g \colon U \to \mathbf{R}$ dues funcions de classe $\mathrm{C}^k$ $(k \geq 1)$. Llavors el graf de $(f, g)$,

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \in U, y = f(x), z = g(x)\}\,,$$

és una corba regular en $\mathbf{R}^3$, de classe $\mathrm{C}^k$.

**(4.5.5)** *Descripció implícita*
Siguin $W \subset \mathbf{R}^3$ un conjunt obert, i $F, G \colon W \to \mathbf{R}$ dues funcions de classe $\mathrm{C}^1$. Sigui

$$C = \{x \in W \mid F(x) = G(x) = 0\} = F^{-1}(0) \cap G^{-1}(0)\,,$$

i suposem que $C \neq \emptyset$. Si en tot $x \in C$ $\operatorname{rang} \mathrm{D}(F, G)(x) = \operatorname{rang} \binom{JF(x)}{JG(x)} = 2$ (condició de rang màxim), llavors $C$ és una corba regular.

**(4.5.6)** *Descripció paramètrica*
Sigui $\gamma \colon U \to \mathbf{R}^3$ una aplicació de classe $\mathrm{C}^k$ $(k \geq 1)$ en un conjunt obert $U \subset \mathbf{R}$ (es diu que $\gamma$ és una corba parametritzada). Sigui $t_\circ \in U$ tal que $\mathrm{D}\gamma(t_\circ) \neq 0$ (és a dir, $\operatorname{rang} \mathrm{D}\gamma(t_\circ) = 1$, màxim; es diu que la parametrització és regular en $t_\circ$). Llavors existeix un conjunt obert $J \subset U$ contenint $t_\circ$ tal que

$$\gamma(J) = \{\gamma(t) \mid t \in J\} \subset \mathbf{R}^3$$

és una corba regular de classe $\mathrm{C}^k$.

**(4.5.7)** Cal tenir present que encara que $\gamma$ sigui $\mathrm{C}^\infty$, injectiva i amb derivada no nul·la en tot punt, pot ser que la imatge sencera $\gamma(U)$ no sigui una corba regular.

**(4.5.8)** Una corba descrita explícitament com al graf d'una funció $U \to \mathbf{R}^2$, $C = \{(x, y, z) \mid x \in U, y = f(x), z = g(x)\}$, també es pot descriure:
- implícitament, amb $F(x, y, z) = y - f(x) = 0$, $G(x, y, z) = z - g(x) = 0$
- paramètricament, amb la parametrització $\gamma(x) = (x, f(x), g(x))$

**(4.5.9)** Es pot definir de forma anàloga i més senzilla el concepte de corba regular en $\mathbf{R}^2$, i enunciar resultats similars.

## 4.6 Vectors tangents a una corba

**(4.6.1)** Si $C \subset \mathbf{R}^3$ és una corba regular, es defineix el concepte de vector tangent a $C$ en un punt $p \in C$ igual que amb les superfícies. Anàlogament es defineix l'espai tangent $\mathrm{T}_p(C)$, i es demostra que té dimensió 1.

Així, els punts de la forma $x = p + \mathbf{u}$, on $\mathbf{u}$ és tangent a $C$ en $p$, formen la recta tangent a $C$ en $p$.

**(4.6.2)** *Corba descrita paramètricament*

Sigui $\gamma\colon U \to \mathbf{R}^3$ ($U \subset \mathbf{R}$ obert) una parametrització injectiva de classe $\mathrm{C}^1$ d'una corba regular $C = \gamma(U)$.

Sigui $p = \gamma(t_\circ)$, i suposem que a $t = t_\circ$ la parametrització és regular: amb vector tangent $\mathbf{T}(t_\circ) = \gamma'(t_\circ) \neq 0$. Llavors aquest vector és una base de l'espai tangent $\mathrm{T}_p(C)$.

**(4.6.3)** Amb les hipòtesis anteriors, la recta tangent a $C$ en $p$ està definida per l'equació

$$p + \lambda\,\mathbf{T}(t_\circ) \quad (\lambda \in \mathbf{R})\,.$$

El seu pla normal ve donat per l'equació

$$(\mathbf{T}(t_\circ) \mid x - p) = 0\,.$$

**(4.6.4)** *Corba descrita implícitament en l'espai*

Siguin $C \subset \mathbf{R}^3$ una corba regular, $p \in C$. Suposem que $C = F^{-1}(0) \cap G^{-1}(0)$ on $F, G\colon W \to \mathbf{R}$ són $\mathrm{C}^1$ en un conjunt obert $W \subset \mathbf{R}^3$ i $\operatorname{rang} \mathrm{D}(F,G)(p) = 2$. Llavors

$$\mathrm{T}_p(C) = \{(p, \mathbf{u}) \mid \mathrm{D}F(p)\cdot\mathbf{u} = 0 = \mathrm{D}G(p)\cdot\mathbf{u}\}\,.$$

**(4.6.5)** Amb les hipòtesis anteriors, la recta tangent a $C$ en $p$ és descrita per l'equació

$$\mathrm{D}F(p)\cdot(x - p) = 0, \quad \mathrm{D}G(p)\cdot(x - p) = 0\,,$$

i també per $(\operatorname{grad} F(p) \mid x - p) = 0$, $(\operatorname{grad} G(p) \mid x - p) = 0$.

El pla normal a $C$ en $p$ s'expressa

$$p + \lambda \operatorname{grad} F(p) + \mu \operatorname{grad} G(p) \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R})\,.$$

El vector $\operatorname{grad} F(p) \times \operatorname{grad} G(p)$ és tangent a $C$ en $p$, i per tant pot usar-se tant per a parametritzar-ne la recta tangent com per a descriure'n el pla normal.

**(4.6.6)** En el cas d'una corba en el pla les expressions són molt semblants, només cal tenir en compte que la recta tangent té una recta normal (en lloc d'un pla normal), i que la descripció implícita ve donada per una equació (en lloc de dues).

## 4.7 Varietats $m$-dimensionals

En moltes aplicacions del càlcul diferencial és necessari considerar objectes anàlegs a les corbes o superfícies però de dimensió superior. En aquesta secció en donem la definició formal i una breu descripció de com es poden definir.

**(4.7.1)** Una varietat $m$-dimensional dins $\mathbf{R}^n$ (també dita subvarietat regular $m$-dimensional de $\mathbf{R}^n$) és un subconjunt $M \subset \mathbf{R}^n$ que satisfà la propietat següent: per a tot $p \in M$, existeixen un conjunt obert $U \ni p$ dins $\mathbf{R}^n$ i un difeomorfisme $\varphi\colon U \to V$ tals que

$$\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^m \times \{(0, \dots, 0)\}) = T\,.$$

És a dir: al voltant de cada punt, amb un canvi de coordenades apropiat, una varietat $m$-dimensional és com un conjunt obert de $\mathbf{R}^m$.

**(4.7.2)** En les noves coordenades $y = (y^1, \dots, y^n)$ la varietat es descriu localment

- implícitament: $y^{m+1} = \ldots = y^n = 0$
- paramètricament: $\left[\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ (y^1, \dots, y^m) & \mapsto & (y^1, \dots, y^m, 0, \dots, 0) \end{array}\right]$

Per tant en les velles coordenades $x = (x^1, \dots, x^n)$ la varietat es descriu localment

- implícitament: $\varphi^{m+1}(x) = \ldots = \varphi^n(x) = 0$
- paramètricament: $\left[\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ (y^1, \dots, y^m) & \mapsto & \varphi^{-1}(y^1, \dots, y^m, 0, \dots, 0) \end{array}\right]$

**(4.7.3)** Es diu que la varietat és de classe $\mathrm{C}^k$ quan, en la definició, tots els difeomorfismes $\varphi$ es poden prendre de classe $\mathrm{C}^k$.

**(4.7.4)** Si $p \in M$, s'anomenen vectors tangents a $M$ en $p$ els vectors tangents $(p, \mathbf{u})$ dels camins continguts en $M$ i que passen per $p$.

L'espai tangent a $M$ en $p$ és el conjunt d'aquest vectors tangents:

$$\mathrm{T}_p(M) = \{(p, \mathbf{u}) \mid \text{existeix } \gamma\colon I \to M \subset \mathbf{R}^n \text{ tal que } \gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = \mathbf{u}\}\,.$$

**(4.7.5)** $\mathrm{T}_p(M)$ és un espai vectorial de dimensió $m$.

**(4.7.6)** Per tant el conjunt de punts de la forma

$$\{x = p + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \text{ tangent a } M \text{ en } p\}$$

és una varietat afí de dimensió $m$ dins $\mathbf{R}^n$.

**(4.7.7)** La construcció de varietats $m$-dimensionals mitjançant parametritzacions o sistemes d'equacions es fa com amb les corbes i superfícies, i la condició de rang màxim és la que permet assegurar que són regulars. L'espai tangent en un punt es pot calcular de manera semblant.

# 5 Estudi local de funcions

## 5.1 Fórmula de Taylor

**(5.1.1)** Siguin $U \subset \mathbf{R}^n$ un conjunt obert, $f\colon U \to \mathbf{R}$ una funció de classe $\mathrm{C}^k$, $p \in U$, i $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$. Per a $\ell \le k$ es poden definir les derivades direccionals d'ordre $\ell$ de $f$ en $p$ segons el vector $\mathbf{v}$:

$$f^{(\ell)}(p;\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}t^\ell} f(p+t\mathbf{v})\big|_{t=0}\,.$$

**(5.1.2)** $f'(p;\mathbf{v}) = \mathrm{D}f(p)\cdot\mathbf{v} = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, v^i,$

$$f''(p;\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x^i\,\partial x^j}\, v^i v^j,$$

$$f^{(k)}(p;\mathbf{v}) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f(p)}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_k}}\, v^{i_1}\ldots v^{i_k}.$$

**(5.1.3)** Amb les mateixes hipòtesis, s'anomena polinomi de Taylor de $f$ en $p$ de grau $\le k$ el polinomi (en $\mathbf{v}$)

$$P_k(f,p,\mathbf{v}) = f(p) + f'(p;\mathbf{v}) + \frac{1}{2}f''(p;\mathbf{v}) + \ldots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(p;\mathbf{v})\,.$$

**(5.1.4)** *Teorema de Taylor*

Siguin $U \subset \mathbf{R}^n$ un conjunt obert, $f\colon U \to \mathbf{R}$ una funció, $p \in U$ un punt, i $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ un vector tal que $p + t\mathbf{v} \in U$ per a $0 \le t \le 1$.

Si $f$ és de classe $\mathrm{C}^k$ llavors

$$f(p+\mathbf{v}) = P_k(f,p,\mathbf{v}) + R_k(f,p,\mathbf{v}) \quad \text{(fórmula de Taylor)},$$

on el terme complementari o residu de Taylor $R_k(f,p,\mathbf{v})$ satisfà que

$$R_k(f,p,\mathbf{v}) = o(\|\mathbf{v}\|^k)\,.$$

$P_k(f,p,\mathbf{v})$ és l'únic polinomi de grau $\le k$ tal que $f(p+\mathbf{v}) - P(\mathbf{v}) = o(\|\mathbf{v}\|^k)$.

Si a més $f$ és de classe $\mathrm{C}^{k+1}$,

$$R_k(f,p,\mathbf{v}) = \frac{f^{(k+1)}(\tilde{p};\mathbf{v})}{(k+1)!}$$

per a cert punt $\tilde{p} \in [p, p+\mathbf{v}]$, i doncs

$$R_k(f,p,\mathbf{v}) = O(\|\mathbf{v}\|^{k+1})\,.$$

**(5.1.5)** Quan $f$ és de classe $\mathrm{C}^{k+1}$ es pot donar una expressió integral del residu:

$$R_k(f,p,\mathbf{v}) = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}\, f^{(k+1)}(p+t\mathbf{v};\mathbf{v})\,\mathrm{d}t\,.$$

**(5.1.6)** El càlcul del polinomi de Taylor es pot simplificar en alguns casos. Per exemple, el polinomi de Taylor d'una suma [producte] de funcions es pot calcular amb la suma [producte truncat] dels respectius polinomis de Taylor.

El cas d'una composició de funcions és una mica més delicat. Suposem que $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ i $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ són de classe $\mathrm{C}^k$, amb $f(0) = 0$. Si $f(x) = P_k(x) + o(\|x\|^k)$ i $g(y) = Q_k(y) + o(\|y\|^k)$, aleshores $g(f(x)) = Q_k(P_k(x)) + o(\|x\|^k)$, de forma que $Q_k(P_k(x))$, truncat a grau $k$, és el polinomi de Taylor de la composició.

## 5.2 Extrems locals de funcions

En tota aquesta secció $U \subset \mathbf{R}^n$ és un conjunt obert, $f\colon U \to \mathbf{R}$ una funció, i $x_\circ \in U$ un punt del seu domini.

**(5.2.1)** Recordem que es diu que $f$ té un *mínim* (absolut) en $x_\circ$ quan $f(x_\circ) \le f(x)$ per a tot $x$ del domini de $f$. Anàlogament, $f$ té un *màxim* (absolut) quan $f(x_\circ) \ge f(x)$ per a tot $x$. Un *extrem* de $f$ és un mínim o un màxim.

**(5.2.2)** Es diu que $f$ té un mínim local (o relatiu) en $x_\circ$ si

hi ha un veïnat $V_\circ$ de $x_\circ$ tal que, $\forall x \in V_\circ$, $f(x_\circ) \le f(x)$.

Es parla de mínim local estricte quan $f(x_\circ) < f(x)$ per a $x \ne x_\circ$.

Anàlogament es defineix màxim local:

hi ha un veïnat $V_\circ$ de $x_\circ$ tal que, $\forall x \in V_\circ$, $f(x_\circ) \ge f(x)$,

i de màxim local estricte.

Un extrem local és un mínim o màxim local.

**(5.2.3)** Suposem que $f$ és diferenciable en $x_\circ$. Es diu que $x_\circ$ és un punt crític (o estacionari) de $f$ si

$$\mathrm{D}f(x_\circ) = 0\,.$$

**(5.2.4)** Si $f\colon U \to \mathbf{R}$ és diferenciable en $x_\circ$ i hi té un extrem local, llavors $x_\circ$ és un punt crític de $f$.

**(5.2.5)** Un punt crític $x_\circ$ que no és extrem local s'anomena coll (o punt de sella). Llavors, en tot veïnat de $x_\circ$ hi ha punts on $f$ pren valors estrictament més grans i punts on pren valors estrictament més petits que en $x_\circ$.

**(5.2.6)** Suposem que $f\colon U \to \mathbf{R}$ és de classe $\mathrm{C}^2$.
La matriu hessiana de $f$ en $x_\circ$ és la matriu simètrica $n \times n$

$$\mathrm{H}f(x_\circ) = \left( \frac{\partial^2 f(x_\circ)}{\partial x^i\, \partial x^j} \right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1\, \partial x^1}(x_\circ) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1\, \partial x^n}(x_\circ) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n\, \partial x^1}(x_\circ) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n\, \partial x^n}(x_\circ) \end{pmatrix}$$

Fixat el punt, la hessiana defineix una forma quadràtica:

$$H(\mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^j}(x_\circ)\, u^i u^j = f''(x_\circ; \mathbf{u})\,.$$

**(5.2.7)** Suposem $f\colon U \to \mathbf{R}$ de classe $\mathrm{C}^2$. Si $f$ té un mínim [màxim] local en $x_\circ$ aleshores la matriu hessiana $\mathrm{H}f(x_\circ)$ de $f$ en $x_\circ$ és semidefinida positiva [semidefinida negativa].

**(5.2.8)** Sigui $Q\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una forma quadràtica definida positiva. Existeix $c > 0$ tal que, per a tot $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$, $Q(\mathbf{u}) \ge c\|\mathbf{u}\|^2$.

**(5.2.9)** Siguin $f\colon U \to \mathbf{R}$ de classe $\mathrm{C}^2$, $x_\circ \in U$ un punt crític de $f$, $\mathrm{H}f(x_\circ)$ la matriu hessiana de $f$ en $x_\circ$.

i) Si $\mathrm{H}f(x_\circ)$ és definida positiva, llavors $f$ té un mínim local estricte en $x_\circ$.
ii) Si $\mathrm{H}f(x_\circ)$ és definida negativa, llavors $f$ té un màxim local estricte en $x_\circ$.
iii) Si $\mathrm{H}f(x_\circ)$ és indefinida, llavors $f$ té un coll en $x_\circ$.

**(5.2.10)** Quan $\mathrm{H}f(x_\circ)$ és degenerada però no indefinida llavors no conté prou informació per a decidir el caràcter del punt crític, i cal recórrer a altres procediments.

**(5.2.11)** Sigui $f\colon U \to \mathbf{R}$ de classe $\mathrm{C}^2$. Un punt crític $x_\circ$ de $f$ es diu no-degenerat si la hessiana $\mathrm{H}f(x_\circ)$ de $f$ en $x_\circ$ és no-degenerada.

**(5.2.12)** *Teorema de Morse*
Siguin $f\colon U \to \mathbf{R}$ de classe $\mathrm{C}^{k+2}$, $x_\circ \in U$ un punt crític de $f$ no-degenerat. Llavors existeix un canvi de coordenades $y = \varphi(x)$ de classe $\mathrm{C}^k$, en un veïnat de $x_\circ$, tal que, en aquestes coordenades, $f$ s'expressa

$$\bar f(y) = f(x_\circ) + (y_1)^2 + \ldots + (y_r)^2 - (y_{r+1})^2 - \ldots - (y_n)^2\,,$$

on $(r, n-r)$ és la signatura de la hessiana $\mathrm{H}f(x_\circ)$.

## 5.3 Extrems condicionats locals

En tota aquesta secció $V \subset \mathbf{R}^n$ és un conjunt obert i $f\colon V \to \mathbf{R}$ una funció.

**(5.3.1)** Sigui $S \subset V$ un subconjunt. Ens interessa estudiar la restricció $f|_S$ de $f$ a $S$.
Es diu que $f|_S$ té un mínim local en un punt $x_\circ \in S$ si
hi ha un veïnat $V_\circ$ de $x_\circ$ (dins $\mathbf{R}^n$) tal que, $\forall x \in S \cap V_\circ$, $f(x_\circ) \le f(x)$.
Anàlogament es parla de màxim local, extrem local, etc.

**(5.3.2)** Suposem que $S$ sencer està descrit paramètricament, de manera que $S = g(U)$, on $g\colon U \to V$ és una aplicació definida en un subconjunt $U \subset \mathbf{R}^m$. Sigui $\tilde f = f \circ g$ la funció $f|_S$ expressada en termes de la parametrització.
Sigui $x_\circ \in S$, de forma que $x_\circ = g(u_\circ)$ per a cert $u_\circ \in U$. Aleshores $f|_S$ té un extrem absolut en $x_\circ$ sii $\tilde f$ té un extrem absolut en $u_\circ$.
Suposem a més que $g$ és contínua. En tal cas, si $f|_S$ té un extrem local en $x_\circ$, llavors $\tilde f$ té un extrem local en $u_\circ$.

**(5.3.3)** A partir d'ara suposarem que $S \subset V$ és una *subvarietat regular*.
Suposem que $g\colon U \to V$ és una *parametrització regular* (injectiva) de $S$, definida en un conjunt obert $U \subset \mathbf{R}^m$. Estudiar $f|_S$ és totalment equivalent a estudiar la seva expressió en termes dels paràmetres, $\tilde f$; en particular, $f|_S$ té un extrem local en $x_\circ = g(u_\circ)$ sii $\tilde f$ té un extrem local en $u_\circ$.
Suposem que $f$ és diferenciable. Diem que $x_\circ = g(u_\circ)$ és un punt crític de $f|_S$ quan $u_\circ$ és un punt crític de la seva expressió parametritzada $\tilde f$ (aquesta noció no depèn de la parametrització utilitzada).
Evidentment, si $f|_S$ té un extrem local en $x_\circ$ aleshores n'és un punt crític.
D'altra banda, el caràcter d'un punt crític $x_\circ = g(u_\circ)$ es pot estudiar mitjançant la hessiana $\mathrm{H}\tilde f(u_\circ)$.

**(5.3.4)** Suposem ara que $S$ està descrita *implícitament* per $S = G^{-1}(0)$, amb $G\colon V \to \mathbf{R}^p$ $(p < n)$. Se suposa que $G$ és de classe $\mathrm{C}^1$, i que en un punt $x_\circ \in S$ la matriu jacobiana $\mathrm{J}G(x_\circ) = \big(\partial G^k(x_\circ)/\partial x^j\big)$ té rang màxim $p$ (recordem que aquesta condició implica que $S$ és, al voltant de $x_\circ$, una varietat regular de dimensió $n-p$).
Aleshores $x_\circ$ és un punt crític de $f|_S$ sii $\mathrm{D}f(x_\circ)$ és combinació lineal de les $\mathrm{D}G^k(x_\circ)$, amb $k = 1 \ldots p$.
Aquesta és, doncs, una condició necessària per tenir extrem local:

**(5.3.5)** *Mètode dels multiplicadors de Lagrange*

Amb les hipòtesis i notacions anteriors: si $f$ és diferenciable en $x_\circ$ i $f|_S$ té un extrem local en $x_\circ$, llavors $x_\circ$ és un punt crític de $f|_S$:

$$\mathrm{D}f(x_\circ) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, \mathrm{D}G^k(x_\circ)\,.$$

Els coeficients $\lambda_k$ s'anomenen multiplicadors de Lagrange.

Els extrems locals de $f|_S$ s'anomenen *extrems condicionats* de $f$, per les condicions (o lligams) $G^k(x) = 0$.

**(5.3.6)** El mètode dels multiplicadors de Lagrange es pot expressar així: cal resoldre el sistema de $n+p$ equacions i $n+p$ incògnites

$$\left\{\begin{array}{rcl} G^1(x) & = & 0 \\ & \vdots & \\ G^p(x) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x^1} & = & \lambda_1 \dfrac{\partial G^1(x)}{\partial x^1} + \ldots + \lambda_p \dfrac{\partial G^p(x)}{\partial x^1} \\ & \vdots & \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x^n} & = & \lambda_1 \dfrac{\partial G^1(x)}{\partial x^n} + \ldots + \lambda_p \dfrac{\partial G^p(x)}{\partial x^n} \end{array}\right.$$

De les solucions $(x^j; \lambda_k)$, els punts $(x^j)$ són els punts crítics de $f|_S$, i són els possibles extrems locals condicionats.

**(5.3.7)** El caràcter d'aquests punts (extrem local o coll) es pot decidir, de forma relativament complicada, a partir d'una fórmula que involucra la hessiana de $f$ i les hessianes de les $G^k$.

**(5.3.8)** La condició de criticitat també es pot expressar en termes de gradients:

$$\operatorname{grad} f(x_\circ) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, \operatorname{grad} G^k(x_\circ)\,.$$

En el cas d'un sol lligam ($p = 1$) en $n = 2$ [o $n = 3$] variables aquesta condició, que s'expressa $\operatorname{grad} f(x_\circ) = \lambda \operatorname{grad} G(x_\circ)$, té una interpretació geomètrica: la corba [o superfície] de nivell $f(x_\circ)$ de $f$ és tangent a la corba [o superfície] $S$ en el punt $x_\circ$.

**(5.3.9)** En el cas que hi hagi extrems locals de $f|_S$ en punts on $S$ no és una subvarietat regular, o simplement la jacobiana $\mathrm{J}G$ no hi tingui rang màxim, és possible que aquests punts no apareguin amb el mètode dels multiplicadors, i per tant cal estudiar-los a part, o modificar el mètode.

## 5.4 Extrems absoluts

**(5.4.1)** Siguin $U \subset \mathbf{R}^n$ un conjunt obert, $f\colon U \to \mathbf{R}$ una funció, i $A \subset U$ un subconjunt. Si $f$ és contínua i $A$ compacte, $f|_A$ assoleix màxim i mínim (absoluts).

A vegades és possible escriure

$$A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n\,,$$

on $A_n$ és l'interior de $A$, i la resta són punts ($A_0$), corbes ($A_1$), superfícies ($A_2$), ... Suposant $f$ diferenciable, es busquen, si és factible, els extrems locals de $f$ sobre cadascun d'aquests conjunts (parametritzant-los o pel mètode dels multiplicadors), de manera que avaluant-hi $f$ se'n puguin decidir els extrems absoluts.

# 6 Integració

## 6.1 Integral de Riemann sobre rectangles compactes

**(6.1.1)** Donats $n$ intervals fitats $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbf{R}$, el seu producte cartesià $A = I_1 \times \ldots \times I_n$ és un rectangle fitat dins $\mathbf{R}^n$. La mesura o volum $n$-dimensional (o àrea, si $n = 2$) de $A$ és el nombre

$$\mu(A) = \mathrm{long}(I_1) \times \ldots \times \mathrm{long}(I_n),$$

on $\mathrm{long}(I)$ designa la longitud de l'interval $I$.

Si els intervals són compactes, $I_j = [a_j, b_j]$, el rectangle és compacte. Tenim $\mu(A) = (b_1 - a_1) \times \ldots \times (b_n - a_n)$.

**(6.1.2)** Donat un rectangle compacte $A = I_1 \times \ldots \times I_n$, anomenem partició $\mathcal{P}$ de $A$ el resultat de fer una partició $\mathcal{P}_j$ de cada interval $I_j$ (entesa com a un conjunt finit de punts de $I_j$, incloent-ne els extrems, que parteix l'interval $I_j$ en $N_j$ segments).

La partició de $A$ ve representada doncs per $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \ldots \times \mathcal{P}_n$, i parteix el rectangle $A$ en $N = N_1 \times \ldots \times N_n$ rectangles més petits.

**(6.1.3)** Donades particions $\mathcal{P} = \prod_{j=1}^n \mathcal{P}_j$ i $\mathcal{P}' = \prod_{j=1}^n \mathcal{P}'_j$ de $A$, la partició $\mathcal{P}$ és més fina que $\mathcal{P}'$ si cada $\mathcal{P}_j$ és més fina que $\mathcal{P}'_j$.

**(6.1.4)** Siguin $A \subset \mathbf{R}^n$ un rectangle compacte, $f \colon A \to \mathbf{R}$ una funció fitada.

Sigui $\mathcal{P}$ una partició de $A$. Per a cada rectangle $R_k$ de la partició, posem

$$m_k = \inf_{x \in R_k} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in R_k} f(x).$$

Llavors els nombres

$$s(f;P) = \sum_k m_k\, \mu(R_k), \quad S(f;P) = \sum_k M_k\, \mu(R_k),$$

s'anomenen respectivament suma inferior i suma superior de $f$ respecte a $\mathcal{P}$.

**(6.1.5)** Si la partició $\mathcal{P}$ és més fina que $\mathcal{P}'$, llavors

$$s(f;\mathcal{P}') \leq s(f;\mathcal{P}) \leq S(f;\mathcal{P}) \leq S(f;\mathcal{P}').$$

**(6.1.6)** Si $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ són dues particions qualssevol llavors $s(f;\mathcal{P}') \leq S(f;\mathcal{P})$.

**(6.1.7)** Sigui $f \colon A \to \mathbf{R}$ fitada sobre un rectangle compacte. Els nombres

$$\underline{\int_A} f = \sup_{\mathcal{P}} s(f;\mathcal{P}), \qquad \overline{\int_A} f = \inf_{\mathcal{P}} S(f;\mathcal{P}),$$

on el suprem i l'ínfim es prenen en el conjunt de totes les possibles particions $\mathcal{P}$ de $A$, s'anomenen respectivament integral inferior i integral superior de $f$ en $A$. Òbviament $\underline{\int}_A f \leq \overline{\int}_A f$.

**(6.1.8)** $f$ es diu integrable Riemann en $A$ quan les seves integrals inferior i superior coincideixen. En aquest cas el seu valor comú es diu integral de Riemann de $f$ en $A$, i es denota per

$$\int_A f, \quad \int_A f(x)\, \mathrm{d}^n x, \quad \text{o} \quad \int_A f(x^1, \ldots, x^n)\, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n.$$

En el cas de $n = 2$ o $n = 3$ es parla d'*integral doble* o *integral triple*, respectivament, ja que és habitual posar dos o tres signes d'integral per a representar-les.

**(6.1.9)** Sigui $f \colon A \to \mathbf{R}$ fitada sobre un rectangle compacte. $f$ és integrable Riemann sii $\forall \varepsilon > 0$ hi ha una partició $\mathcal{P}$ de $A$ tal que $S(f;\mathcal{P}) - s(f;\mathcal{P}) < \varepsilon$.

**(6.1.10)** Tota funció contínua sobre un rectangle compacte hi és integrable Riemann.

**(6.1.11)** Sigui $f \colon A \to \mathbf{R}$ integrable Riemann. Si $g$ coincideix amb $f$ excepte en un conjunt finit de punts, llavors $g$ també és integrable Riemann, i $\int_A g = \int_A f$.

**(6.1.12)** Siguin $f, g \colon A \to \mathbf{R}$ integrables Riemann en un rectangle compacte. Llavors

i) $f + g$ és integrable Riemann, i $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$.

ii) $\lambda f$ és integrable Riemann, i $\int_A \lambda f = \lambda \int_A f$.

iii) $fg$ és integrable Riemann en $A$.

**(6.1.13)** Sigui $f \colon A \to \mathbf{R}$ integrable Riemann.

i) $|f|$ és integrable Riemann, i $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$.

ii) Si $f \geq 0$, $\int_A f \geq 0$.

**(6.1.14)** Sigui $f \colon A \to \mathbf{R}$ fitada sobre un rectangle compacte, $\mathcal{P}$ una partició de $A$, i $\xi = (\xi_k)$ una família de punts $\xi_k \in R_k$, on $R_k$ són els rectangles de la partició. Es defineix la suma de Riemann $R(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_k f(\xi_k)\, \mu(R_k)$. Si $f$ és integrable Riemann llavors, en un sentit que caldria precisar, $R(f, \mathcal{P}, \xi)$ s'aproxima al valor de $\int_A f$ a mesura que el diàmetre de $\mathcal{P}$ (el màxim dels diàmetres dels rectangles $R_k$ de $\mathcal{P}$) tendeix a 0.

## 6.2 Conjunts de mesura nul·la

**(6.2.1)** Es diu que un subconjunt $T \subset \mathbf{R}^n$ té mesura nul·la ($n$-dimensional) si, per a tota $\varepsilon > 0$, es pot recobrir $T$ amb una família numerable de rectangles tals que la suma de les seves mesures $n$-dimensionals sigui $< \varepsilon$. En altres paraules, existeixen rectangles $R_k$ ($k \in \mathbf{N}$) tals que

$$T \subset \bigcup_{k\in\mathbf{N}} R_k \text{ i } \sum_{k\in\mathbf{N}} \mu(R_k) < \varepsilon\,.$$

**(6.2.2)** Un punt té mesura nul·la.
Si $S \subset T$ i $T$ té mesura nul·la, llavors $S$ té mesura nul·la.

**(6.2.3)** La reunió d'una família numerable de conjunts de mesura nul·la té mesura nul·la.
Tot conjunt numerable té mesura nul·la.

**(6.2.4)** En $\mathbf{R}^n$, qualsevol varietat lineal de dimensió $< n$ té mesura nul·la.

**(6.2.5)** Sigui $A \subset \mathbf{R}^{n-1}$ fitat, $f\colon A \to \mathbf{R}$ uniformement contínua. El graf de $f$, $\mathrm{graf}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$, té mesura nul·la.
En particular, si $A \subset \mathbf{R}^{n-1}$ és compacte i $f\colon A \to \mathbf{R}$ contínua, $\mathrm{graf}(f)$ té mesura nul·la.

**(6.2.6)** Sigui $\varphi\colon U \to \mathbf{R}^n$ de classe $\mathrm{C}^1$ en un conjunt obert $U \subset \mathbf{R}^n$. Si $N \subset U$ té mesura nul·la, llavors $\varphi(N) \subset \mathbf{R}^n$ té mesura nul·la.

**(6.2.7)** Tota subvarietat regular $M \subset \mathbf{R}^n$ de dimensió $m < n$ té mesura nul·la.

## 6.3 Integral de Riemann sobre conjunts mesurables Jordan

**(6.3.1)** *Teorema de Lebesgue*
Siguin $A \subset \mathbf{R}^n$ un rectangle compacte, $f\colon A \to \mathbf{R}$ una funció fitada. Sigui $N = \{x \in A \mid f \text{ no és contínua en } x\}$.
Llavors $f$ és integrable Riemann sii $N$ és de mesura nul·la.

**(6.3.2)** Sigui $C \subset \mathbf{R}^n$ un subconjunt. La funció característica (o funció indicatriu) de $C$ és

$$\chi_C\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \qquad \chi_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

**(6.3.3)** Els punts on $\chi_C$ no és contínua són els punts de la frontera de $C$.

**(6.3.4)** El conjunt $C$ és mesurable Jordan si és fitat i existeix la integral Riemann $\int_R \chi_C$, on $R$ és qualsevol rectangle compacte tal que $C \subset R$.

**(6.3.5)** $C$ és mesurable Jordan sii és fitat i $\mathrm{Fr}(C)$ té mesura nul·la.

**(6.3.6)** Es poden donar exemples de conjunts compactes, de conjunts oberts fitats, i de conjunts de mesura nul·la, que no són mesurables Jordan; però en la pràctica la majoria dels conjunts que s'utilitzen són mesurables Jordan.

**(6.3.7)** Siguin $C$ mesurable Jordan, $f\colon C \to \mathbf{R}$ fitada. $f$ es diu integrable Riemann (en $C$) si existeix la integral de Riemann $\int_C f := \int_R f\chi_C$, on $R \supset C$ és un rectangle compacte qualsevol. El nombre $\int_C f$ s'anomena integral de Riemann de $f$ sobre $C$.

**(6.3.8)** Si $C$ és mesurable Jordan i $f\colon C \to \mathbf{R}$ és fitada, llavors $f$ és integrable Riemann sobre $C$ sii el conjunt de punts de discontinuïtat de $f$ (dins $C$) té mesura nul·la.

**(6.3.9)** En particular, si $C \subset \mathbf{R}^n$ és mesurable Jordan llavors existeix la integral $\int_C 1$: s'anomena *contingut* o volum $n$-dimensional de $C$.
Per a $n = 1, 2$ s'anomena *longitud* o *àrea*, respectivament.

**(6.3.10)** La integral de Riemann sobre conjunts mesurables Jordan té les mateixes propietats que sobre rectangles compactes (linealitat, positivitat, etc).

**(6.3.11)** Si $A$ i $B$ són mesurables Jordan, $A \cup B$ també.
Si $f$ és integrable Riemann sobre $A$ i $B$, també ho és sobre $A \cup B$, i si $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \emptyset$, llavors $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$ (additivitat respecte al domini).

**(6.3.12)** Siguin $C$ mesurable Jordan i $f\colon C \to \mathbf{R}$ integrable Riemann. S'anomena valor mitjà de $f$ el nombre $\int_C f / \int_C 1$.

**(6.3.13)** Siguin $C$ mesurable Jordan, $f\colon C \to \mathbf{R}$ fitada i contínua. Si $C$ és compacte i arc-connex, existeix $x_\circ \in C$ tal que $\int_C f = f(x_\circ) \int_C 1$.

**(6.3.14)** Un conjunt simple o regió elemental és un conjunt $C \subset \mathbf{R}^n$ de la forma següent.
Per a $n = 2$:

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x \in K,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}\,,$$

on $K \subset \mathbf{R}$ és un interval compacte, i $\varphi, \psi\colon K \to \mathbf{R}$ són funcions contínues amb $\varphi \le \psi$.

Per a $n = 3$, el mateix, substituint l'interval per un conjunt simple del pla:
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \mid (x, y) \in K,\ \alpha(x, y) \le z \le \beta(x, y)\}\,,$$
on $K \subset \mathbf{R}^2$ és un conjunt simple, i $\alpha, \beta\colon K \to \mathbf{R}$ són contínues amb $\alpha \le \beta$. Evidentment, en aquestes construccions podríem canviar la variable que es troba limitada per les desigualtats per una altra variable.

Per a $n > 3$ la definició és la mateixa, usant un conjunt simple en una dimensió menys.

**(6.3.15)** Els conjunts simples són mesurables Jordan,

## 6.4 Teorema de Fubini

**(6.4.1)** *Teorema de Fubini*

Siguin $C = A \times B$, amb $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, i $f\colon C \to \mathbf{R}$ integrable Riemann.

Per a cada $x \in A$ considerem $\varphi_x\colon B \to \mathbf{R}$ definida per $\varphi_x(y) = f(x, y)$. Llavors la funció $\Phi(x) = \underline{\int}_B \varphi_x(y)\,\mathrm{d}y$ és integrable Riemann en $A$, i
$$\int_{A\times B} f = \int_A \Phi\,.$$
En lloc d'amb $\underline{\int}$, es pot definir $\Phi$ per $\Phi(x) = \overline{\int}_B \varphi_x(y)\,\mathrm{d}y$. Ambdós fets es poden expressar simplement escrivint
$$\int_{A\times B} f = \int_A \mathrm{d}x \left(\underline{\int}_B \mathrm{d}y\, f(x, y)\right) = \int_A \mathrm{d}x \left(\overline{\int}_B \mathrm{d}y\, f(x, y)\right).$$
Un resultat anàleg s'obté integrant primer respecte a $x$:
$$\int_{A\times B} f = \int_B \mathrm{d}y \left(\underline{\int}_A \mathrm{d}x\, f(x, y)\right) = \int_B \mathrm{d}y \left(\overline{\int}_A \mathrm{d}x\, f(x, y)\right).$$

**(6.4.2)** Sovint les funcions $\varphi_x = f(x, \cdot)$ són integrables Riemann en $B$, de manera que les integrals inferiors (o superiors) del teorema són integrals de Riemann ordinàries:
$$\int_{A\times B} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x, y) = \int_A \mathrm{d}x \left(\int_B \mathrm{d}y\, f(x, y)\right),$$
i anàlogament integrant primer respecte a $x$ si les funcions $f(\cdot, y)$ són integrables Riemann en $A$.

**(6.4.3)** Més simplement, quan la funció $f$ és contínua existeixen i són iguals els tres nombres següents:
$$\int_{A\times B} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_A \mathrm{d}x \left(\int_B \mathrm{d}y\, f(x, y)\right) = \int_B \mathrm{d}y \left(\int_A \mathrm{d}x\, f(x, y)\right).$$

**(6.4.4)** Hi ha funcions $f\colon A \times B \to \mathbf{R}$ que *no* són integrables Riemann però per a les quals es pot calcular $\int_A \mathrm{d}x \left(\int_B \mathrm{d}y\, f(x, y)\right) = \int_B \mathrm{d}y \left(\int_A \mathrm{d}x\, f(x, y)\right)$.

**(6.4.5)** El teorema es generalitza a $n$ variables: per exemple, si $A = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ i $f\colon A \to \mathbf{R}$ és contínua,
$$\int_A f = \int_{a_1}^{b_1} \mathrm{d}x^1 \left(\ldots \left(\int_{a_n}^{b_n} \mathrm{d}x^n f(x^1, \ldots, x^n)\right) \ldots\right).$$

**(6.4.6)** El teorema de Fubini es pot utilitzar per a integrar sobre conjunts simples. Per exemple, si $C = \{(x, y) \mid x \in [a, b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ com en 6.3.14 i $f$ és contínua
$$\int_C \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, f(x, y) = \int_a^b \mathrm{d}x \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \mathrm{d}y\, f(x, y)\right).$$

## 6.5 Teorema del canvi de variables

**(6.5.1)** *Teorema del canvi de variables*

Siguin $U \subset \mathbf{R}^n$ un conjunt obert, i $\varphi\colon U \to \mathbf{R}^n$ una aplicació injectiva, de classe $\mathrm{C}^1$, i amb $\det \mathrm{J}\varphi(x) \neq 0$ en tot $x \in U$. Sigui $V = \varphi(U)$ (de manera que $\varphi\colon U \to V$ és un difeomorfisme).

Si $f\colon V \to \mathbf{R}$ és integrable, llavors
$$\int_V f = \int_U (f \circ \varphi)\,|\det \mathrm{J}\varphi|\,,$$
que també es pot escriure
$$\int_V f(y^1, \ldots, y^n)\,\mathrm{d}y^1 \ldots \mathrm{d}y^n =$$
$$= \int_{\varphi^{-1}(V)} f(\varphi^1(x), \ldots, \varphi^n(x)) \left|\det \frac{\partial(y^1, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}\right| \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n\,.$$

**(6.5.2)** En l'enunciat del teorema, es pot suprimir la hipòtesi de $\det \mathrm{J}\varphi(x) \neq 0$ (en aquest cas $\varphi^{-1}\colon V \to U$ és contínua, però potser no és de classe $\mathrm{C}^1$).

**(6.5.3)** Integració en coordenades polars:

$$\int_{\varphi(U)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_U f(r\cos\phi, r\sin\phi)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,.$$

Integració en coordenades cilíndriques:

$$\int_{\varphi(U)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_U f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,.$$

Integració en coordenades esfèriques:

$$\int_{\varphi(U)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_U f(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.$$

## 6.6 Integrals dependents de paràmetres

**(6.6.1)** Sigui $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbf{R}$ contínua, i definim $F\colon [c,d]\to\mathbf{R}$ per $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$. Llavors:

i) La funció $F$ és contínua.

ii) Si $\mathrm{D}_2 f$ existeix i és contínua, llavors $F$ és de classe $\mathrm{C}^1$, i $F'(y) = \int_a^b \mathrm{D}_2 f(x,y)\,\mathrm{d}x$, expressió que també podem escriure

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

(regla de Leibniz).

**(6.6.2)** Més generalment, si $F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ on $\alpha,\beta$ són diferenciables i $f, \mathrm{D}_2 f$ són contínues on pertoqui, llavors

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \mathrm{D}_2 f(x,y)\,\mathrm{d}x + f(\beta(y),y)\,\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\,\alpha'(y)\,.$$

**(6.6.3)** El teorema es generalitza al cas de funcions de més variables.

## 6.7 Integrals impròpies

**(6.7.1)** Les integrals impròpies són integrals $\int_A f$ on el domini d'integració no és mesurable Jordan o la funció no és integrable Riemann (per exemple, quan $A$ no és fitat o $f$ no és fitada), però tot i així se'ls pot donar sentit aproximant-les per integrals de Riemann pròpies.

**(6.7.2)** Una situació bastant general és la següent. Sigui $f\colon A\to\mathbf{R}$ una funció contínua. Suposem que $A$ és obert, i que el podem escriure com $A = \cup_{n\geq 0} A_n$, on els $A_n$ formen uns successió creixent de conjunts oberts mesurables Jordan, i tals que compleixin $\bar{A}_n \subset A_{n+1}$.
Si existeix el límit $\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f$ i val el mateix independentment de la successió $(A_n)$ triada, l'anomenarem integral impròpia de $f$ en $A$, i el representarem per $\int_A f$. Quan el límit és finit, la integral es diu convergent.

**(6.7.3)** Si $f$ és positiva el límit anterior existeix i és el mateix independentment de la successió $(A_n)$ triada.
Quan $\int_A f = +\infty$ es diu que la integral impròpia és divergent.

**(6.7.4)** Per exemple, en $\mathbf{R}^3$ la integral $\displaystyle\int_{r<1}\frac{1}{r^\alpha}$ és convergent sii $\alpha < 3$, mentre que $\displaystyle\int_{r>1}\frac{1}{r^\alpha}$ és convergent sii $\alpha > 3$.
En $\mathbf{R}^2$ la integral $\int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ és convergent i val $\pi$; aquesta integral està estretament lligada a la integral gaussiana $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

# 7 Integrals de línia i de superfície

## 7.1 Integrals de línia de funcions escalars

**(7.1.1)** Sigui $\sigma\colon I \to \mathbf{R}^n$ un camí definit en un interval compacte $I$. Donada una partició $\{s_0, \ldots, s_N\}$ de $I$, la suma $\sum_{i=1}^{N} \|\sigma(s_i) - \sigma(s_{i-1})\|$ és la llargada de la poligonal definida pels $N+1$ punts $\sigma(s_0), \ldots, \sigma(s_N)$.

El suprem de totes aquestes sumes, si existeix, s'anomena longitud o llargada de la corba parametritzada $\sigma$.

**(7.1.2)** Si $\sigma$ és de classe $\mathrm{C}^1$ a trossos llavors la seva llargada val $\int_I \|\boldsymbol{\sigma}'(s)\|\,\mathrm{d}s$.

**(7.1.3)** Encara que $I$ no sigui compacte, si la integral anterior existeix podem prendre-la com a definició de la llargada de $\sigma$.

**(7.1.4)** La llargada no canvia en reparametritzar el camí. Més precisament: si $\varphi\colon I \to J$ és un difeomorfisme, llavors el camí $\tau = \sigma \circ \varphi^{-1}$ té la mateixa llargada que $\sigma$.

**(7.1.5)** Sigui $C \subset \mathbf{R}^n$ una corba regular. Si $C$ és la imatge d'una parametrització injectiva $\sigma\colon I \to \mathbf{R}^n$ de la qual podem calcular la longitud, direm que aquesta és la longitud o llargada de $C$.

Aquesta definició es pot ampliar en diversos sentits: si la imatge de $\sigma$ és tot $C$ excepte un conjunt finit (o fins i tot numerable) de punts, o si $C$ és una corba regular excepte en un conjunt finit de punts, o si $C$ és la reunió de les imatges de diverses corbes parametritzades, … , encara parlarem de la longitud de $C$.

**(7.1.6)** Sigui $\sigma\colon I \to \mathbf{R}^n$ un camí de classe $\mathrm{C}^1$ a trossos, amb imatge $C = \sigma(I)$. Sigui $f\colon C \to \mathbf{R}$ una funció. Anomenem integral de línia de $f$ al llarg de la corba parametritzada $\sigma$ la integral

$$\int_\sigma f\,\mathrm{d}\ell := \int_I f(\sigma(s))\,\|\boldsymbol{\sigma}'(s)\|\,\mathrm{d}s\,.$$

Aquesta integral existeix, per exemple, sempre que $I$ és compacte i $f$ contínua.

En el cas que $f = 1$ retrobem la definició de llargada de $\sigma$.

**(7.1.7)** La integral anterior no varia sota canvis de variable: si $\varphi\colon I \to J$ és un difeomorfisme i definim el camí $\tau\colon J \to \mathbf{R}^n$ per $\tau = \sigma\circ\varphi^{-1}$, llavors $\int_\tau f\,\mathrm{d}\ell = \int_\sigma f\,\mathrm{d}\ell$.

**(7.1.8)** Sigui $C \subset \mathbf{R}^n$ una corba regular. Si és la imatge d'una parametrització injectiva $\sigma\colon I \to \mathbf{R}^n$, anomenem integral de línia de $f$ al llarg de la corba $C$ la integral, si existeix,

$$\int_C f\,\mathrm{d}\ell := \int_\sigma f\,\mathrm{d}\ell\,.$$

Es poden fer les mateixes observacions que en (7.1.5).

## 7.2 Integrals de línia de funcions vectorials

**(7.2.1)** Sigui $\sigma\colon I \to \mathbf{R}^n$ un camí de classe $\mathrm{C}^1$ a trossos, amb imatge $C = \sigma(I)$. Sigui $\mathbf{f}\colon C \to \mathbf{R}^n$ una funció vectorial (habitualment $\mathbf{f}$ serà un camp vectorial definit en un conjunt obert $W \subset \mathbf{R}^n$ contenint $C$). Anomenem integral de línia o circulació de $\mathbf{f}$ al llarg de la corba parametritzada $\sigma$ la integral

$$\int_\sigma \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} := \int_I \mathbf{f}(\sigma(s))\cdot\boldsymbol{\sigma}'(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Aquesta integral existeix, per exemple, sempre que $I$ és compacte i $\mathbf{f}$ contínua.

**(7.2.2)** Suposant que $\sigma\colon I \to \mathbf{R}^n$ és una parametrització injectiva regular, es pot definir el *vector tangent unitari* $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}'/\|\boldsymbol{\sigma}'\|$. En aquest cas s'anomena *component tangencial* de $\mathbf{f}$ la funció $f_t(\sigma(s)) = \mathbf{f}(\sigma(s))\cdot\mathbf{t}(s)$. Llavors

$$\int_\sigma \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_\sigma f_t\,\mathrm{d}\ell\,.$$

**(7.2.3)** Sigui $\varphi\colon I \to J$ un difeomorfisme, i considerem el camí $\tau = \sigma\circ\varphi^{-1}$. Llavors $\int_\sigma \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \pm\int_\tau \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, on el signe és positiu si $\varphi$ és creixent, i negatiu si $\varphi$ és decreixent.

**(7.2.4)** Sigui $C \subset \mathbf{R}^n$ una corba regular. Si $C$ és la imatge d'una parametrització injectiva regular $\sigma\colon I \to \mathbf{R}^n$, el vectors tangents $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ defineixen una orientació dels espais tangents $\mathrm{T}_{\sigma(t)}C$. Es diu llavors que la corba $C$ és orientada.

**(7.2.5)** Donat un difeomorfisme $\varphi\colon I \to J$, les parametritzacions $\sigma$ i $\tau = \sigma\circ\varphi^{-1}$ defineixen sengles orientacions de $C$; aquestes són iguals si $\varphi' > 0$, i oposades si $\varphi' < 0$.

Orientar una corba equival a fer una tria contínua d'un vector tangent unitari al llarg de $C$.

**(7.2.6)** Sigui $C$ una corba orientada per una parametrització injectiva regular $\sigma\colon I \to \mathbf{R}^n$, i $\mathbf{f}\colon C \to \mathbf{R}^n$ una funció vectorial. Anomenem integral de línia o circulació de $\mathbf{f}$ al llarg de la corba orientada $C$ la integral, si existeix,

$$\int_C \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} := \int_\sigma \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_I \mathbf{f}(\sigma(s))\cdot \boldsymbol{\sigma}'(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Es poden fer les mateixes observacions que en (7.1.5).

**(7.2.7)** Si $C$ és una corba orientada i $C^o$ és la mateixa corba amb l'orientació oposada, $\int_{C^o} \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\int_C \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$.

**(7.2.8)** És habitual usar la notació $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = (\mathrm{d}x_1,\dots,\mathrm{d}x_n)$, de manera que es posa $\int_C \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_C f_1\mathrm{d}x_1 + \ldots + f_n\mathrm{d}x_n$.
En el cas d'una corba «tancada» és habitual escriure $\oint_C \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$.

**(7.2.9)** *Camps conservatius*
Sigui un camp vectorial $\mathbf{f}\colon W \to \mathbf{R}^n$ de classe $\mathrm{C}^0$, on $W \subset \mathbf{R}^n$ és un conjunt obert. Es diu que $\mathbf{f}$ és conservatiu si existeix un camp escalar de classe $\mathrm{C}^1$ $\phi\colon W \to \mathbf{R}^n$ tal que $\mathbf{f} = \operatorname{grad}\phi$.

**(7.2.10)** Si $\gamma\colon [t_0,t_1] \to W$ és un camí de classe $\mathrm{C}^1$ a trossos amb $\gamma(t_0) = x_0$, $\gamma(t_1) = x_1$, i $\mathbf{f} = \operatorname{grad}\phi$, llavors

$$\int_\gamma \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \phi(x_1) - \phi(x_0)\,,$$

i per tant la circulació de $\mathbf{f}$ al llarg de $\gamma$ només depèn dels seus extrems. En aquest cas, és habitual denotar la circulació per $\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$.
En el cas particular que $x_0 = x_1$ obtenim que $\oint_\gamma \operatorname{grad}\phi\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0$.

**(7.2.11)** Recíprocament, si $\mathbf{f}\colon W \to \mathbf{R}^n$ és un camp vectorial de classe $\mathrm{C}^0$ tal que la circulació al llarg de qualsevol camí només depèn dels seus punts extrems, llavors $\mathbf{f}$ és conservatiu.

## 7.3 Integrals de superfície de funcions escalars

**(7.3.1)** Sigui $\sigma\colon U \to \mathbf{R}^3$, on $U \subset \mathbf{R}^2$ és obert, una superfície parametritzada regular, amb imatge $M = \sigma(U)$. Denotem per $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ els vectors tangents definits per la parametrització.
Sigui $f\colon M \to \mathbf{R}$ una funció. Anomenem integral de superfície de $f$ al llarg de la superfície parametritzada $\sigma$ la integral, si existeix,

$$\int_\sigma f\,\mathrm{d}S := \int_U f(\sigma(u_1,u_2))\,\|\mathbf{T}_1\times\mathbf{T}_2\|\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\,.$$

**(7.3.2)** La integral anterior també s'escriu

$$\int_\sigma f\,\mathrm{d}S = \int_U f(\sigma(u_1,u_2))\,\sqrt{g}\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\,,$$

on $g$ és el determinant de la matriu de Gram definida pels vectors $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$: $g = \begin{vmatrix} \mathbf{T}_1\cdot\mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_1\cdot\mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_2\cdot\mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2\cdot\mathbf{T}_2 \end{vmatrix}$.
Escrita d'aquesta manera, la integral anterior és vàlida per a superfícies parametritzades en $\mathbf{R}^n$.

**(7.3.3)** La integral de superfície no canvia en fer una reparametrització. Més precisament: si $\varphi\colon U \to U'$ és un difeomorfisme entre conjunts oberts de $\mathbf{R}^2$, i definim una nova superfície parametritzada $\sigma' = \sigma\circ\varphi^{-1}$, llavors $\int_\sigma f\,\mathrm{d}S = \int_{\sigma'} f\,\mathrm{d}S$.

**(7.3.4)** Sigui $M \subset \mathbf{R}^3$ una superfície regular. Si és la imatge d'una parametrització injectiva regular $\sigma\colon U \to \mathbf{R}^3$, anomenem integral de superfície de $f$ al llarg de $M$ la integral, si existeix,

$$\int_M f\,\mathrm{d}S := \int_\sigma f\,\mathrm{d}S\,.$$

Aquesta definició es pot ampliar en diversos sentits: si $M$ no és tot sencer la imatge d'una parametrització $\sigma$ perquè falta un conjunt de mesura nul·la (com ara la reunió d'un conjunt finit de punts i corbes regulars), o si $M$ és una superfície regular excepte en un conjunt finit de punts i corbes regulars, o si $M$ és la reunió de les imatges de diverses superfícies parametritzades regulars, … , encara parlarem de la integral de superfície de $f$ sobre $M$.

**(7.3.5)** Anomenem àrea de $M$ la integral de superfície $\int_M \mathrm{d}S$.

## 7.4 Integrals de superfície de funcions vectorials en $\mathbf{R}^3$

**(7.4.1)** Sigui $\sigma\colon U \to \mathbf{R}^3$ una superfície parametritzada injectiva regular, amb imatge $M = \sigma(U)$, i denotem per $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ els vectors tangents definits per la parametrització. Sigui $\mathbf{f}\colon M \to \mathbf{R}^3$ una funció vectorial (habitualment $\mathbf{f}$ serà un camp vectorial definit en un conjunt obert $W \subset \mathbf{R}^3$ contenint $M$).

Anomenem integral de superfície o flux de $\mathbf{f}$ a través de la superfície parametritzada $\sigma$ la integral

$$\int_\sigma \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} := \int_U \mathbf{f}(\sigma(u_1,u_2))\cdot \mathbf{T}_1\times\mathbf{T}_2\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 = \int_U \det(\mathbf{f}\circ\sigma,\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2)\,.$$

**(7.4.2)** Sota les mateixes suposicions, considerem el *vector normal unitari* definit per la parametrització, $\mathbf{n} = \mathbf{T}_1\times\mathbf{T}_2/\|\mathbf{T}_1\times\mathbf{T}_2\|$. En aquest cas s'anomena *component normal* de $\mathbf{f}$ la funció $f_n(\sigma(u_1,u_2)) = \mathbf{f}(\sigma(u_1,u_2))\cdot\mathbf{n}(u_1,u_2)$. Llavors

$$\int_\sigma \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_\sigma f_n\,\mathrm{d}S\,.$$

**(7.4.3)** Sigui $\varphi\colon U\to V$ un difeomorfisme entre conjunts oberts de $\mathbf{R}^2$, i considereu la superfície parametritzada $\tau = \sigma\circ\varphi^{-1}$. Llavors $\int_\sigma \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \pm\int_\tau \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$, on el signe és el mateix que el del determinant jacobià $\det \mathrm{J}\varphi$.

**(7.4.4)** Sigui $M\subset\mathbf{R}^3$ una superfície regular. Si $M$ és la imatge d'una parametrització injectiva regular $\sigma\colon U\to\mathbf{R}^3$, el vectors tangents $\mathbf{T}_1(u),\mathbf{T}_2(u)$ defineixen una orientació dels espais tangents $\mathrm{T}_{\sigma(u)}M$. Es diu llavors que la superfície $M$ és orientada.

**(7.4.5)** Donat un difeomorfisme $\varphi\colon U\to V$, les parametritzacions $\sigma$ i $\tau=\sigma\circ\varphi^{-1}$ defineixen sengles orientacions de $M$; aquestes són iguals si el signe del determinant jacobià $\det\mathrm{J}\varphi$ és positiu, i oposades si és negatiu.

**(7.4.6)** Sigui $M$ una superfície regular en $\mathbf{R}^3$. En general, calen diverses parametritzacions injectives regulars per a recobrir $M$ sencera. Es diu que $M$ és orientable quan es pot aconseguir que totes aquestes parametritzacions defineixin la mateixa orientació en cada punt. Quan s'ha triat una orientació, es diu que $M$ és una superfície orientada.

Orientar una superfície en $\mathbf{R}^3$ equival a fer una tria contínua d'un vector normal unitari al llarg de $M$.

**(7.4.7)** Hi ha superfícies no orientables, com ara la *banda de Möbius*.

**(7.4.8)** Sigui $M$ una superfície orientada, i suposem que és la imatge d'una parametrització injectiva regular $\sigma\colon U\to\mathbf{R}^3$ corresponent a l'orientació de $M$. Sigui $\mathbf{f}\colon M\to\mathbf{R}^3$ una funció vectorial. La integral de superfície o flux de $\mathbf{f}$ a través de la superfície orientada $M$ és la integral, si existeix,

$$\int_M \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} := \int_\sigma \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Es poden fer les mateixes observacions que en (7.3.4).

**(7.4.9)** Si $M$ és una superfície orientada i $M^o$ és la mateixa superfície amb l'orientació oposada, $\int_{M^o}\mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_M \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$.

**(7.4.10)** En el cas d'una superfície «tancada» és habitual escriure $\oint_M \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$.

A vegades $\int_M \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$ es denota per $\int_M (f_1\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 + f_2\,\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1 + f_3\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2)$.

# 8 Teoremes integrals de l'anàlisi vectorial

## 8.1 Operadors diferencials sobre camps en $\mathbf{R}^3$

**(8.1.1)** Sigui $U \subset \mathbf{R}^3$ un conjunt obert. Denotem per $\mathcal{E}(U)$ i $\mathcal{V}(U)$, respectivament, els conjunts de camps escalars i camps vectorials de classe $\mathrm{C}^\infty$ definits sobre $U$. Es poden definir tres operadors diferencials lineals de primer ordre

$$\mathcal{E}(U) \xrightarrow{\text{grad}} \mathcal{V}(U) \xrightarrow{\text{rot}} \mathcal{V}(U) \xrightarrow{\text{div}} \mathcal{E}(U)\,.$$

En coordenades *cartesianes*, la seva definició és:

Gradient: $\operatorname{grad} f \equiv \nabla f := \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix} = \left(\mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right) f.$

Rotacional: $\operatorname{rot} \mathbf{f} \equiv \nabla \times \mathbf{f} := \begin{pmatrix} \partial \mathbf{f}_3/\partial y - \partial \mathbf{f}_2/\partial z \\ \partial \mathbf{f}_1/\partial z - \partial \mathbf{f}_3/\partial x \\ \partial \mathbf{f}_2/\partial x - \partial \mathbf{f}_1/\partial y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \partial/\partial x & \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{j} & \partial/\partial y & \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{k} & \partial/\partial z & \mathbf{f}_3 \end{vmatrix}.$

Divergència: $\operatorname{div} \mathbf{f} \equiv \nabla \cdot \mathbf{f} := \dfrac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial z} = \left(\mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \mathbf{f}.$

En aquestes expressions hem usat l'operador nabla,

$$\nabla := \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Les definicions del gradient i la divergència es poden aplicar a camps en $\mathbf{R}^n$.

**(8.1.2)** La linealitat significa que $\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$, $\operatorname{grad}(cf) = c \operatorname{grad} f$, i anàlogament amb el rotacional i la divergència.

**(8.1.3)** Sigui $\mathbf{f}$ un camp vectorial. Es diu que és irrotacional si $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$, i sense divergència si $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$.

**(8.1.4)** Si $f$ és un camp escalar de classe $\mathrm{C}^2$, $\operatorname{grad} f$ és irrotacional: $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$. Si $\mathbf{f}$ és un camp vectorial de classe $\mathrm{C}^2$, $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ és sense divergència: $\operatorname{div}\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$.

**(8.1.5)** Si $f, g$ són camps escalars i $\mathbf{h}$ és un camp vectorial, tots de classe $\mathrm{C}^1$, es té:

$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f\,,$$
$$\operatorname{rot}(f\mathbf{h}) = f \operatorname{rot} \mathbf{h} + \operatorname{grad} f \times \mathbf{h}\,,$$
$$\operatorname{div}(f\mathbf{h}) = f \operatorname{div} \mathbf{h} + \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{h}\,.$$

**(8.1.6)** Es pot definir el laplacià, un operador diferencial lineal de segon ordre que actua sobre un camp escalar $f \colon U \to \mathbf{R}$ de classe $\mathrm{C}^2$ per

$$\Delta f \equiv \nabla^2 f := \operatorname{div}\operatorname{grad} f\,.$$

En coordenades *cartesianes*, $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Aquesta definició es pot aplicar a camps escalars (i també vectorials) en $\mathbf{R}^n$.

**(8.1.7)** Una funció $f$ és diu harmònica si $\Delta f = 0$.

**(8.1.8)** Altres propietats:

$$\operatorname{div}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f} - \mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{g}\,,$$
$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{f}) - \Delta \mathbf{f}\,.$$

També hi ha expressions per a $\operatorname{grad}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})$ i $\operatorname{rot}(\mathbf{f} \times \mathbf{g})$.

## 8.2 Teoremes del rotacional i de la divergència

**(8.2.1)** *Teorema de Kelvin–Stokes, o del rotacional*

Siguin $U \subset \mathbf{R}^3$ un conjunt obert, $\mathbf{f} \colon U \to \mathbf{R}^3$ un camp vectorial de classe $\mathrm{C}^1$. Sigui $S \subset U$ una superfície orientada tal que $\overline{S} \subset U$. Llavors

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\,,$$

on $\partial S$ és la vora de $S$ amb l'orientació induïda per la de $S$ («regla del cargol», o «de la mà dreta»).

**(8.2.2)** *Teorema de Gauss–Ostrogradskiĭ, o de la divergència*

Siguin $U \subset \mathbf{R}^3$ un conjunt obert, $\mathbf{f} \colon U \to \mathbf{R}^3$ un camp vectorial de classe $\mathrm{C}^1$. Sigui $V \subset U$ un conjunt obert (amb l'orientació natural de $\mathbf{R}^3$) tal que $\overline{V} \subset U$. Llavors

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{f}\, \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\,,$$

on $\partial V$ és la vora de $V$ amb l'orientació induïda («amb la normal cap a fora»).

**(8.2.3)** Aquests teoremes tenen una semblança amb el «teorema fonamental del càlcul»,

$$\int_C \operatorname{grad} f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{\partial C} \mathrm{d}f\,,$$

interpretant la darrera expressió com a $f(p_1) - f(p_0)$ si $\partial C = \{p_0, p_1\}$, «orientada» de $p_0$ a $p_1$.

**(8.2.4)** Aquests teoremes requereixen unes hipòtesis que seran enunciades amb precisió més endavant.

## 8.3 Potencials

**(8.3.1)** *Potencial escalar*

Sigui $\mathbf{F}\colon U \to \mathbf{R}^3$ un camp vectorial $C^1$ definit en un conjunt obert $U \subset \mathbf{R}^3$. Es diu que $\mathbf{F}$ és un camp conservatiu quan existeix un camp escalar $f\colon U \to \mathbf{R}$ tal que $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$. Es diu llavors que $f$ és un potencial escalar per a $\mathbf{F}$.

**(8.3.2)** Considerem, per a $\mathbf{F}$, les propietats següents:

i) $\mathbf{F}$ té un potencial escalar ($\mathbf{F}$ és conservatiu).
ii) Donats $p_0, p_1 \in U$ i una corba orientada $C \subset U$ tals que $\partial C = \{p_0, p_1\}$, la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ només depèn de $p_0, p_1$.
iii) Per a tota corba «tancada» $C \subset U$, $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$.
iv) $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ ($\mathbf{F}$ és irrotacional).

Les tres primeres afirmacions són equivalents. A més, impliquen la quarta. En canvi, el recíproc d'aquesta afirmació (que irrotacional impliqui l'existència de potencial escalar) no és cert en general, depèn de la topologia de $U$, i és cert en algunes circumstàncies.

**(8.3.3)** Un subconjunt $A \subset \mathbf{R}^n$ és diu estrellat respecte a un punt $p$ si, per a tot $q \in A$, $[p, q] \subset A$.

$\mathbf{R}^n$, les boles i els rectangles de $\mathbf{R}^n$, i $\mathbf{R}^2-$semirecta, són conjunts estrellats.

**(8.3.4)** *Lema de Poincaré*

Si $U \subset \mathbf{R}^3$ és un conjunt obert estrellat i $\mathbf{F}\colon U \to \mathbf{R}^3$ és un camp vectorial $C^1$ amb $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$, llavors $\mathbf{F}$ té potencial escalar.

**(8.3.5)** Sigui $A \subset \mathbf{R}^n$ un subconjunt arc-connex.

Siguin $p, q \in A$ dos punts fixats, i siguin $\gamma_0, \gamma_1\colon [0,1] \to A$ dos camins amb origen $p$ i extrem $q$. Es diu que $\gamma_0, \gamma_1$ són homotops si existeix una aplicació contínua $\Gamma\colon [0,1] \times [0,1] \to A$ amb la propietat següent: escrivint $\Gamma_s(t) = \Gamma(s,t)$, llavors $\Gamma_0 = \gamma_0$, $\Gamma_1 = \gamma_1$, i els $\Gamma_s$ $(0 \le s \le 1)$ són camins amb origen $p$ i extrem $q$. Es diu que $\Gamma$ és una homotopia de camins entre $\gamma_0$ i $\gamma_1$.

Un camí $\gamma\colon [t_0, t_1] \to A$ es diu camí tancat si l'origen i el final són el mateix punt.

Es diu que $A$ és simplement connex si és arc-connex i tot camí tancat és homotop al camí constant. Equival a dir que dos camins qualssevol amb mateixos origen i extrem són homotops.

**(8.3.6)** Exemples de conjunts simplement connexos: $\mathbf{R}^n$, les boles i els rectangles de $\mathbf{R}^n$, els conjunts estrellats, $\mathbf{R}^2-$semirecta, $\mathbf{R}^3-\{p_1, \dots, p_N\}$, l'esfera $\mathbf{S}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

No són simplement connexos: $\mathbf{R}^2$ − punt, $\mathbf{R}^3$ − recta, $\mathbf{R}^3$ − circumferència, la circumferència $\mathbf{S}_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$.

**(8.3.7)** Si $U \subset \mathbf{R}^3$ és un conjunt obert simplement connex i $\mathbf{F}\colon U \to \mathbf{R}^3$ és un camp vectorial $C^1$ amb $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$, llavors $\mathbf{F}$ té potencial escalar.

**(8.3.8)** Si $f$ és un potencial escalar, també ho és $f + C$ per a qualsevol constant $C$, ja que $\operatorname{grad}(f + C) = \operatorname{grad} f$.

El càlcul del potencial escalar es pot fer integrant l'equació $\operatorname{grad} f = \mathbf{F}$.

**(8.3.9)** *Potencial vectorial*

Sigui $\mathbf{G}\colon U \to \mathbf{R}^3$ un camp vectorial $C^1$ definit en un conjunt obert $U \subset \mathbf{R}^3$. En cas d'existir un camp vectorial $\mathbf{F}\colon U \to \mathbf{R}^3$ tal que $\mathbf{G} = \operatorname{rot} \mathbf{F}$, es diu que $\mathbf{F}$ és un potencial vectorial per a $\mathbf{G}$. Llavors es diu, a vegades, que $\mathbf{G}$ és *solenoïdal*.

**(8.3.10)** Considerem, per a $\mathbf{G}$, les propietats següents:

i) $\mathbf{G}$ té un potencial vectorial.
ii) Donada una corba orientada $C \subset U$ i una superfície orientada $S \subset U$ tal que $\partial S = C$, la integral $\int_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}$ no depèn de $S$, només de $C$.
iii) Per a tota superfície «tancada» $S \subset U$, $\oint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = 0$.
iv) $\operatorname{div} \mathbf{G} = 0$ ($\mathbf{G}$ és sense divergència).

La primera implica la segona i la tercera, que són equivalents. Al seu torn, aquestes impliquen la quarta. En canvi, que «sense divergència» impliqui l'existència de potencial vectorial no és cert en general, depèn de la topologia de $U$, i és cert en algunes circumstàncies.

**(8.3.11)** *Lema de Poincaré*

Si $U \subset \mathbf{R}^3$ és un conjunt obert estrellat i $\mathbf{G}\colon U \to \mathbf{R}^3$ és un camp vectorial $C^1$ amb $\operatorname{div} \mathbf{G} = 0$, llavors $\mathbf{G}$ té potencial vectorial.

**(8.3.12)** De manera anàloga al cas de potencial escalar, hi ha condicions més generals que asseguren l'existència de potencial vectorial per a camps sense divergència.

En canvi, si $U = \mathbf{R}^3 - \text{punt}$, un camp vectorial en $U$ amb divergència nul·la pot no tenir potencial vectorial.

**(8.3.13)** Si $\mathbf{F}$ és un potencial vectorial de $\mathbf{G}$, també ho és $\mathbf{F} + \operatorname{grad} f$ per a qualsevol camp escalar $f$, ja que $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \operatorname{grad} f) = \operatorname{rot} \mathbf{F}$.

El càlcul del potencial vectorial es pot fer integrant l'equació $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{G}$. Per exemple, en $\mathbf{R}^3$, sigui $\mathbf{G} = (P, Q, R)$ tal que $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z = 0$. Busquem-ne un potencial $\mathbf{F} = (L, M, N)$. La primera simplificació que es pot fer és suposar que $N = 0$. Tot seguit s'integren $\partial_z M = -P$, que dóna $M = -\int P \mathrm{d}z + g(x, y)$, i $\partial_z L = Q$, que dóna $L = \int Q \mathrm{d}z + h(x, y)$; podem suposar que $h = 0$. Finalment, l'equació $\partial_x M - \partial_y L = R$, amb les funcions $L, M$ anteriors, permet integrar $g = \int (\ldots) \mathrm{d}x + k(y)$; aquí també es pot suposar que $k = 0$. D'aquesta manera s'arriba a un potencial $\mathbf{F}$ per a $\mathbf{G}$.

## 8.4 Camps en $\mathbf{R}^2$: teorema de Green i potencials

**(8.4.1)** Sigui $U \subset \mathbf{R}^2$ un conjunt obert. Es pot definir el gradient d'un camp escalar i la divergència d'un camp vectorial en $U$: en coordenades *cartesianes*,

$$\operatorname{grad} f = \nabla f := \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

Considerant $\mathbf{F}$ com a camp vectorial en $\mathbf{R}^3$, podem calcular-ne el rotacional:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y \end{pmatrix}.$$

**(8.4.2)** *Teorema de Green*

Siguin $U \subset \mathbf{R}^2$ un conjunt obert, $\mathbf{F}\colon U \to \mathbf{R}^2$ un camp vectorial de classe $\mathrm{C}^1$. Sigui $M \subset U$ un conjunt obert tal que $\overline{M} \subset U$. Llavors

$$\int_M \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{\partial M} F_1 \mathrm{d}x + F_2 \mathrm{d}y,$$

on $\partial M$ és la vora de $M$ amb l'orientació induïda («la part de dintre, a l'esquerra»).

**(8.4.3)** El teorema de Green es pot considerar com a cas particular del teorema de Kelvin–Stokes, considerant $\mathbf{F}$ com a camp vectorial en $\mathbf{R}^3$ i $M$ com a superfície dins $\mathbf{R}^3$.

**(8.4.4)** Prenent per exemple $\mathbf{F} = \frac{1}{2}\binom{-y}{x}$, el teorema de Green permet calcular l'àrea d'un conjunt obert $M \subset \mathbf{R}^2$:

$$\int_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_{\partial M} (-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y).$$

**(8.4.5)** Sigui $\mathbf{F}\colon U \to \mathbf{R}^2$ un camp vectorial $\mathrm{C}^1$ definit en un conjunt obert $U \subset \mathbf{R}^2$. Recordem que $\mathbf{F}$ és conservatiu quan existeix un camp escalar $f\colon U \to \mathbf{R}$, el potencial escalar, tal que $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$. En tal cas la circulació de $\mathbf{F}$ al llarg d'una corba tancada és zero. Si $\mathbf{F}$ és conservatiu, necessàriament es compleix $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$.

**(8.4.6)** Recíprocament, suposem que $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$.

Si $U$ és simplement connex, aquesta condició d'igualtat de derivades parcials és suficient per a garantir l'existència de potencial escalar per a $\mathbf{F}$.

Si $U$ no és simplement connex això pot ser fals, i la circulació al llarg d'una corba tancada pot no ser zero; tanmateix, si dues corbes tancades es poden deformar contínuament una en l'altra, llavors les respectives circulacions de $\mathbf{F}$ són iguals.

**(8.4.7)** *Equacions diferencials exactes*

Una equació diferencial $f(x, y)\,\mathrm{d}x + g(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ es diu exacta si existeix $\varphi(x, y)$ tal que $f = \partial\varphi/\partial x$, $g = \partial\varphi/\partial y$. En un conjunt obert simplement connex això equival a afirmar que $\partial f/\partial y = \partial g/\partial x$. En tal cas la solució general de l'equació és $\varphi(x, y) = C$.

Encara que l'equació no sigui exacta, a vegades es pot obtenir una funció $\mu(x, y)$, anomenada factor integrant, tal que l'equació $\mu\, f\, \mathrm{d}x + \mu\, g\, \mathrm{d}y = 0$ (equivalent a l'original) sigui exacta. L'obtenció d'aquest factor pot ajudar a integrar l'equació.

**(8.4.8)** *Teorema de la divergència en el pla*

Siguin $U \subset \mathbf{R}^2$ un conjunt obert, $\mathbf{F}\colon U \to \mathbf{R}^2$ un camp vectorial de classe $\mathrm{C}^1$. Sigui $M \subset U$ un conjunt obert tal que $\overline{M} \subset U$. Llavors

$$\int_M \operatorname{div} \mathbf{F}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial M} F_n\, \mathrm{d}\ell,$$

on $F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ és el component normal de $\mathbf{F}$ al llarg de la vora $\partial M$ de $M$ orientada amb l'orientació induïda («vector normal cap a fora»).

(La integral $\int_{\partial M} F_n \, d\ell$ és el flux de $\mathbf{F}$ a través de $\partial M$.)

**(8.4.9)** S'anomena corba de Jordan a una «corba tancada simple», és a dir, la imatge $C$ d'un camí $\gamma\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ que és injectiu en $[a,b[$ i $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Si $C \subset \mathbf{R}^2$ és una corba de Jordan, llavors $\mathbf{R}^2 - C$ és la unió de dos conjunts oberts arc-connexos, amb frontera $C$, un dels quals és fitat i l'altre no (*teorema de la corba de Jordan*).

## 8.5 Complements: vora i condicions de validesa dels teoremes integrals

**(8.5.1)** Sigui $M \subset \mathbf{R}^3$ una superfície regular. Recordem que, per a cada $p \in M$, hi ha un difeomorfisme $\varphi\colon U \to V$, definit en un veïnat de $p$, tal que $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^2 \times 0)$.

Considerem l'adherència $\overline{M}$. Un punt $p \in \overline{M} - M$ es diu punt frontera regular si existeix un conjunt obert $U \subset \mathbf{R}^3$ contenint $p$, i un difeomorfisme $\varphi\colon U \to V$, tals que

$$\varphi(U \cap M) = V \cap \{(y^1, y^2, y^3) \in \mathbf{R}^3 \mid y^2 < 0, y^3 = 0\},$$
$$\varphi\left(U \cap (\overline{M} - M)\right) = V \cap \{(y^1, y^2, y^3) \in \mathbf{R}^3 \mid y^2 = y^3 = 0\}.$$

S'anomena vora de $M$ el conjunt

$$\partial M = \{\text{punts frontera regulars de } M\}.$$

Els punts de $\overline{M} - M$ que no són regulars es diuen punts frontera singulars.

**(8.5.2)** $\partial M$ és una corba regular.

Es diu que $M \cup \partial M$ és una superfície amb vora.

**(8.5.3)** Si $M$ és una superfície orientada, la vora $\partial M$ té una orientació canònica.

**(8.5.4)** Sigui $M \subset \mathbf{R}^3$ un conjunt obert.

Considerem l'adherència $\overline{M}$. Un punt $p \in \overline{M} - M = \mathrm{Fr}(M)$ es diu punt frontera regular si existeix un conjunt obert $U \subset \mathbf{R}^3$ contenint $p$, i un difeomorfisme $\varphi\colon U \to V$, tals que

$$\varphi(U \cap M) = V \cap \{(y^1, y^2, y^3) \in \mathbf{R}^3 \mid y^1 < 0\},$$
$$\varphi\left(U \cap (\overline{M} - M)\right) = V \cap \{(y^1, y^2, y^3) \in \mathbf{R}^3 \mid y^1 = 0\}.$$

S'anomena vora de $M$ el conjunt

$$\partial M = \{\text{punts frontera regulars de } M\}.$$

Els punts de $\overline{M} - M$ que no són regulars es diuen punts frontera singulars.

**(8.5.5)** $\partial M$ és una superfície regular.

Podríem dir que $M \cup \partial M$ és un «sòlid amb vora».

**(8.5.6)** Si $M$ és un conjunt obert de $\mathbf{R}^3$ amb la seva orientació natural, la vora $\partial M$ té una orientació canònica.

**(8.5.7)** Si $M \subset \mathbf{R}^2$ és un conjunt obert, es pot definir $\partial M$ de manera similar, així com la seva orientació.

**(8.5.8)** Si $C \subset \mathbf{R}^n$ és una corba regular, es pot definir de manera anàloga la seva vora $\partial C$, que estarà formada per punts aïllats.

Si la corba és orientada, els punts de $\partial C$ adquireixen un signe $(+, -)$.

**(8.5.9)** Hipòtesis que asseguren la validesa dels teoremes integrals de l'anàlisi vectorial:

- $U$ obert de $\mathbf{R}^n$ $(n = 2, 3)$, $\mathbf{f}\colon U \to \mathbf{R}^n$ un camp vectorial de classe $\mathrm{C}^1$
- $M$ superfície $(m = 2)$ regular orientada de classe $\mathrm{C}^2$ dins $\mathbf{R}^3$, o obert dins $\mathbf{R}^n$ $(m = n = 2, 3)$
- $\overline{M}$ és compacte i $\overline{M} \subset U$
- tots els punts de $\overline{M} - M$ són punts frontera regulars

**(8.5.10)** Les fórmules integrals encara són vàlides quan hi ha punts frontera singulars. Llavors calen hipòtesis addicionals:

- si $M$ és una superfície regular, cal que sigui $\mathrm{C}^3$
- $\partial M$ és contingut en la reunió d'un nombre finit de corbes (si $m = 2$) o superfícies (si $m = 3$)
- el conjunt de punts frontera singulars és «negligible», en el sentit que és un conjunt finit de punts (si $m = 2$) o que està contingut en la reunió d'un nombre finit de corbes regulars arc-connexes (si $m = 3$)

**(8.5.11)** Es poden donar exemples on no es compleixen les hipòtesis, i on les fórmules de Green, etc., no són vàlides.

## 8.6 Els operadors diferencials en altres sistemes de coordenades

**(8.6.1)** Considerem $\mathbf{R}^3$ amb les coordenades cartesianes $(x^1, x^2, x^3)$, i un altre sistema de coordenades $(y^1, y^2, y^3)$. Sigui $\varphi\colon V \to U \subset \mathbf{R}^3$ el difeomorfisme que representa el canvi de coordenades, $\varphi(y^1, y^2, y^3) = (x^1, x^2, x^3)$.

La derivació parcial de $\varphi$ respecte a cadascuna de les coordenades $y^j$ dóna tres vectors $\mathbf{v}_j = \mathrm{D}_j\varphi$, representats per les columnes de la matriu jacobiana $\mathrm{J}\varphi$.

En un punt $\mathbf{x}_\circ = \varphi(\mathbf{y}_\circ)$, aquests vectors formen una base $(\mathbf{v}_j)$ de l'espai tangent $\mathrm{T}_{\mathbf{x}_\circ}\mathbf{R}^3$, diferent de la base canònica $(\mathbf{e}_i)$. La matriu $\mathrm{J}\varphi(\mathbf{y}_\circ)$ és la matriu del canvi de base, que passa de $(\mathbf{e}_i)$ a $(\mathbf{v}_j)$.

**(8.6.2)** Si $f\colon W \to \mathbf{R}$ és un camp escalar, sigui $\bar{f} = f \circ \varphi$ la seva expressió en les noves coordenades.

Si $\mathbf{F}\colon W \to \mathbf{R}^3$ és un camp vectorial, $\mathbf{F} = F^1\mathbf{e}_1 + F^2\mathbf{e}_2 + F^3\mathbf{e}_3$, podem usar les noves coordenades i la nova base per a expressar-lo: $\mathbf{F} \circ \varphi = \bar{F}^1\mathbf{v}_1 + \bar{F}^2\mathbf{v}_2 + \bar{F}^3\mathbf{v}_3$. Les funcions $F^i$ i $\bar{F}^j$ també estan relacionades a través de la matriu $\mathrm{J}\varphi$.

**(8.6.3)** Es diu que el sistema de coordenades $(y^1, y^2, y^3)$ és ortogonal si la base $(\mathbf{v}_j)$ és ortogonal en cada punt. En tal cas, és més freqüent utilitzar la base ortonormal $(\mathbf{u}_j)$ obtinguda normalitzant els vectors $\mathbf{v}_j$: ambdues bases estan relacionades per $\mathbf{v}_j = h_j\mathbf{u}_j$, on les funcions $h_j > 0$ són uns factors d'escala. Suposarem també que la base $(\mathbf{u}_j)$ té l'orientació positiva; així, el jacobià de $\varphi$ és $h_1h_2h_3$.

A l'hora d'expressar el camp vectorial $\mathbf{F}\colon W \to \mathbf{R}^3$ en les noves coordenades, podem utilitzar aquesta base ortonormal: $\mathbf{F} \circ \varphi = \bar{F}^1\mathbf{u}_1 + \bar{F}^2\mathbf{u}_2 + \bar{F}^3\mathbf{u}_3$. Les noves funcions $\bar{F}^j$ estan relacionades amb les $F^i$ a través de la matriu $\mathrm{J}\varphi$ i les funcions $h_j$.

**(8.6.4)** Es poden obtenir fórmules que expressen els operadors diferencials grad, rot, div i $\nabla^2$, aplicats a camps escalars o vectorials segons el cas, en el nou sistema de coordenades.

$$\operatorname{grad} f \circ \varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \bar{f}}{\partial y^1}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \bar{f}}{\partial y^2}\mathbf{u}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \bar{f}}{\partial y^3}\mathbf{u}_3$$

$$\nabla^2 f \circ \varphi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial \bar{f}}{\partial y^1}\right) + \frac{\partial}{\partial y^2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial \bar{f}}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y^3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial \bar{f}}{\partial y^3}\right)\right)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{F} \circ \varphi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\left(h_2h_3\bar{F}^1\right) + \frac{\partial}{\partial y^2}\left(h_3h_1\bar{F}^2\right) + \frac{\partial}{\partial y^3}\left(h_1h_2\bar{F}^3\right)\right)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} \circ \varphi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{u}_1 & h_2\mathbf{u}_2 & h_3\mathbf{u}_3 \\ \partial/\partial y^1 & \partial/\partial y^2 & \partial/\partial y^3 \\ h_1\bar{F}^1 & h_2\bar{F}^2 & h_3\bar{F}^3 \end{vmatrix}$$

(en el desenvolupament d'aquest determinant, s'entén que les derivacions de la segona fila actuen sobre les funcions de la tercera).

**(8.6.5)** Per exemple, d'acord amb 3.6.6 i 3.7, en coordenades cilíndriques tenim

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_\rho & \mathbf{u}_\phi & \mathbf{u}_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_\rho = 1,\ h_\phi = \rho,\ h_z = 1\,,$$

i en esfèriques

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi \\ \sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad h_r = 1,\ h_\theta = r,\ h_\phi = r\sin\theta.$$

**(8.6.6)** Així, si $f\colon W \to \mathbf{R}$ és un camp escalar $\mathrm{C}^1$, llavors

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

en cilíndriques, o

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi$$

en esfèriques.

Semblantment, es pot obtenir

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

en cilíndriques, i

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

en esfèriques.

# Índex terminològic


adherència d'un conjunt (1.3.6)
aproximació lineal d'una funció en un punt (3.1.3)
àrea d'una superfície (7.3.5)
bola oberta (1.3.1)
bola perforada (1.3.2)
bola tancada (1.3.1)
camí (2.2.8)
camins homotops (8.3.5)
camí tancat (8.3.5)
camp conservatiu (7.2.9)
camp conservatiu (8.3.1)
camp irrotacional (8.1.3)
camp sense divergència (8.1.3)
camp vectorial (4.1.3)
camp vectorial gradient (4.2.2)
canvi de coordenades (3.6.4)
circulació al llarg d'una corba orientada (7.2.6)
circulació al llarg d'un camí (7.2.1)
coll (5.2.5)
component (1.1.3)
condició de tangència (3.1.1)
conjunt arc-connex (2.2.9)
conjunt compacte (1.4.13)
conjunt convex (2.2.14)
conjunt de mesura nul·la (6.2.1)
conjunt de nivell (1.1.6)
conjunt estrellat (8.3.3)
conjunt fitat (1.3.3)
conjunt mesurable Jordan (6.3.4)
conjunt obert (1.3.9)
conjunt simple (6.3.14)
conjunt simplement connex (8.3.5)
conjunt tancat (1.3.9)
coordenades cilíndriques (3.6.6)
coordenades esfèriques (3.6.7)
coordenades ortogonals (8.6.3)
coordenades polars (3.6.5)
corba de Jordan (8.4.9)
corba en forma explícita (4.5.4)
corba en forma implícita (4.5.5)
corba en forma paramètrica (4.5.6)
corba orientada (7.2.4)
corba parametritzada (4.5.6)
corba parametritzada regular (4.5.6)
corba regular (4.5.1)
derivada direccional (3.2.1)
derivada direccional d'ordre superior (5.1.1)
derivada d'una funció (3.1.2)
derivada parcial (3.2.5)
derivada parcial d'ordre superior (3.5.2)
derivada parcial segona (3.5.1)
desigualtat triangular (1.2.1)
determinant jacobià (3.2.7)
difeomorfisme (3.6.4)
diferencial d'una funció (3.1.2)
distància (1.2.6)
distància euclidiana (1.2.8)
divergència (8.1.1)
domini d'una funció (1.1.2)
equació diferencial exacta (8.4.7)
esfera en un espai mètric (1.3.2)
espai complet (1.4.9)
espai euclidià (1.1.1)
espai mètric (1.2.6)
espai normat (1.2.1)
espai tangent a una corba en un punt (4.6.1)
espai tangent a una superfície en un punt (4.4.1)
expressió integral del residu de Taylor (5.1.5)
exterior d'un conjunt (1.3.6)
extrem local (5.2.2)
extrem local condicionat (5.3.1)
factor integrant (8.4.7)
flux d'un camp vectorial a través d'una superfície orientada (7.4.8)
flux d'un camp vectorial a través d'una superfície parametritzada (7.4.1)
fórmula de Taylor (5.1.4)
frontera d'un conjunt (1.3.6)
funció característica (6.3.2)
funció contínua (2.1.2)
funció contínua en un punt (2.1.1)
funció contínuament diferenciable (3.3.3)
funció de classe $C^1$ (3.3.3)
funció de classe $C^2$ (3.5.1)
funció de classe $C^\infty$ (3.5.3)
funció de classe $C^r$ (3.5.3)
funció derivada parcial (3.3.1)
funció diferenciable (3.1.4)
funció diferenciable en un punt (3.1.1)
funció diferenciable en un punt (3.1.1)
funció escalar (1.1.2)
funció fitada (1.3.3)
funció harmònica (8.1.7)
funció implícita (3.7.2)
funció indicatriu (6.3.2)
funció integrable Riemann en un conjunt mesurable Jordan (6.3.7)
funció integrable Riemann en un rectangle (6.1.8)
funció lipschitziana (2.2.6)
funció real de diverses variables (1.1.2)
funció uniformement contínua (2.2.3)
funció vectorial (1.1.3)
gradient (8.1.1)
gradient d'una funció en un punt (4.2.1)
graf d'una funció (1.1.5)
homotopia de camins (8.3.5)
imatge d'una funció (1.1.4)
integral de línia d'una funció al llarg d'una corba (7.1.8)
integral de línia d'una funció al llarg d'una corba parametritzada (7.1.6)
integral de línia d'un camp vectorial al llarg d'una corba orientada (7.2.6)
integral de línia d'un camp vectorial al llarg d'un camí (7.2.1)
integral de Riemann d'una funció en un conjunt mesurable Jordan (6.3.7)
integral de Riemann d'una funció en un rectangle (6.1.8)
integral de Riemann impròpia (6.7.2)

integral de superfície d'una funció al llarg d'una superfície (7.3.4)
integral de superfície d'una funció al llarg d'una superfície parametritzada (7.3.1)
integral de superfície d'un camp vectorial a través d'una superfície orientada (7.4.8)
integral de superfície d'un camp vectorial a través d'una superfície parametritzada (7.4.1)
integral impròpia convergent (6.7.2)
integral impròpia divergent (6.7.3)
integral inferior (6.1.7)
integral superior (6.1.7)
interior d'un conjunt (1.3.6)
jacobià (3.2.7)
laplacià (8.1.6)
lema de Poincaré per a camps irrotacionals (8.3.4)
lema de Poincaré per a camps sense divergència (8.3.11)
límit direccional (2.4.1)
límit d'una funció (2.3.1)
límit d'una successió (1.4.2)
límit segons un camí (2.4.4)
longitud d'una corba (7.1.5)
longitud d'una corba parametritzada (7.1.1)
matriu hessiana (5.2.6)
matriu jacobiana (3.2.7)
màxim local (5.2.2)
màxim local condicionat (5.3.1)
mesura d'un rectangle (6.1.1)
mètode dels multiplicadors de Lagrange (5.3.5)
mínim local (5.2.2)
mínim local condicionat (5.3.1)
multiplicador de Lagrange (5.3.5)
nabla (8.1.1)
norma (1.2.1)
norma del suprem (1.2.3)
norma del taxi (1.2.3)
norma euclidiana de $\mathbf{R}^n$ (1.2.3)
partició d'un rectangle (6.1.2)
partició més fina (6.1.3)
pla tangent (4.4.3)
polinomi de Taylor (5.1.3)
potencial escalar (8.3.1)
potencial vectorial (8.3.9)
producte escalar estàndard de $\mathbf{R}^n$ (1.2.3)
producte vectorial fonamental (4.4.9)
punt adherent (1.3.5)
punt aïllat (o isolat) (1.3.5)
punt crític d'una funció (5.2.3)
punt crític d'una funció restringida a una varietat (5.3.3)
punt crític no-degenerat (5.2.11)
punt d'acumulació (1.3.5)
punt de sella (5.2.5)
punt exterior (1.3.5)
punt frontera (1.3.5)
punt frontera regular (8.5.1)
punt frontera regular (8.5.4)
punt frontera singular (8.5.1)
punt frontera singular (8.5.4)
punt interior (1.3.5)
recorregut d'una funció (1.1.4)
recta tangent a una corba (4.6.1)
regió elemental (6.3.14)
regla de la cadena (3.4.4)
regla de Leibniz per a integrals dependents de paràmetres (6.6.1)
residu de Taylor (5.1.4)
rotacional (8.1.1)
segment (2.2.13)
sòlid amb vora (8.5.5)
subvarietat regular de $\mathbf{R}^n$ (4.7.1)
successió convergent (1.4.3)
successió de Cauchy (1.4.7)
successió parcial (1.4.12)
suma de Riemann (6.1.14)
suma inferior (6.1.4)
suma superior (6.1.4)
superfície amb vora (8.5.2)
superfície en forma explícita (4.3.4)
superfície en forma implícita (4.3.5)
superfície en forma paramètrica (4.3.6)
superfície orientable (7.4.6)
superfície orientada (7.4.6)
superfície parametritzada (4.3.6)
superfície parametritzada regular (4.3.6)
superfície regular (4.3.1)
teorema de Borel–Lebesgue (1.4.14)
teorema de Fubini (6.4.1)
teorema de Gauss–Ostrogradskiĭ (8.2.2)
teorema de Green (8.4.2)
teorema de Heine (2.2.5)
teorema de Kelvin–Stokes (8.2.1)
teorema de la divergència (8.2.2)
teorema de la divergència en el pla (8.4.8)
teorema de la funció implícita (3.7.1)
teorema de la funció inversa (3.6.1)
teorema del canvi de variables (6.5.1)
teorema de Lebesgue (6.3.1)
teorema del rotacional (8.2.1)
teorema del valor intermedi (2.2.12)
teorema del valor mitjà (3.4.8)
teorema de Morse (5.2.12)
teorema de Schwarz (3.5.5)
teorema de Stokes (8.2.1)
teorema de Taylor (5.1.4)
teorema de Weierstrass (2.2.2)
transformació diferenciable (3.6.4)
valor mitjà d'una funció (6.3.12)
varietat $m$-dimensional (4.7.1)
vector tangent (4.1.1)
vector tangent a una corba (4.6.1)
vector tangent a una superfície (4.4.1)
vector tangent d'un camí (4.1.4)
velocitat d'un camí (4.1.4)
veïnat d'un punt (1.3.8)
volum d'un conjunt mesurable Jordan (6.3.9)
volum d'un rectangle (6.1.1)
vora d'una superfície (8.5.1)
vora d'un sòlid (8.5.4)