Anàlisi vectorial

Programació i bibliografia
Problemes

Enginyeria de Telecomunicació

Departament de Matemàtica Aplicada IV

edició: setembre del 2002

(revisió: setembre 2003)

Sumari

Programació

1. Topologia de $\mathbf{R}^n$ *(3 h)*

- Norma, distància i boles.
- Conjunts oberts i tancats; interior, frontera, adherència.
- Sucessions de punts de $\mathbf{R}^n$.
- Conjunts compactes.

2. Límits i continuïtat *(3 h)*

- Funcions de diverses variables. Funciones escalars i vectorials.
- Límit d'una funció en un punt.
- Límits direccionals. Límits infinits.
- Funcions contínues.
- Propietats de les funcions contínues respecte als conjunts compactes.
- Conjunts arc-connexos.

3. Derivació *(7 h)*

- Derivades parcials, derivades direccionals.
- Diferencial d'una funció en un punt. Matriu jacobiana. Aproximació lineal d'una funció.
- Condicions suficients de diferenciabilitat.
- Propietats de les funcions diferenciables. Regla de la cadena.
- Derivades parcials d'ordre superior.
- Teorema de Schwarz.
- Teorema de la funció inversa. Canvis de coordenades.
- Teorema de la funció implícita.

4. Aplicacions geomètriques de la derivació *(5 h)*

- Vector tangent d'un camí.
- Gradient d'una funció escalar.
- Corbes. Descripcions paramètrica i implícita.
- Recta tangent a una corba.
- Superfícies. Descripcions paramètrica i implícita.
- Pla tangent a una superfície.

5. Estudi local de funcions *(5 h)*

- Fórmula de Taylor. Expressió del residu.
- Extrems locals de funcions, punts crítics.
- Matriu hessiana. Condició suficient d'extrem.
- Extrems condicionats locals. Multiplicadors de Lagrange.
- Extrems absoluts d'una funció sobre un conjunt compacte.

6. Integració *(5 h)*

- Integral de Riemann de funcions definides sobre un rectangle.
- Conjunts de mesura nul·la.
- Integral de Riemann de funcions definides sobre conjunts mesurables Jordan.
- Teorema de Fubini.

- Teorema del canvi de variables.
- Funcions definides per integrals. Teorema de Leibniz.
- Integrals impròpies.

7. Integrals de línia i de superfície *(5 h)*

- Integral de línia d'una funció escalar. Llargada d'una corba.
- Orientació d'una corba. Integral de línia d'un camp vectorial.
- Camps conservatius. Potencials escalars.
- Integral de superfície d'una funció escalar. Àrea d'una superfície.
- Orientació d'una superfície. Integral de superfície d'un camp vectorial.

8. Teoremes integrals de l'anàlisi vectorial *(6 h)*

- Gradient, rotacional, divergència i laplacià. Relacions entre aquests operadors.
- Teorema de Green.
- Camps conservatius en el pla. Equacions diferencials exactes.
- Teorema de Stokes.
- Camps conservatius i potencial escalar.
- Conjunts simplement connexos. Lema de Poincaré.
- Teorema de la divergència de Gauss-Ostrogadskiĭ.
- Camps solenoïdals i potencial vectorial.

Bibliografia

Publicacions de l'assignatura

- *Anàlisi vectorial. Programació i bibliografia. Problemes.*
- *Anàlisi vectorial. Pràctiques amb Maple.*

Llibres de teoria

- J. de Burgos, *Cálculo infinitesimal de varias variables*, McGraw–Hill, Madrid, 1995.
- J. E. Marsden, A. J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, 4a ed., Addison–Wesley, Mexico, 1998.

Llibres de problemes

- K. Pao, F. Soon, *Cálculo vectorial: problemas resueltos*, Addison–Wesley, Barcelona 1993.
- M. R. Spiegel, *Cálculo superior*, McGraw–Hill, Madrid, 1991.

Formularis i taules

- M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, Dover, New York, 1965.
- I. Bronshtein, K. Semendiaev, *Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes*, Mir, Moscou, 1982.
- M. R. Spiegel, J. Liu, L. Abellanas, *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*, 2a ed., McGraw–Hill, Madrid, 2000.

Altres referències recomanades

- T. M. Apostol, *Calculus*, vols. I i II, Reverté, Barcelona, 1985.
- T. M. Apostol, *Análisis matemático*, 2a ed., Reverté, Barcelona, 1979.
- R. G. Bartle, *Introducción al análisis matemático*, Limusa, México, 1980.
- F. Bombal, L. Rodríguez, L. Vera, *Problemas de análisis matemático. Tomo 1: cálculo diferencial*, AC, Madrid, 1975.
- F. Granero, *Ejercicios y problemas de cálculo*, vols. I i II, Tebar–Flores, Madrid, 1991.
- J. E. Marsden, M. J. Hoffman, *Análisis clásico elemental*, 2a ed., Addison–Wesley, Wilmington, 1998.
- J. E. Marsden, A. Weinstein, *Calculus III*, Springer–Verlag, New York, 1985.
- S. Lang, *Cálculo*, Fondo Educativo Interamericano, Barcelona, 1973.
- J. M. Mazón Ruiz, *Cálculo diferencial, teoría y problemas*, McGraw–Hill, Aravaca, 1997.
- J. M. Ortega Aramburu, *Introducció a l'anàlisi matemàtica*, Publicacions de la UAB, Bellaterra, 1990.
- P. Pascual *et al*, *Càlcul integral per a enginyers*, Edicions UPC, Barcelona, 2002.
- P. Puig Adam, *Cálculo integral*, Gómez Puig, Madrid, 1979.
- M. Spivak, *Cálculo en variedades*, Reverté, Barcelona, 1970.
- W. R. Wade, *An introduction to analysis*, Prentice–Hall, 1995.

1 Topologia de $\mathbf{R}^n$

Problemes bàsics

1. Determineu el domini d'existència i el recorregut (imatge) de les funcions següents:
   (a) $f(x,y) = (\cos(x^2+y^2))^{1/2}$.
   (b) $f(x,y) = \ln(y-x)$.
   (c) $f(x,y) = \arcsin(x/y)$.
   (d) $f(x,y) = 1-|x|-|y|$.
   (e) $f(x,y) = \sqrt{\cos(2\pi x)-1}$.
   (f) $f(t) = \left(\cos\frac{1}{t}, \sin\frac{1}{t}\right)$.
2. Descriviu les corbes de nivell de les funcions següents:
   (a) $f(x,y) = x+5y-7$.
   (b) $f(x,y) = 3x^2+2y^2$.
   (c) $f(x,y) = xy$.
   (d) $f(x,y) = (xy)^{1/2}$.
   (e) $f(x,y) = y/x^{1/2}$
   (f) $f(x,y) = 1-|x|-|y|$.
3. Descriviu les superfícies de nivell de les funcions següents:
   (a) $f(x,y,z) = x+2y+3z$.
   (b) $f(x,y,z) = -x^2-y^2-z^2$.
   (c) $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$.
   (d) $f(x,y,z) = y^2+z^2$.
   (e) $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$.
   (f) $f(x,y,z) = z/(x^2+y^2)$.
   (g) $f(x,y,z) = 1-|x|-|y|-|z|$.
4. Justifiqueu que els subconjunts del pla següents són oberts:
   (a) $A = \{(x,y) \mid -1<x<1,\ -1<y<1\}$.
   (b) $B = \{(x,y) \mid y<10\}$.
   (c) $C = \{(x,y) \mid x \neq 0,\ y \neq 0\}$.
   (d) $D = \{(x,y) \mid 2<x^2+y^2<4\}$.
5. Obteniu l'interior, l'adherència, l'exterior, la frontera i el conjunt de punts d'acumulació dels conjunts següents:
   (a) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y=2x\}$.
   (b) $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1<x<1, 0<y<x^2\}$.
   (c) $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq 0, x+y=n \text{ on } n \in \mathbf{Z}\}$.
   (d) $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0<x,y<1, x \in \mathbf{Q}\}$.
   (e) $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2<1\}$.
   (f) $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 \geq x^2+y^2\}$.
6. Dels conjunts (dominis i recorreguts) obtinguts en el problema 1, digueu si són oberts, tancats, fitats o compactes.
7. Trobeu el límit (si existeix) de les successions de punts següents:
   (a) $\big((n^2+1)^{1/n},\ (\sin n)/n\big)$.
   (b) $\Big((n!)^{1/n^2},\ e^{-n}/n^2,\ n/n!\Big)$.
   (c) $\left(\dfrac{1}{\log n}, \dfrac{n^{\log n}}{\sqrt{n}}\right)$.

Problemes addicionals

8. Descriviu precisament les corbes de nivell de la funció $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

9. Donada la funció $f(x,y) = x^2 - y^2$, representeu gràficament les funcions següents: $f(x,0)$, $f(x,1)$, $f(x,x)$, $f(x,x^2)$, i relacioneu aquestes gràfiques amb la de f.

10. Siguin A i B dos subconjunts de $\mathbf{R}^n$. Si A és obert, proveu que $A+B = \{z \mid z = x+y,\ x \in A,\ y \in B\}$ és obert.

11. Doneu un exemple d'una funció tal que el seu domini tingui un punt aïllat.

12. Considereu els conjunts $A_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid nx^2y < 1\}$, amb $n \in \mathbf{N}^*$.
    (a) Justifiqueu que cada A_n és obert.
    (b) Calculeu la intersecció de tots els A_n i justifiqueu que no és un conjunt obert.
    (c) Per què això no contradiu el fet que la intersecció de dos oberts és un obert?

13. De manera semblant, trobeu una col·lecció infinita de conjunts tancats del pla tals que la seva unió no sigui tancada.

14. Considereu les aplicacions $p_i \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ següents:

$$p_1(x,y) = |x| + |y| \qquad p_2(x,y) = (|x|^2 + |y|^2)^{1/2} \qquad p_\infty(x,y) = \max(|x|,|y|)$$

    (a) p_2 és la norma euclidiana. Demostreu que també són normes p_1 i p_∞. S'anomenen la norma-1 i la norma del suprem, respectivament. Normalment p_i es representa per $\|\cdot\|_i$.
    (b) Dibuixeu les boles unitat $B_i = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \|(x,y)\|_i < 1\}$ per a cada una de les tres normes.
    (c) Demostreu que $\|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_1$, i que $\|(x,y)\|_1 \leq \sqrt{2}\,\|(x,y)\|_2$, $\|(x,y)\|_2 \leq \sqrt{2}\,\|(x,y)\|_\infty$. Relacioneu aquestes desigualtats amb els dibuixos anteriors.
    (d) Proveu que $p_{1/2}(x,y) = (|x|^{1/2} + |y|^{1/2})^2$ *no* és una norma.
    (Podeu comprovar que no se satisfà la desigualtat triangular amb els punts $(1/2,0)$ i $(0,1/2)$.)
    Dibuixeu també la "bola" unitat $B_{1/2}$.

15. (a) Generalitzeu les definicions de les tres normes del problema anterior a $\mathbf{R}^n$, i proveu que se satisfan desigualtats similars:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2, \qquad \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty.$$

    (b) En general, dues normes p i q en un espai vectorial es diuen *equivalents* si existeixen nombres estrictament positius M, N tals que, per a tot $\mathbf{x}$, $p(\mathbf{x}) \leq Mq(\mathbf{x})$ i $q(\mathbf{x}) \leq Np(\mathbf{x})$. Proveu que llavors els conceptes de successió convergent i de conjunt obert (i, de fet, molts d'altres) són els mateixos per a les dues normes.

Respostes

1. Dominis:
    (a) $\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x^2+y^2 \leq \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \left(\frac{4k-1}{2}\right)\pi \leq x^2+y^2 \leq \left(\frac{4k+1}{2}\right)\pi, \text{ on } k \in \mathbf{N}^*\right\}$
    (b) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > x\}$
    (c) $\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \neq 0,\ -1 \leq \dfrac{x}{y} \leq 1\right\}$
    (d) $\mathbf{R}^2$.
    (e) $\mathbf{Z} \times \mathbf{R}$ (rectes verticals amb abscissa entera).
    (f) $\mathbf{R} - \{0\}$.

    Imatges:

    (a) $[0,1]$.

(b) $\mathbf{R}$.
(c) $[-\pi/2, \pi/2]$.
(d) $]-\infty, 1]$.
(e) $\{0\}$.
(f) La circumferència $x^2 + y^2 = 1$.

2. (a) $k = x + 5y - 7$, on $k \in \mathbf{R}$ (rectes).
(b) $k = 3x^2 + 2y^2$, on $k \geq 0$ (el·lipses; si $k = 0$ és un un punt).
(c) $k = xy$, on $k \in \mathbf{R}$ (hipèrboles; si $k = 0$ és un parell de rectes).
(d) $k = (xy)^{1/2}$, on $k \geq 0$ (hipèrboles; si $k = 0$ és n parell de rectes).
(e) $k = y/x^{1/2}$, on $k \in \mathbf{R}$ (mitges paràboles; si $k = 0$ és la semirecta $y = 0$, $x > 0$).
(f) $k = 1- \mid x \mid - \mid y \mid$, on $k \leq 1$ (quadrats centrats a l'origen; si $k = 1$ és un punt).

3. (a) $k = x + 2y + 3z$, on $k \in \mathbf{R}$ (plans).
(b) $k = -x^2 - y^2 - z^2$, on $k \leq 0$ (esferes; si $k = 0$ és un punt).
(c) $k = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, on $k \geq 0$ (el·lipsoides; si $k = 0$ és un punt).
(d) $k = y^2 + z^2$, on $k \geq 0$ (cilindres; si $k = 0$ és la recta $y = z = 0$).
(e) $k = x^2 + y^2 - z^2$, on $k \in \mathbf{R}$ (si $k > 0$ hiperboloide d'un full, si $k = 0$ con, si $k < 0$ hiperboloide de dos fulls).
(f) $z = k(x^2 + y^2)$ (paraboloides si $k \neq 0$, pla si $k = 0$; en ambdós casos, sense el $(0, 0, 0)$).
(g) $k = 1 - |x| - |y| - |z|$, on $k \leq 1$ (octàedres centrats a l'origen; si $k = 1$ és un punt).

5. En tots els casos, excepte el (c), tots els punts adherents són d'acumulació.
(a) $\text{Int}A = \emptyset$; $\bar{A} = A$; $\text{Fr}A = A$.
(b) $\text{Int}B = B$; $\bar{B} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$.
(c) $\text{Int}C = \emptyset$; $\bar{C} = \text{Fr}C = C$. El punt $(0, 0)$ és aïllat.
(d) $\text{Int}D = \emptyset$; $\bar{D} = \text{Fr}D = [0, 1] \times [0, 1]$.
(e) $\text{Int}E = E$; $\bar{E} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$; $\text{Fr}E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
(f) $\text{Int}F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 > x^2 + y^2\}$; $\bar{F} = F$; $\text{Fr}F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2\}$;

7. (a) $\left(\sqrt[n]{n^2 + 1},\ (\sin n)/n\right) \to (1, 0)$.
(b) $\left((n!)^{1/n^2},\ e^{-n}/n^2,\ n/n!\right) \to (1, 0, 0)$.
(c) La successió no és convergent (la segona component no convergeix).

8. Si r_m indica la recta de pendent m que passa per l'origen, de la qual excloem l'origen, la corba de nivell k (on $|k| \leq 1$, $k \neq 0$) és $r_m \cup r_{1/m}$, amb $m = \text{tg}\left(\frac{1}{2} \arcsin k\right)$. La corba de nivell zero és els eixos coordenats, i les altres són buides.

11. Per exemple, $f(x) = \sqrt{x^2(x^2 - 1)}$. Fàcilment podeu obtenir una funció de dues variables amb la mateixa propietat.

12. (b) La intersecció és $\bigcap A_n = \{(x, y) \mid y \leq 0\} \cup \{(x, y) \mid x = 0\}$.
(c) Perquè en aquest cas tenim infinits oberts.

14. (b) B_1 és un quadrat amb vèrtexs els punts $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$ i $(-1, 0)$. B_2 és un cercle de radi 1. B_∞ és un quadrat amb vèrtexs els punts $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ i $(1, -1)$.

2 Límits i continuïtat

Problemes bàsics

1. Calculeu els límits següents:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2+3x+4y^2}{x+1}$

   (b) $\displaystyle\lim_{t\to 0}(\cosh t, \sinh t)$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{e^{x(y-1)-x-1}}{x^2+y^2}, \sin(x-y)\right)$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^4+y^2}$

   (f) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+z^5}{x^2+2y^2+4z^2}$

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\sin xy}{xy}$

   (h) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} e^{-1/(x^2+y^2+z^2)}$

2. Considereu la funció $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

   (a) Trobeu el límit de $f(x,y)$ en $(0,0)$ respecte a les rectes $y = mx$.

   (b) Què se'n dedueix respecte al límit $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

3. Sigui la funció $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

   (a) Trobeu el límit de $f(x,y)$ en $(0,0)$ respecte a les rectes $y = mx$ i respecte a les paràboles $y = \lambda x^2$.

   (b) Què se'n dedueix respecte a $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

4. Estudieu la continuïtat de les funcions següents:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^2y}{4x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

   (b) $g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ x^2y^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

   (c) $h(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y,z)=(0,0,0) \\ \sin r(x,y,z)/r(x,y,z) & \text{si } (x,y,z)\neq(0,0,0), \text{ essent } r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$

5. En quins punts existeix el límit de la funció $f(x,y) = y^2 \sin\dfrac{1}{xy}$?

6. Utilitzant funcions contínues apropiades, raoneu si són oberts els subconjunts de $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ següents:

   (a) $A = \{(x,y) \mid \cos(x+y) + \sin(x-y) < 1\}$.

   (b) $B = \{(x,y) \mid xy\ln(x-y) > 5\}$.

   (c) $C = \{(x,y,z) \mid 1 < x+y^2+z^3 < 3,\ xyz < 0\}$.

(d) $D = \left\{ (x, y, z) \mid \left| \dfrac{x+y+z}{x^3+y^3+z^3} \right| < 1 \right\}$.

(e) $E = \{(x, y) \mid \sqrt{x+y} < 1\}$.

7. Anàlogament, raoneu si són tancats els subconjunts de $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ següents:

(a) $A = \{(x, y) \mid 2x - 3y = 6,\ x^2 + y^3 \leq 10\}$.

(b) $B = \{(x, y) \mid 2x^2 + 3y^2 \in \mathbf{N}\}$.

(c) $C = \{(x, y) \mid \dfrac{1}{x^2+y^2} \in \mathbf{N}\}$.

(d) $D = \{(x, y, z) \mid x + 2y + 3z = 1,\ x^2y^2z \geq 7\}$.

8. Considereu $A \subset \mathbf{R}^3$, i $f\colon A \to \mathbf{R}$ contínua. En quins dels casos següents podem assegurar que f té un màxim? I que $f(A)$ és un interval?

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$.

(b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

(c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 - y^2 \geq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$.

(d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ z \geq 0\}$.

Problemes addicionals

9. Es considera la funció $f(x, y) = \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2 + xy}$, on $\alpha, \beta \geq 0$. Estudieu per a quins valors de α i β existeix el límit de $f(x, y)$ quan $(x, y) \to (0, 0)$.

10. Estudieu la continuïtat de la funció $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida per

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy = 0 \\ (x+y)\cos\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{y} & \text{altrament} \end{cases}$$

11. Estudieu els límits reiterats $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)$, i el límit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, per a les funcions definides en $\mathbf{R}^2$ següents:

(a) $f(x, y) = \dfrac{xy}{3x^2 + 2y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

(b) $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

(c) $f(x, y) = (x + y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ si $xy \neq 0$, $f(x, y) = 0$ en cas contrari.

12. Considerem l'espai vectorial $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ de les matrius 2×2 amb coeficients reals, que identifiquem amb $\mathbf{R}^4$: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longleftrightarrow (x, y, z, t)$.

(a) Proveu que les funcions traça $\mathrm{tr}\colon \mathbf{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ i determinant $\det\colon \mathbf{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ son contínues.

(b) Estudieu si són oberts o tancats dins $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ els conjunts de matrius següents:

i. Les matrius invertibles.

ii. Les matrius de determinant 1.

iii. Les matrius de traça nul·la.

(c) Generalitzeu les qüestions anteriors a les matrius $n \times n$, $\mathbf{M}_n(\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{n^2}$.

13. Siguin $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ contínua, i $A \subset \mathbf{R}^m$. Proveu que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(Podeu usar la caracterització de la continuïtat en termes de successions.)

14. Sigui $A \subset \mathbf{R}^n$ un subconjunt amb la propietat següent: tota funció contínua $f\colon A \to \mathbf{R}$ és fitada. Proveu que A és compacte.
(Si A no és compacte, llavors no és tancat o no és fitat; en ambdós casos podeu construir una funció contínua no fitada sobre A.)

15. Considereu les funcions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definides per $f(x) = 0$ per a tota x, i $g(0) = 1$, $g(y) = 0$ si $y \neq 0$. Comproveu que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$, però $\lim_{x\to 0}(g \circ f)(x) = 1 \neq 0$.

    Quina hipòtesi falla i no permet dir que el límit de $g \circ f$ és el límit de g?

Respostes

1. (a) 2.
   (b) $(1, 0)$.
   (c) No té límit.
   (d) 0.
   (e) 0.
   (f) 0.
   (g) 3.
   (h) 0.
2. (a) El límit segons la recta $y = mx$ és $m/(1 + m^2)$.
   (b) No existeix.
3. (a) El límit segons la recta $y = mx$ és 0.
   El límit segons la paràbola $y = \lambda x^2$ és $\lambda/(1 + \lambda^2)$.
   (b) No existeix.
4. Les tres són contínues arreu. Fora de l'origen no hi ha problema. A l'origen, f i g tenen límit 0, i h té límit 1. Per a f, tenim $|f(x, y)| = |y|\dfrac{x^2}{4x^2 + y^2} \leq |y|/4$. Per a g, $|g(x, y)| \leq (x^2 + y^2)(x^2 + y^2)| \ln(x^2 + y^2)|$, i $\lim_{z\to 0+} z \ln z = 0$. Amb h passa quelcom semblant.
5. Té límit en tots els punts del pla excepte en aquells de la forma $(0, a)$, $a \neq 0$.
6. Tots són oberts, llevat de E, que no és un obert de $\mathbf{R}^2$.
7. Els subconjunts A, B, D són tancats. El subconjunt C no és tancat dins $\mathbf{R}^2$.
8. Podem asegurar que hi ha màxim quan A és compacte (només el (b)), i que la imatge és un interval quan A és arc-connex (ho compleixen tots excepte el (c)).
9. $\alpha + \beta > 2$.
10. És contínua en tot punt de fora dels eixos, i en els punts $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}}, 0\right)$ i $\left(0, \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)$ $(k \in \mathbf{Z})$.
11. (a) Els límits reiterats valen 0, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ no existeix.
    (b) Els límits reiterats valen 0 i 1, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ no existeix.
    (c) Els límits reiterats no es poden calcular, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ val 0.
12. (a) Són funcions polinòmiques.
    (b) El primer és obert, els altres dos són tancats.

15. g no és contínua en 0.

3 Derivació

Problemes bàsics

1. Calculeu les derivades parcials i la matriu jacobiana de les funcions següents en un punt arbitrari del seu domini:

   (a) $c(t) = (\cos t, \sin t)$.

   (b) $f(x, y) = (x^2 - y, 3x + y^3, xy)$.

   (c) $u(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

   (d) $h(x, y, z) = (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, \sqrt{1 - z^2 - x^2}, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$.

   (e) $v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n x_i^2$.

2. Per a les funcions següents, estudieu la continuïtat, les derivades direccionals en el $(0, 0)$, i la diferenciabilitat en el $(0, 0)$.

   (a) $f(x, y) = 1$ si $x > 0$ i $0 < y < x^2$, $f(x, y) = 0$ en cas contrari.

   (b) $f(x, y) = x^{1/3} y^{1/3}$.

   (c) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

3. Sigui $f(x, y) = (x + a)(y + a)\sqrt{x^2 + y^2}$, on a és una constant. Discutiu, en funció de a:

   (a) la continuïtat de f

   (b) l'existència de les derivades parcials de f en $(0, 0)$

   (c) la diferenciabilitat de f en $(0, 0)$.

4. Obteniu l'aproximació lineal de $f(x, y) = (x \sin y, y \cos x)$ en els punts $(0, 0)$ i $(\pi/2, \pi)$.

5. Considereu la funció $f(x, y) = \log(x + y + 1) + \int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t$.
   Justifiqueu que és de classe C^1, calculeu $\mathrm{D}f(0, 0)$, i apliqueu-ho a calcular un valor aproximat de $f(0.03, 0.02)$.

6. Calculeu les derivades direccionals $\mathrm{D}_u f(a)$ següents:

   (a) $f(x, y) = x^2 - 3y^3 + 5xy, \quad a = (1, -1), \quad u = (-4, 3)$.

   (b) $f(x, y, z) = x + xy + xyz, \quad a = (1, 2, -1), \quad u = (3, 2, -2)$.

7. Proveu que la funció definida per $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$, és diferenciable però no de classe C^1.

8. Calculeu les derivades parcials $\mathrm{D}_1 F$, $\mathrm{D}_2 F$ de les funcions compostes indicades.

   (a) $F = f \circ g$, amb $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z - xyz$, $g(u, v) = (u + v, u - v, u)$.

   (b) $F = f \circ g$, amb $f(x, y) = \dfrac{x + y}{1 - xy}$, $g(u, v) = (\operatorname{tg} u, \operatorname{tg} v)$.

9. Sigui $f \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ diferenciable, i definim $g(x, y, z) = f(3x - y + 2z, x + y - 2z, 2x + 5y - z)$. Raoneu que g és diferenciable i calculeu la seva matriu jacobiana en el punt $(1, 1, 3)$.

10. Sigui $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ diferenciable. Proveu que la funció $\varphi(x, y) = f(2x + 3y)$, definida en $\mathbf{R}^2$, satisfà l'equació en derivades parcials $3\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - 2\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$.

11. Sigui $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

    (a) Trobeu-ne les derivades parcials a l'origen.

(b) Sigui $\gamma(t) = (at, bt)$. Proveu que $f \circ \gamma$ és diferenciable a l'origen i que $(f \circ \gamma)'(0) = \dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$, però que aquest resultat no es pot obtenir aplicant la regla de la cadena. Per què?

12. Calculeu les derivades parcials segones de les funcions següents:

    (a) $f(x,y) = \sin\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$.

    (b) $g(x,y) = x^y$.

    (c) $h(x,y) = x \sin xy + y \cos xy$.

    (d) $k(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

13. Siguin $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcions dues vegades diferenciables, $c > 0$ una constant. Proveu que la funció $\varphi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ satisfà l'equació de les ones, $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0$.

14. Considereu la funció $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    Comproveu que és de classe C^1, que les derivades parcials segones existeixen en tot punt, però que les derivades parcials creuades en $(0,0)$ són diferents. La funció és de classe C^2 en $\mathbf{R}^2$? És de classe C^∞ en $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$?

15. Considereu la funció $f(x,y) = xy\sqrt{x^2+y^2}$. És una funció C^1, C^2, ...?

16. Sigui la funció $f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \sin\dfrac{1}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

    Determineu el domini d'existència i de continuïtat de les funcions f, $D_i f$, $D_i D_j f$.

17. Considereu la funció $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ donada per $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

    (a) Proveu que f admet una inversa local en cada punt del seu domini.

    (b) Obteniu les imatges per f de les rectes $x = \text{constant}$ i $y = \text{constant}$.

    (c) Proveu que la imatge de f és $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$, que $f\colon \mathbf{R} \times [0, 2\pi[\to \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ és bijectiva, i que $f\colon \mathbf{R} \times]0, 2\pi[\to \mathbf{R}^2 - \{(u,0) \mid u \geq 0\}$ és un difeomorfisme.
    (Recordeu que l'aplicació $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ és una bijecció entre $[0, 2\pi[$ i la circumferència unitat.)

    (d) Calculeu $Df^{-1}(0,1)$.

18. Considereu la funció $g(x,y,z) = (u,v,w) = (x+y+z^2, x-y+z, 2x+y-z)$.

    (a) Demostreu que, en un veïnat del punt $(1,-1,2)$, aquesta funció admet inversa local.

    (b) Aplicant el teorema de la funció inversa, calculeu $Dg^{-1}(4,4,-1)$, explicant com s'ha d'interpretar aquest enunciat.

    (c) Trobeu explícitament $g^{-1}(u,v,w)$, i utilitzeu-ho per a calcular directament $Dg^{-1}(4,4,-1)$.

19. Per a cada valor de $\mu \in \mathbf{R}$ considerem la funció $f_\mu(x,y,z) = \left(x^2 - y^2 - z, y\cos x - \dfrac{z}{2}, \mu x\right)$. Per a quins valors de μ es pot assegurar que f_μ té inversa local diferenciable en un veïnat de l'origen?

20. Sigui $f\colon V \to \mathbf{R}$ de classe C^2, on $V \subset \mathbf{R}^2$ obert, una funció expressada en coordenades cartesianes. Sigui $\bar{f}$ l'expressió de f en coordenades polars: $\bar{f} = f \circ c$, on $c(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$.

    (a) Obteniu les relacions entre les derivades parcials primeres en els dos sistemes de coordenades:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial r} r = \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y \qquad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial y} x - \frac{\partial f}{\partial x} y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\cos\phi - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \phi}\frac{\sin\phi}{r} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\sin\phi + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \phi}\frac{\cos\phi}{r}$$

(b) Anàlogament, expresseu les derivades parcials segones de f en termes de les derivades parcials de $\bar{f}$, i expresseu el laplacià de f, $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, en coordenades polars:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{f}}{\partial r}.$$

21. Considereu el sistema $\left\{ \begin{array}{r} x - 2y - z = 0 \\ x + yt = 0 \end{array} \right.$ del qual observeu que $(x, y, z, t) = (1, 1, -1, -1)$ és solució. Es demana:

   (a) Pot aplicar-se el teorema de la funció implícita per a afirmar que, en un veïnat del punt donat, poden expressar-se z, t com a funcions de x, y?

   (b) Calculeu $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial t}{\partial x}, \dfrac{\partial t}{\partial y}$ en el punt $(1, 1)$:

   (c) En aquest exemple és possible trobar z, t en forma explícita en termes de x, y. Feu-ho i comproveu (b).

22. Considereu l'equació $z + \sin(z - 1) - x^2y^2 = 0$. Proveu que, en un veïnat del punt $(1, 1, 1)$, defineix implícitament z com a funció $z = Z(x, y)$, i calculeu les derivades parcials primeres i segones de Z en el punt $(1, 1)$.

Problemes addicionals

23. Sigui $\mu\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donada per $\mu(x, y) = xy$. Proveu que $\mathrm{D}\mu(a, b) \cdot (h, k) = ak + hb$ directament a partir de la condició de tangència.

24. Considereu la funció definida per $f(x, y) = \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

   (a) És contínua?

   (b) Calculeu-ne les derivades direccionals en $(0, 0)$.

   (c) És f diferenciable en $(0, 0)$?

25. Comproveu que la funció $f(x, y) = \begin{cases} xy^2/(x^2 + y^4) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$ no és contínua en el punt $(0, 0)$, però hi existeixen totes les derivades direccionals. Calculeu-les.

26. Per a les funcions següents, estudieu l'existència i continuïtat de les derivades parcials, així com la diferenciabilitat:

   (a) $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) = 0$.

   (b) $h(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; $h(0, 0) = 0$.

   (c) $u(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \dfrac{\pi}{x + y}$ si $x + y \neq 0$; $u(x, y) = 0$ si $x + y = 0$.

27. Usant una funció adequada calculeu aproximadament $\sqrt{3 + e^{-0.1} \cos 0.05 + 5 \sin 0.05}$.

28. Calculeu les derivades direccionals $\mathrm{D}_u f(a)$, on u és el normalitzat del vector v que indica la direcció, en els casos següents:

   (a) $f(x, y) = \ln \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|xy|}$, $\quad a = (12, -5)$, $\quad v = (7, -24)$.

   (b) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 - yz}{x + y + z}$, $\quad a = (1, -1, 1)$, $\quad v = (-3, 5, 1)$.

29. Considereu les funcions $f(x, y, z) = xyz$ i $g(t) = (2 + t, 1 - t, 1 + t)$. Calculeu $(f \circ g)'(0)$ de dues maneres diferents.

30. Donades $f(x,y) = (e^x, x+y)$ i $g(u,v) = (u-v, \cos uv, u-v)$, calculeu la diferencial de $g \circ f$ en $(0,0)$ de dues formes diferents.

31. Trobeu les funcions de la forma $f(x,y) = h(x)k(y)$ (es diu que f és *de variables separades*) tals que $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y$.

32. Sigui $U \subset \mathbf{R}^n$ un obert "cònic", és a dir, que compleix la propietat següent: si $x \in U$, llavors $\lambda x \in U$, per a tota $\lambda > 0$. Una funció $f\colon U \to \mathbf{R}$ es diu *homogènia* de grau $p \in \mathbf{R}$ si, per a tot $\lambda > 0$ i tot $x \in U$, es compleix $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$. Proveu l'anomenat *teorema d'Euler*: una funció f de classe C^1 és homogènia de grau p sii satisfà la igualtat $\mathrm{D}f(x) \cdot x = p\, f(x)$.
(Indicació: Per a la implicació directa, fixada x les funcions (de λ) $f(\lambda x)$ i $\lambda^p f(x)$ són idèntiques; derivant-les en $\lambda = 1$ obtenim la igualtat desitjada. Per a la implicació recíproca, fixada x proveu que la funció $g(\lambda) = f(\lambda x) - \lambda^p f(x)$ satisfà l'equació diferencial lineal $g' = \dfrac{p}{\lambda} g$ amb condició inicial $g(1) = 0$, i per tant és nul·la.)
Comproveu aquest resultat per a les funcions següents:

    (a) $f(x,y) = xy^2 - x^3 + 2x^2y$.
    (b) $g(x,y,z) = \sqrt{x^3 + y^3 + z^3}$.
    (c) $h(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
    (d) $k(x,y) = \sqrt{y/x}$.

33. Donada una funció $f\colon U \to \mathbf{R}$ ($U \subset \mathbf{R}^n$ obert) de classe C^2, es defineix el *laplacià* de f per $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$. Direm que f és *harmònica* quan $\Delta f = 0$ (*equació de Laplace*). Mireu si són harmòniques les funcions:

    (a) $f(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$.
    (b) $g(x,y) = xy(x^2 - y^2)$.
    (c) $h(x,y,z) = -1/r$, amb $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

34. Donades g i h funcions de classe C^2, comproveu que la funció $f(x,y) = x\, g\left(\dfrac{-y}{x}\right) + y\, h\left(\dfrac{y}{x}\right)$ satisfà l'equació $x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0$.

35. Calculeu les derivades parcials segones a l'origen de la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy = 0 \\ x^2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x} - y^2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y} & \text{si } xy \neq 0 \end{cases}$$

36. Estudieu en quins punts tenen inversa local diferenciable les funcions següents:

    (a) $f(x,y) = (x^2y, x - y^2)$.
    (b) $g(x,y) = (e^x + e^y, e^{2x} + e^{2y})$.
    (c) $h(x,y,z) = (x + \sqrt{y}, y + \sqrt{z}, z + \sqrt{x})$.
    (d) $k(x,y,z) = (x+y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3)$.

37. Donades les funcions $f(x,y) = \ln(1+xy)$ i $g(t) = (e^t, \cosh t)$:

    (a) Determineu el domini i la imatge d'aquestes dues funcions. Estudieu també si són diferenciables amb continuïtat en el seu domini.
    (b) Fent servir l'aproximació lineal, calculeu un valor aproximat de $f(0.07, 1.05)$.
    (c) Determineu si la funció $f \circ g$ és localment invertible al voltant de l'origen. En cas afirmatiu, calculeu, si existeix, la derivada de $(f \circ g)^{-1}$ en el punt imatge de l'origen per $f \circ g$.
    (d) Trobeu els punts $(x,y) \in \mathrm{Dom} f$ tals que el jacobià de $g \circ f$ en (x,y) és zero.

38. Considereu l'aplicació $\varphi\colon W =]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbf{R}^2$ definida per

$$(x,y) = \varphi(u,v) := (u^{1/2}v^{-1/2}, u^{1/2}v^{1/2}).$$

  (a) Proveu que defineix un difeomorfisme de W en W. Doneu el seu invers, $(u,v) = \varphi^{-1}(x,y)$.

  (b) Donada una funció $z = f(x,y)$, transformeu l'expressió $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en termes de u, v.

  (c) Apliqueu-ho a trobar les funcions $z(x,y)$ tals que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$.

39. Considereu el sistema $\left\{\begin{array}{r} y^2 - 2z - u^2 - v^2 = 0 \\ xy - u^3 - v = 0 \\ z - uv = 0 \end{array}\right.$ del qual $(x,y,z,u,v) = (3,3,2,2,1)$ és solució. Proveu que, en un veïnat d'aquest punt, es poden aïllar (x,y,z) com a funcions de (u,v), i calculeu la jacobiana d'aquestes en el punt $(2,1)$.

40. Sigui $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, de classe C^1, tal que en tot punt $\dfrac{\partial F}{\partial x} \neq 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

  (a) Raoneu que pot expressar-se $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$, $z = z(x,y)$, en un veïnat de qualsevol punt (x,y,z) tal que $F(x,y,z) = 0$.

  (b) Proveu que, amb les notacions anteriors, $\dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial x}{\partial z} = -1$.

Respostes

2. (a) La derivada direccional val 0 en qualsevol direcció, però com que la funció no és contínua en $(0,0)$ no hi és diferenciable.

  (b) És contínua arreu, la derivada direccional només existeix en les direccions dels eixos (i val 0), i per tant no és diferenciable.

  (c) És contínua arreu, la derivada direccional segons el vector (h,k) és $\dfrac{h^2k}{h^2+k^2}$, i per tant no és diferenciable.

3. (a) És contínua per a tota a.

  (b) Només existeixen si $a = 0$.

  (c) Només per a $a = 0$.

4. $\begin{pmatrix} x\sin y \\ y\cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + o\big(\|(x,y)\|\big)$, $\begin{pmatrix} x\sin y \\ y\cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi(y-\pi)/2 \\ -\pi(x-\pi/2) \end{pmatrix} + o\big(\|(x-\pi/2, y-\pi)\|\big)$.

5. $\mathrm{D}f(0,0) = (2,1)$. Valor aproximat 0.08 (valor real: 0.07879016 ...).

6. (a) 0.

  (b) -1.

8. (a) $\dfrac{\partial F}{\partial u} = 3u^2 + v^2 - 2uv$, $\dfrac{\partial F}{\partial v} = -u^2 - 3v^2 + 2uv$.

  (b) $\dfrac{\partial F}{\partial u} = \dfrac{\partial F}{\partial v} = \dfrac{1}{\cos^2(u+v)}$.

9. Observeu que $g = f\circ\varphi$, amb φ lineal, per tant g és diferenciable.

  $\mathrm{J}g(1,1,3) = \mathrm{J}f(8,-4,4)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

11. (a) $\mathrm{D}_1 f(0,0) = 0$, $\mathrm{D}_2 f(0,0) = 0$.

  (b) $(f\circ g)(t) = \dfrac{ab^2}{a^2+b^2}t$. La regla de la cadena no es pot aplicar perquè f no és diferenciable en $(0,0)$.

12. (a) $\mathrm{D}_{xx}f = -\sin\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$.

  $\mathrm{D}_{xy}f = \mathrm{D}_{yx}f = \dfrac{1}{y^2}\sin\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$.

  $\mathrm{D}_{yy}f = \dfrac{2}{y^3}\cos\left(x + \dfrac{1}{y}\right) - \dfrac{1}{y^4}\sin\left(x + \dfrac{1}{y}\right)$.

(b) $D_{xx}g = y(y-1)x^{y-2}$.
$D_{xy}g = D_{yx}g = x^{y-1} + yx^{y-1}\log x$.
$D_{yy}g = x^y \log^2 x$.

(c) $D_{xx}h = y(2-y^2)\cos xy - xy^2 \sin xy$.
$D_{xy}h = D_{yx}h = x(2-y^2)\cos xy - y(x^2+2)\sin xy$.
$D_{yy}h = -x^2 y \cos xy - x(x^2+2)\sin xy$.

(d) $D_{xx}k = y^2(x^2+y^2)^{-3/2}$.
$D_{xy}k = D_{yx}k = -xy(x^2+y^2)^{-3/2}$.
$D_{yy}k = x^2(x^2+y^2)^{-3/2}$.

14. $D_2(D_1 f)(0,0) = -1$, $D_1(D_2 f)(0,0) = +1$. La funció no és de classe C^2 en $\mathbf{R}^2$, ja que si ho fos tindria les derivades parcials creuades iguals. És de classe C^∞ en $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ perquè és una funció racional.

15. És C^2 però no C^3.

16. f és contínua en $\mathbf{R}^2$. Les derivades parcials primeres estan definides en $\mathbf{R}^2$, $D_1 f$ és contínua arreu, i $D_2 f$ en tot punt excepte els $(a,0)$, $a \neq 0$. Quant a les derivades parcials segones, tenim $D_1 D_1 f = 0$; $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$, definides en $\mathbf{R}^2$ però no contínues sobre l'eix d'abscisses; i $D_2 D_2 f$ definida en $\mathbf{R}^2 - \{(a,0) \in \mathbf{R}^2 \mid a \neq 0\}$, i contínua en aquest domini excepte en el punt $(0,0)$.

17. (a) Observeu que f és C^∞, i $Jf(x,y) = e^{2x} \neq 0$ en tot punt.
(b) Són circumferències i semirectes, respectivament.
(d) $Df^{-1}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

18. (a) g és C^1, i $\det Jg(1,-1,2) = 15 \neq 0$.
(b) L'equació $g(x,y,z) = (4,4,-1)$ té dues solucions: $(1,-1,2)$ i $(1,-6,-3)$. Al voltant d'aquests dos punts g admet inversa *local* diferenciable, i g^{-1} denota qualsevol de les respectives inverses (però cal especificar quina). Per a la primera $Jg^{-1}(4,4,-1) = Jg(1,-1,2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/5 & -3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/15 & -2/15 \end{pmatrix}$, i anàlogament per a la segona.
(c) Com en l'anterior cal especificar quina de les inverses considerem.
$g^{-1}(u,v,w) = \left(\frac{1}{3}v + \frac{1}{3}w, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4u+\frac{4}{3}v-\frac{8}{3}w} - \frac{2}{3}v + \frac{1}{3}w, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4u+\frac{4}{3}v-\frac{8}{3}w} \right)$.

19. Per a tot $\mu \neq 0$.

21. (a) Sí.
(b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2$, $\dfrac{\partial t}{\partial x} = -1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$, en el punt $(1,1)$.

22. $D_1 Z(1,1) = D_2 Z(1,1) = 1$, $D_1^2 Z(1,1) = D_2^2 Z(1,1) = 1$, $D_1 D_2 Z(1,1) = 2$.

23. $\mu(a+h, b+k) = ab + ak + hb + hk = \mu(a,b) + D\mu(a,b)\cdot(h,k) + o(\|(h,k)\|)$.

24. (a) Sí.
(b) La derivada direccional segons el vector (h,k) és $\dfrac{h|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$.
(c) No.

25. $D_{(a,b)}f(0,0)$ val b^2/a si $a \neq 0$, i 0 si $a = 0$.

26. (a) Les derivades parcials de f a l'origen són 0 pèro la funció no hi és diferenciable ja que no hi és contínua. A la resta dels punts sí que ho és i

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

(b) Les derivades parcials de h a l'origen són 0, pèro la funció no hi és diferenciable (encara que sí contínua) ja que no es compleix la condició de tangència. A la resta dels punts la funció és diferenciable, i tenim

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

(c) Sobre la recta $x+y=0$ les derivades parcials només existeixen a l'origen, i la funció hi és diferenciable.

27. Prenem, per exemple, $f(x,y) = \sqrt{3 + e^x \cos y + 5 \sin y}$, el punt $(0,0)$, i el vector $(-0.1, 0.05)$. Llavors $f(0,0) = 2$, $\mathrm{D}f(0,0) = (0.25, 1.25)$, i el valor aproximat és 2.0375 (valor real: 2.03803887...).

28. (a) $-42347/253500 = -0'167\ldots$

    (b) $-16/\sqrt{35}$.

29. $(f \circ g)'(0) = 1$.

30. $\mathrm{D}(g \circ f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

31. $f(x,y) = Ae^{a(x+y)}$, on A i a són constants.

33. Són harmòniques les tres.

34. $f_{xx} = \dfrac{y^2}{x^3}\, g''\left(-\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{2y^2}{x^3}\, h'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y^3}{x^4}\, h''\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

    $f_{xy} = f_{yx} = -\dfrac{y}{x^2}\, g''\left(-\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{2y}{x^2}\, h'\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{y}{x^3}\, h''\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

    $f_{yy} = \dfrac{1}{x}\, g''\left(-\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{2}{x}\, h'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y}{x^2}\, h''\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

35. $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f(0,0) = 1$, $\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(0,0) = -1$, $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_1 f(0,0) = \mathrm{D}_2\mathrm{D}_2 f(0,0) = 0$.

36. (a) On $x(x+4y^2) \neq 0$.

    (b) On $x \neq y$.

    (c) En tot punt.

    (d) En els punts on les tres coordenades són diferents.

37. (a) $\mathrm{Dom}\, f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy > -1\}$. $\mathrm{Im}\, f = \mathbf{R}$.

    $\mathrm{Dom}\, g = \mathbf{R}$. $\mathrm{Im}\, g = \left\{ (x,y) \mid x > 0, y = \dfrac{x^2+1}{2x} \right\}$.

    (b) Prenent per exemple el punt $(0,1)$, llavors un valor aproximat és 0.07.

    (c) Sí que hi és localment invertible; $\mathrm{D}(f \circ g)^{-1}\big((f \circ g)(0)\big) = 2$.

    (d) En tot $(x,y) \in \mathrm{Dom}\, f$.

38. (a) $u = xy$, $v = y/x$.

    (b) $2u\dfrac{\partial z}{\partial u}$.

    (c) S'obtenen les funcions $f(x,y) = \log(xy) + g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, amb g una funció diferenciable arbitrària.

39. $\begin{pmatrix} 3 & -2/3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

40. (b) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$, $\dfrac{\partial x}{\partial z} = -\dfrac{\partial F/\partial z}{\partial F/\partial x}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$.

4 Aplicacions geomètriques de la derivació

Problemes bàsics

1. Calculeu els vectors tangents $\gamma'(t_o)$ indicats.

   (a) Vector tangent de $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ a $t_o = 1$.

   (b) Vectors tangents de $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, a $t_o = 0$ i a $t_o = \pi$.

   (c) Vector tangent de $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ a $t_o = 0$.

2. Sigui $\sigma\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ un camí diferenciable tal que $\sigma(0) = (0, 0)$ i $\dot\sigma(0) = (1, 0)$. Sigui $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ donada per $f(x, y) = (x + y + 1, 2x - y)$. Calculeu el vector tangent al camí $f \circ \sigma$ en l'instant 0.

3. Considereu $f(x, y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$ i sigui σ un camí diferenciable en $\mathbf{R}^2$ tal que $\sigma(0) = (0, 0)$ i $\sigma'(0) = (1, 1)$. Sigui γ el camí transformat de σ per f ($\gamma = f \circ \sigma$). Trobeu el vector tangent a γ en $t = 0$.

4. Sigui $\sigma\colon I \to \mathbf{R}^n$ un camí diferenciable tal que $\|\sigma(t)\|$ és constant (és a dir, és dins una superfície esfèrica amb centre l'origen). Proveu que els vectors posició $\sigma(t)$ i velocitat $\sigma'(t)$ són ortogonals en cada instant. (Partiu de $\sigma(t) \cdot \sigma(t) = a^2$ (constant) i deriveu.)
   És cert el recíproc?

5. Calculeu el gradient de $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$, i representeu-lo gràficament en diversos punts.

6. Essent $r(x) = \|x\|$ la norma euclidiana de $x \in \mathbf{R}^n$, calculeu el gradient de les funcions r i r^α ($\alpha \in \mathbf{R}$).

7. La temperatura d'un punt del pla ve donada per $T(x, y) = 10 + 6 \cos x \cos y + 3 \cos 2x + 4 \cos 3y$. Trobeu la direcció de màxim increment de la temperatura, la de màxima disminució i la de no variació, en el punt $P = (\pi/3, \pi/3)$.

8. Siguin $f, g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ funcions diferenciables i $p \in \mathbf{R}^3$, tals que els gradients de f i g en p són ortogonals i que $f(p) = 2$ i $g(p) = 3$. Si les màximes derivades direccionals (segons un vector unitari) de f i g en p són, respectivament, 5 i 4, quina és la màxima derivada direccional del producte fg en p?

9. Trobeu l'equació del pla tangent a les superfícies definides per les funcions següents, en els punts que s'indiquen.

   (a) $z = x^2 + 2y^2, \quad p = (1, 2, 9)$.

   (b) $z = xy, \quad p = (3, -1, -3)$.

   (c) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad p = (r \cos\phi, r \sin\phi, \sqrt{a^2 - r^2}) \quad (0 < r < a)$.

10. En els enunciats següents, digueu si l'equació donada defineix una superfície regular, i obtingueu-ne l'equació del pla tangent en el punt indicat.

    (a) $x^2 + y^2 - z^2 = 18, \quad p = (3, 5, -4)$.

    (b) $2y - z^3 - 3xz = 0, \quad p = (1, 7, 2)$.

    (c) $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 6, \quad p = (-1, 8, 1)$.

11. En els enunciats següents, doneu els vectors tangents de la parametrització, estudieu si aquesta és regular, i calculeu el pla tangent de la superfície que defineix en el punt indicat.

    (a) $g(u, v) = (u^2 - v, u + v, uv), \quad p = g(1, 2)$.

    (b) $g(\phi, \theta) = (R \cos\phi \cos\theta, R \sin\phi \cos\theta, R \sin\theta), \quad p = g(\phi_o, \theta_o)$.

    (c) $g(r, \phi) = (r \cos\phi, r \sin\phi, r), \quad p = g(r_o, \pi/4)$.

    (d) $g(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v, u^2), \quad p = g(1, 0)$.

12. En els enunciats següents, digueu si l'equació donada defineix una corba regular en el pla, i obtingueu-ne l'equació de les rectes tangent i normal en el punt indicat.

(a) $xy + 2\log x + 3\log y = 1$, punt $(1,1)$.

(b) $x^3 - yx^2 + y^2 - xy = 0$, punt $(2,2)$.

13. En els enunciats següents, estudieu si la parametrització donada és regular, i calculeu la recta tangent de la corba que defineix en el punt indicat.

(a) $\gamma\colon]0,+\infty[\to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (t\cos 2\pi t, t\sin 2\pi t)$, punt $\gamma(1)$.

(b) $\Gamma\colon]0,+\infty[\to \mathbf{R}^3$, $\Gamma(t) = (t, t\cos 2\pi t, t\sin 2\pi t)$, punt $\Gamma(2)$.

(c) $\gamma\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\gamma(t) = (a\sin^2 t, a\sin t\cos t, a\cos t)$ ($a > 0$ constant), punt $\gamma(t_o)$.
Proveu també que tots els seus plans normals passen per l'origen.

14. En els enunciats següents, digueu si el parell d'equacions donat defineix una corba regular en l'espai, i obtingueu-ne l'equació de la recta tangent en el punt indicat.

(a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2-y^2+2z^2=2 \end{cases}$ punt $p=(1,1,1)$.

(b) $\begin{cases} x^2-y^2-z=0 \\ y\cos x - \dfrac{z}{2} = 0 \end{cases}$ punt $(0,0,0)$.

(c) $\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=1 \\ (x-1)^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ punt $(0,0,0)$.

15. Sigui $C \subset \mathbf{R}^2$ la corba plana definida per $F(x,y) = x^2/4 - y^2 + y^4 = 0$.

(a) Proveu que és una corba regular en tot punt excepte, potser, el $(0,0)$.

(b) Considereu el camí $\gamma\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin 2t, \sin t)$. Proveu que està contingut dins C.

(c) Calculeu els vectors tangents de γ a $t=0$ i a $t=\pi$, i representeu-los gràficament.

(d) Conclogueu que C no és una corba regular en el $(0,0)$.

(e) Proveu que tanmateix $\gamma|_{]0,2\pi[}$ és una parametrització injectiva i regular de C.
(Heu de comprovar tres coses: primer, $\gamma'(t) \neq 0$ sempre; segon, γ és injectiva sobre $]0,2\pi[$; i tercer (més difícil), donat $(x,y) \in C$ cal trobar una $t \in]0,2\pi[$ tal que $\gamma(t) = (x,y)$.)

16. En cadascun dels apartats següents es donen dues expressions de corbes o superfícies en forma paramètrica, implícita o explícita. Esbrineu quina relació hi ha entre elles.

(a) $\gamma(t) = (1+\cos 2t, \sin 2t)$,
$G(x,y) = x^2+y^2-2x = 0$.

(b) $\alpha(u) = (\sin^2 u, 2\cos u)$, $u \in [0,\pi/2]$,
$\beta(v) = (1-v^2, 2v)$, $v \in [0,1]$.

(c) $c(t) = (t,t^2)$,
$F(x,y) = x^3 - yx^2 + y^2 - xy = 0$.

(d) $g(\rho,\phi) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, \rho)$,
$F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2 = 0$.

(e) $g(u,v) = (u\cosh v, u\sinh v, u^2)$,
$z = f(x,y) = x^2 - y^2$.

17. Sigui C una corba continguda en el semiplà $H = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x > 0, y = 0\}$. S'anomena *superfície de revolució* el conjunt obtingut fent girar C al voltant de l'eix OZ.
De manera més precisa, si denotem per $R_\phi\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la rotació d'eix OZ i angle ϕ, $R_\phi(x,y,z) = (x\cos\phi - y\sin\phi, x\sin\phi + y\cos\phi, z)$, la superfície descrita és $S = \cup_{\phi\in[0,2\pi[} R_\phi(C)$.
La corba C s'anomena *generatriu* de S, els conjunts $R_\phi(C)$ (amb $\phi \in [0,2\pi[$) s'anomenen *meridians*, i les circumferències $\cup_{\phi\in[0,2\pi[} R_\phi(p)$ (amb $p \in C$) *paral·lels*.

(a) Si C està descrita paramètricament per $f(t) = (a(t), 0, c(t))$, obtingueu una parametrització $g(\phi,t)$ de S.
Proveu que si f és regular també ho és g.

(b) Si C està descrita implícitament per $F(x, z) = 0$, obtingueu una descripció implícita $G(x, y, z) = 0$ de S.
Proveu que si $\mathrm{J}F$ no s'anul·la en C, llavors $\mathrm{J}G$ no s'anul·la en S.

(c) Doneu exemples de superfícies de revolució.

(d) El *tor* és la superfície de revolució obtinguda fent girar una circumferència $(x - R)^2 + z^2 = r^2$ al voltant de l'eix OZ, essent $R > r > 0$ dues constants. Obteniu-ne una descripció implícita i, a partir de la parametrització habitual de la circumferència mitjançant l'angle, una descripció paramètrica.

(e) Calculeu la recta normal a una superfície de revolució S en un punt qualsevol (x_o, y_o, z_o), tant si S està descrita segons l'apartat (a) com el (b).

(f) Proveu que, en general, la recta normal passa per l'eix de revolució.

Problemes addicionals

18. Siguin $c\colon I \to \mathbf{R}^n$ un camí de classe C^2.

(a) Proveu que si c és contingut dins una recta, llavors $c'(t)$ i $c''(t)$ són linealment dependents per a cada t.
(Si c és dins la recta que passa per p amb vector director u, llavors $c(t) = p + \lambda(t)u$.)
Proveu l'enunciat recíproc suposant que el vector c' no s'anul·la mai.

(b) Analògament, proveu que si c és contingut dins un pla, llavors $c'(t)$, $c''(t)$ i $c'''(t)$ són linealment dependents per a cada t.

19. Sigui $\mathbf{h} = h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2 + h_3\mathbf{e}_3 \neq \mathbf{0}$ un vector de l'espai ordinari $\mathbf{R}^3$. Anomenem *pendent* de $\mathbf{h}$ el nombre $h_3/\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ ($\pm\infty$ si el vector és vertical).
Si γ és un camí diferenciable tal que $\gamma'(t) \neq 0$, anomenem pendent de γ el pendent del seu vector tangent.

(a) Sigui $f\colon U \to \mathbf{R}$ una funció diferenciable de dues variables, $p \in U$ un punt, i $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$ un vector unitari. Proveu que el pendent del camí $\gamma(t) = (tu_1, tu_2, f(p + t\mathbf{u}))$ a l'instant $t = 0$ és $f'(p; \mathbf{u})$.

(b) Proveu que l'hèlix $\gamma(t) = (\cos\omega t, \sin\omega t, at)$ té pendent constant.

20. Sigui $R(t)$ una matriu 3×3 ortogonal (o sigui, $R^\top R = I$), i suposem que $R(0) = I$.

(a) Proveu que el seu vector tangent $A = R'(0)$ és una matriu antisimètrica.

(b) Comproveu-ho en el cas de $R(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

21. Sigui $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ una matriu simètrica, i $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ la forma quadràtica corresponent, $f(x) = \sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j$. Calculeu el gradient de f.

22. Essent $c > 0$ una constant fixada, proveu que els plans tangents a la superfície $xyz = c$ determinen amb els plans coordenats tetràedres de volum constant.

23. Suposeu que l'equació $F(x, y, z) = 0$ determina una funció $y = f(x, z)$, la qual defineix una superfície de $\mathbf{R}^3$ que podem parametritzar amb les variables (x, z). Expresseu el producte vectorial fonamental d'aquesta parametrització en termes de F.

24. Determineu $f(u)$ per tal que la superfície parametritzada $r(u, v) = (f(u), v, p - u - v)$ tingui com a producte vectorial fonamental el vector $(1, 1, 1)$. De quina superfície es tracta?

25. Sigui la funció $f(x, y) = 2ax + 2bxy + 4cy^2$ amb $a, b, c \in \mathbf{R}$. Determineu els valors dels coeficients a, b, c de manera que se satisfacin simultàniament les dues condicions següents:

(a) La gràfica de f en el punt $(1, 1, f(1, 1))$ té el pla tangent normal al vector $(1, 0, -1)$.

(b) La derivada direccional de f en $(1, -1)$ és nul·la en la direcció del vector $(1, 0)$.

26. Trobeu, sobre la superfície d'equació $z = a^2x^2 + b^2y^2$, la corba de màxim pendent que passa per $(1/a, 1/b, 2)$.
(Indicació: la projecció $(x(t), y(t))$ de la corba ha d'ésser tangent al gradient en cada punt.)

27. Considereu el camí $\gamma(t) = \begin{cases} (-e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}) & t < 0 \\ (0,0) & t = 0 \\ (e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}) & t > 0 \end{cases}$
Proveu que és C^∞ i injectiu, però que la seva imatge (dibuixeu-la!) no és una corba regular.

28. Considereu la funció $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ donada per $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.
    (a) Sigui $g: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funció diferenciable. Si el pla tangent a la gràfica de g en el punt $(1, 0, 1)$ té equació $2x + y - z = 1$, trobeu l'equació del pla tangent a la gràfica de $g \circ f$ en el punt $(0, 0, 1)$.
    (b) Siguin f_1, f_2 les funcions components de f. Proveu que les corbes de nivell $f_1(x, y) = 1$, $f_2(x, y) = 0$ es tallen formant un angle recte.

29. Considereu les corbes planes definides per les parametritzacions $\alpha(t) = (-t, t^2)$ i $\beta(t) = (t^2, t)$. Trobeu els punts en què es tallen, i amb quin angle ho fan.

30. Sigui $a > 0$ una constant, i $C \subset \mathbf{R}^2$ la corba definida per $x^3 + y^3 = 3axy$.
Sigui $\gamma: \mathbf{R} - \{-1\} \to \mathbf{R}^2$ la corba parametritzada definida per $\gamma(t) = \left(\dfrac{3at}{1+t^3}, \dfrac{3at^2}{1+t^3} \right)$.
    (a) Estudieu si C és una corba regular del pla.
    (b) Estudieu si γ és una corba parametritzada regular.
    (c) Calculeu el vector tangent de γ a $t = 0$.
    (d) Calculeu $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t)$, i demostreu que el pendent del vector tangent $\gamma'(t)$, quan $t \to +\infty$, tendeix a ∞.
    (e) Comproveu que γ pren valors dins C, i que de fet $\gamma: \mathbf{R} - \{-1\} \to C$ és bijectiva.
    (Indicació: la inversa de γ és $\pi(x, y) = y/x$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $\pi(0, 0) = 0$.)
    (f) Combinant els resultats anteriors en un dibuix, justifiqueu que C no és una corba regular.

31. D'acord amb el problema 17, si la generatriu d'una superfície de revolució S al voltant de l'eix OZ és parametritzada per $\gamma(t) = (a(t), 0, c(t))$, S és parametritzada per $g(t, \phi) = (a(t)\cos\phi, a(t)\sin\phi, c(t))$. Sigui $L \subset S$ una corba descrita, en l'espai de paràmetres, per $\phi = f(t)$. Trobeu l'angle α que formen, en un punt $g(t_o, \phi_o)$, la corba L i el meridià $\phi = \phi_o$.

32. Sigui $U \subset \mathbf{R}^n$ un obert. Un camp vectorial en U definit per una aplicació $\mathbf{f}: U \to \mathbf{R}^n$ es diu tangent a una corba, superfície, …, $M \subset U$ si en cada punt $p \in M$ el vector $\mathbf{f}(p)$ és tangent a M en p.
Estudieu si els camps vectorials de $\mathbf{R}^3$ definits per
$$\mathbf{f}(x, y, z) = (-y, x, 0) \qquad \mathbf{g}(x, y, z) = (x, y, z) \qquad \mathbf{h}(x, y, z) = (y, x, z)$$
són tangents en algun punt a l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Respostes

1. (a) Vector $(2, 3)$ sobre el punt $(1, 1)$.
    (b) Vector $(0, 0)$ sobre el punt $(0, 0)$; vector $(2, 0)$ sobre el punt $(\pi, 2)$;
    (c) Vector $(1, -1, 0)$ sobre el punt $(1, 1, 1)$.
2. Vector $(1, 2)$ sobre el punt $(1, 0)$.
3. Vector $(2, 0)$ sobre el punt $(1, 1)$.
6. Si $\mathbf{r}(x) = (x)$, $\operatorname{grad} r = \mathbf{r}/r$ i $\operatorname{grad} r^\alpha = \alpha r^{\alpha-2}\mathbf{r}$.
7. Màxim augment en la direcció indicada per $(-3, -1)$, màxima disminució en la direció oposada, i no variació en la direcció indicada per $\pm(1, -3)$.
8. 17.

9. (a) $2x + 8y - z = 9$.
   (b) $x - 3y + z = 3$.
   (c) $xr\cos\phi + yr\sin\phi + z\sqrt{a^2 - r^2} = a^2$.
10. (a) Regular en tot punt. Pla tangent $3x + 5y + 4z = 18$.
   (b) Regular en tot punt. Pla tangent $6x - 2y + 15z = 22$.
   (c) Regular en tot punt, excepte en la intersecció amb els plans coordenats. Pla tangent $-2x+y+2z = 12$.
11. (a) Parametrització regular excepte en $(-1/2, -1/2)$. Pla tangent $x + 4y - 3z = 5$.
   (b) Parametrització regular excepte on $\cos\theta = 0$. Pla tangent $\cos\phi_o\cos\theta_o x + \sin\phi_o\cos\theta_o y + \sin\theta_o z = R$.
   (c) Parametrització regular excepte on $r = 0$. Pla tangent $x + y - \sqrt{2}z = 0$.
   (d) Parametrització regular excepte on $u = 0$. Pla tangent $2x - z - 1 = 0$.
12. (a) Regular en tot punt. Recta tangent: $(1,1) + \lambda\,(-4,3)$. Recta normal: $(1,1) + \lambda\,(3,4)$.
   (b) Regular en tot punt excepte potser $(0,0)$ i $(1,1)$. Recta tangent: $(2,2) + \lambda\,(1,1)$. Recta normal: $(2,2) + \lambda\,(1,-1)$
13. (a) Regular en tot punt. Recta tangent: $(1,0) + \lambda\,(1, 2\pi)$.
   (b) Regular en tot punt. Recta tangent: $(2,2,0) + \lambda\,(1,1,4\pi)$.
   (c) Regular en tot punt. Recta tangent: $\gamma(t_o) + \lambda\,(\sin 2t_o, \cos 2t_o, -\sin t_o)$.
   Pla normal: $x\sin 2t_o + y\cos 2t_o - z\sin t_o = 0$. (Observeu que γ està sobre una esfera de centre l'origen.)
14. (a) Regular en tot punt. Recta tangent: $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$.
   (b) Regular en tot punt. Recta tangent: l'eix OX.
   (c) Regular en tot punt. Recta tangent: l'eix OY.
15. (c) A $t = 0$: vector $(2,1)$ en el punt $(0,0)$.
   A $t = \pi$: vector $(2,-1)$ en el punt $(0,0)$.
   (d) Si fos una corba regular en $(0,0)$ llavors l'espai dels vectors tangents a C en aquest punt tindria dimensió 1, però l'apartat anterior ens ha donat dos d'aquests vectors linealment independents.
   (e) γ és C^∞, i $\gamma'(t) = (2\cos 2t, \cos t)$, mai nul.
   Posant $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ i mirant el segon component tenim $\sin t_1 = \sin t_2$; si s'anul·la cal $t_1 = \pi = t_2$, i si no el primer component queda $\cos t_1 = \cos t_2$, i només resta recordar que $c(t) = (\cos t, \sin t)$ és injectiva sobre $]0, 2\pi[$.
   Finalment, observem que, si $\gamma(t) = (x,y)$, llavors $\gamma(t+\pi) = (x,-y)$, $\gamma(2\pi - t) = (-x,-y)$, i $\gamma(\pi - t) = (-x, y)$, de manera que és suficient estudiar els punts $(x,y) \in C$ pertanyents al primer quadrant. Donat un punt d'aquests, és clar que $(x,y) = \gamma(t)$ amb $t = \arcsin y$ (ja que $\gamma(t)$ és del primer quadrant obert només quan $0 < t < \pi/2$). Tenint en compte que $x = 2y\sqrt{1-y^2}$, es comprova fàcilment que $\gamma(\arcsin y) = (x,y)$.
   Aquest problema mostra, doncs, que la imatge d'una parametrització injectiva i regular pot no ser una corba regular (en aquest cas, té la forma d'un 8, ja que $\lim_{t\to 0+}\gamma(t) = \lim_{t\to 2\pi-}\gamma(t) = (0,0) = \gamma(\pi)$).
16. (a) Com que $G(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1$, l'equació implícita és la d'una circumferència de centre $(1,0)$ i radi 1, i això ho parametritza γ, injectivament sobre l'interval $[0,\pi[$ (per exemple).
   (b) Les dues parametrizacions recorren (en sentit contrari) el mateix conjunt, ja que $\alpha(u) = \beta(\varphi(u))$, amb el canvi de variable $\phi\colon [0,\pi/2] \to [0,1]$, $v = \varphi(u) = \cos u$.
   (c) $F(c(t)) = 0$, de manera que la parametrització corre dins el conjunt $F^{-1}(0)$. Aïllant y dins l'equació implícita obtenim $F(x,y) = (y-x)(y-x^2)$, de manera que és la unió d'una recta i una paràbola. És clar que la parametrització $c(t)$ ($t \in \mathbf{R}$) recorre tota la paràbola.
   (d) La parametrització recorre tot el con. Si prenem $\phi \in [0, 2\pi[$ (per exemple), llavors és injectiva, excepte que tots els punts amb $\rho = 0$ s'apliquen al $(0,0,0)$.
   (e) Com que $u^2 = (u\cosh v)^2 - (u\sinh v)^2$, la parametrització corre dins del graf de f, que és un paraboloide hiperbòlic. Però d'aquest només cobreix la regió on $z > 0$ (quan $u \neq 0$) i el punt $(0,0,0) = g(0,v)$.
17. (a) $g(\phi,t) = (a(t)\cos\phi, a(t)\sin\phi, c(t))$.
   (b) $G(x,y,z) = F(\sqrt{x^2+y^2}, z)$.
   (c) El cilindre $x^2 + y^2 = a^2$, el con $p^2(x^2+y^2) = z^2$, l'el·lipsoide $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, el paraboloide circular $z = \dfrac{x^2+y^2}{a}$, els hiperboloides $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = \pm 1, \ldots$
   (d) $(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$, $(\theta,\phi) \mapsto ((R + r\cos\theta)\cos\phi, (R + r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta)$.

(e) Equacions en forma paramètrica: $\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} + \lambda\, a(t_o) \begin{pmatrix} c'(t_o)\cos\phi_o \\ c'(t_o)\sin\phi_o \\ -a'(t_o) \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} + \lambda \frac{1}{\rho_o} \begin{pmatrix} x_o\, \mathrm{D}_1 F(\rho_o, z_o) \\ y_o\, \mathrm{D}_1 F(\rho_o, z_o) \\ \rho_o\, \mathrm{D}_2 F(\rho_o, z_o) \end{pmatrix}$,
on $\rho_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$.

(f) Es pot usar l'apartat anterior, però també es pot observar que la recta normal a S en (x_o, y_o, z_o) és també normal al paral·lel corresponent, al qual és normal el semiplà $R_\phi(H)$. Per tant, si la recta normal no és vertical, tallarà l'eix OZ.

18. (a) És clar que $c'(t), c''(t) \in \langle u \rangle$.
Pel que fa al recíproc, d'acord amb la hipòtesi tenim que $c''(t) = \mu(t)c'(t)$. La funció μ és de classe C^0, ja que, de fet, $\mu(t) = c''(t) \cdot c'(t)/c'(t) \cdot c'(t)$. Conegudes $c(0) = c_o$ i $c'(0) = v_o$, el camí $c(t)$ és l'única solució d'una equació diferencial de segon ordre lineal amb condicions inicials $c(0) = c_o$ i $c'(0) = v_o$; concretament, $c(t) = c_o + \lambda(t) v_o$, on $\lambda(t) = \int_0^t \mathrm{d}s\, e^{\int_0^s \mathrm{d}u\, \mu(u)}$.

19. (b) $\gamma'(t) = (-\omega \sin \omega t, \omega \cos \omega t, a)$ té pendent a/ω.

20. (a) Derivant $R^\top(t)\, R(t) = I$ obtenim $R^{\top\prime}(0)\, R(0) + R^\top(0)\, R'(0) = 0$, és a dir, $A^\top + A = 0$.
(b) $R'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

21. $\operatorname{grad} f(x) = 2Ax$.

22. El volum és $9c/2$.

23. $-\dfrac{\operatorname{grad} F}{\partial F/\partial y}$.

24. $f(u) = u + C$; la superfície és un pla.

25. $a = 1/4$, $b = 1/4$, $c = -1/16$.

26. Una parametrització de la corba és $t \longrightarrow \left(\frac{1}{a} e^{a^2 t}, \frac{1}{b} e^{b^2 t}, e^{2a^2 t} + e^{2b^2 t} \right)$.

27. La imatge és $y = |x|$, $-1 < x < 1$,

28. (a) $z = 1 + 2x + y$.

29. Es tallen en $(0, 0)$ ortogonalment, i en $(1, 1)$ amb angle $\arccos(4/5)$.

30. (a) Sí, excepte potser en el punt $(0, 0)$.
(b) Sí.
(c) $(3a, 0)$.
(d) $\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = (0, 0)$.

31. L és parametritzada per $\gamma(t) = (a(t)\cos f(t), a(t)\sin f(t), c(t))$, i el meridià per $\mu(t) = (a(t)\cos\phi_o, a(t)\sin\phi_o, c(t))$.
Calculant-ne els vectors tangents podem obtenir $\cos\alpha$, o, millor, $\operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{a(t)^2}{a'(t)^2 + c'(t)^2} f'(t)^2$.

32. **f** hi és tangent arreu, **g** no hi és tangent enlloc, i **h** hi és tangent sobre dues circumferències, les obtingudes tallant l'esfera amb els plans verticals $x - y = \pm 1$.

5 Estudi local de funcions

Problemes bàsics

1. Per a cadascuna d'aquestes funcions, calculeu el polinomi de Taylor de grau ≤ 2 en el punt p indicat.

   (a) $\dfrac{\sin x}{1+x+y}, \quad p = (0,0)$.

   (b) $\sin xy^2, \quad p = (1,0)$.

   (c) $x^y, \quad p = (1,1)$.

   (d) $y^2/x^3, \quad p = (1,-1)$.

   (e) $e^{\sin x/\cos y}, \quad p = (0,0)$.

2. Utilitzant els polinomis de Taylor de les funcions elementals, calculeu el polinomi de Taylor en l'origen, de grau ≤ 3, per a les funcions següents:

   (a) $\sin xy + \cos xy$

   (b) $\log(2 + xy)$

   (c) $e^{x+y^2+z^3}$

   (d) $1/(1 + x + y + z)$

   (e) $e^{x^2+\sin y}$

3. Estudieu els punts crítics de les funcions següents:

   (a) $f(x,y) = e^{1-x^2-y^2}$.

   (b) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$.

   (c) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2y^2 + 4xy - 2x^2$.

   (d) $f(x,y,z) = x^2 - yz - \sin(xz)$.

   (e) $f(x,y,z) = 3\log x + 2\log y + 5\log z + \log(22 - x - y - z)$.

   (f) $f(x,y,z) = x^2z + y^2z + \dfrac{2}{3}z^3 - 4x - 4y - 10z + 1$.

   (g) $f(x,y,z) = \cos 2x \, \sin y + z^2$.

4. Estudieu, en funció de k, el caràcter dels punts crítics de $f(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) + kxy$.

5. Considereu la funció $f(x,y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$.

   (a) Proveu que l'origen n'és l'únic punt crític, i estudieu-ne el caràcter mitjançant la hessiana.

   (b) Sigui $\varphi(t) = f(at, bt)$ la funció f avaluada al llarg d'una recta que passa per l'origen. Proveu que té un mínim a $t = 0$, independentment de la recta triada.

   (c) Proveu que f no té mínim en l'origen.
   (Veieu que $f(0,0) = 0$ però que en tot veïnat de $(0,0)$ f pren valors < 0 i valors > 0.)

6. Considereu la funció $f(x,y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}$.

   (a) Quin és el seu domini? Hi és de classe C^∞?

   (b) Proveu que el seu únic punt crític és el $(0,0)$.

   (c) Calculeu el polinomi de Taylor de f de grau ≤ 2 en $(0,0)$.
   (Podeu utilitzar que $(1+z)^p = 1 + pz + p(p-1)z^2/2 + \ldots$ i $e^z = 1 + z + z^2/2 + \ldots$)

   (d) Determineu el caràcter del punt crític de f.

   (e) Proveu que f no té mínim absolut. (Podeu considerar $f(0,y)$.)

7. Trobeu els extrems de les funcions f quan les variables estan sotmeses als lligams que s'indiquen:

   (a) $f(x,y) = x; \quad x^2 + 2y^2 = 3$.

(b) $f(x,y) = x^2y; \quad xy = 1.$

(c) $f(x,y,z) = x - y + z; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2.$

(d) $f(x,y,z) = x + y + z; \quad x^2 - y^2 = 1,\ 2x + z = 1.$

8. Considereu la funció $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ i el subconjunt $C \subset \mathbf{R}^2$ definit per $x^3 = y^2$. Obteniu el mínim de $f|_C$. Per què no es pot obtenir mitjançant el mètode dels multiplicadors de Lagrange?

9. Trobeu els extrems locals de les funcions $y(x)$ definides, aplicant el teorema de la funció implícita, per les equacions següents:

   (a) $x^3 + y^3 - 3xy = 0.$

   (b) $x^2 + y^2 + kxy = 0.$

10. Trobeu els extrems absoluts de la funció $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - x^4$ sobre la bola definida per $x^2 + y^2 \leq 3$.

11. Trobeu els extrems absoluts de la funció $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - x^3 + 3y^2$ definida sobre el conjunt $Q = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$.

12. Trobeu els extrems absoluts de la funció $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$ definida sobre el conjunt $A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \leq 1\}$.

13. Essent $a, b, c > 0$ constants, trobeu els extrems absoluts de $f(x,y,z) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}$ sobre la regió
$$H = \left\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ z \geq 0\right\}.$$

14. Trobeu la mínima distància entre els punts de les corbes d'equacions $x + y = 4$ i $x^2 + 4y^2 = 4$.

15. Calculeu el màxim volum d'un paral·lelepípede de cares paral·leles als eixos, inscrit dins l'el·lipsoide d'equació $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

16. Trobeu els vèrtexs i semieixos de l'el·lipse obtinguda intersecant l'el·lipsoide $\dfrac{1}{4}x^2 + y^2 + z^2 = 1$ amb el pla d'equació $x + y + z = 0$.

Problemes addicionals

17. Fent servir una funció adient i el seu polinomi de Taylor de grau 2, calculeu aproximadament $0.97^{1.07}$.

18. Sigui $g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funció de classe C^2 amb $g(0,1) = 0$, $\mathrm{J}g(0,1) = (2\ -3)$ i $\mathrm{H}g(0,1) = \begin{pmatrix} 3/4 & 5/4 \\ 5/4 & 5/4 \end{pmatrix}$.
Sigui $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció de classe C^1 amb $f(0) = 1$ i $f'(0) = -1/8$.
Calculeu el polinomi de Taylor de grau ≤ 2, en el punt $(0,1)$, de la funció
$$F(x,y) = \log(1 + x^2 + xy + y^2) + \int_0^{g(x,y)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

19. L'equació $z + 1 + \sin z - (x+1)^2(y+1)^2 = 0$ defineix implícitament $z = Z(x,y)$ en un veïnat del punt $(0,0,0)$. Calculeu raonadament el polinomi de Taylor de grau ≤ 2 de Z en el $(0,0)$ escrivint $Z(x,y) = c + ax + by + Ax^2 + By^2 + Cxy + o(\|(x,y)\|^2)$ i substituint-ho dins l'equació.

20. Si $f\colon U \to \mathbf{R}$ és una funció de classe C^{k+1}, i $[a, a+\mathbf{u}] \subset U$, obteniu l'expressió del residu de la fórmula de Taylor $f(a+\mathbf{u}) = P_k(f,a;\mathbf{u}) + R_k(f,a;\mathbf{u})$ en forma integral.
(Considereu la funció d'una variable $\varphi(t) = f(a + t\mathbf{u})$ i escriviu-ne la fórmula de Taylor amb el residu en forma integral.)

21. Estudieu els punts crítics de les funcions següents:

    (a) $f(x,y) = x^5y + y^5x + xy.$

(b) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$, per a $(x, y) \in \,]0, 2\pi[\, \times \,]0, 2\pi[$.

(c) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$.

(d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz$.

22. Sigui $f\colon U \to \mathbf{R}$ una funció de classe C^2 definida en un obert $U \subset \mathbf{R}^n$.

(a) Proveu que, si f té un mínim en un punt $p \in U$, llavors la hessiana $\mathrm{H}f(p)$ és semidefinida positiva.
(Fixat $\mathbf{u}$, considereu la funció d'una variable $\varphi(t) = f(p + t\mathbf{u})$, i recordeu que $\varphi''(0) = f''(p; \mathbf{u})$.)
Doneu un enunciat anàleg quan el punt és un màxim en lloc d'un mínim.

(b) L'enunciat recíproc és fals: doneu dos exemples de funcions $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ per als quals $(0, 0)$ sigui un punt crític amb hessiana semidefinida positiva, però que en un cas el punt sigui mínim i en l'altre coll.

23. Siguin $A \subset \mathbf{R}^2$ un conjunt compacte, i $f\colon A \to \mathbf{R}$ una funció contínua, de classe C^2 en l'interior $\mathring{A}$. Denotem per Δ el laplacià ($\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$).

(a) Si $\Delta f > 0$ en tot punt de $\mathring{A}$ proveu que el màxim de f *no* s'assoleix en $\mathring{A}$, sinó en la frontera.
(Si el màxim s'assoleix en un punt interior (x_o, y_o), podeu utilitzar el problema anterior per a provar que $\Delta f(x_o, y_o) \leq 0$, fet que contradiu la hipòtesi.)

(b) Doneu un enunciat similar suposant que $\Delta f < 0$ en $\mathring{A}$.
Canvia alguna cosa si treballem en $\mathbf{R}^n$ en lloc de $\mathbf{R}^2$?

24. Trobeu els extrems de les funcions f quan les variables estan sotmeses als lligams que s'indiquen:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$; $\quad x^2 + y^2 = 1$.

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$; $\quad 2x + 3y = 0$.

25. Identifiquem l'espai vectorial $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ amb $\mathbf{R}^4$, $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \leftrightarrow (x, y, z, t)$. Dins $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$, sigui M el subconjunt format per les matrius amb determinant 1.
Considerem $f\colon \mathbf{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $f(A) = \text{traça}(A)$, i sigui $f_o = f|_M$.

(a) Proveu que M és una hipersuperfície regular dins $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$.

(b) Trobeu els punts crítics de f_o utilitzant el mètode dels multiplicadors de Lagrange.

(c) Proveu que l'aplicació $g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & \frac{1+yz}{x} \end{pmatrix}$ és una parametrització regular de M al voltant del punt $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(d) Utilitzeu $\bar{f} = f \circ g$ per a estudiar el caràcter d'un dels punts crítics de f_o obtinguts en el segon apartat.

(e) És M compacte? És f_o fitada? (Podeu considerar $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right)$.)

26. Sigui $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ una matriu simètrica, $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ la forma quadràtica corresponent, $f(x) = \sum_{i,j} A_{ij} x^i x^j$, i S l'esfera unitat de $\mathbf{R}^n$, $S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x \cdot x = 1\}$.

(a) Proveu que $f|_S$ assoleix extrems absoluts.

(b) Proveu que, si x és un extrem de $f|_S$, llavors x és un vector propi de A.
(Podeu usar que $\operatorname{grad} f(x) = 2Ax$.)

(c) Si x és un vector propi de A unitari, quant val $f(x)$?

(d) Identifiqueu el subconjunt $f(S) \subset \mathbf{R}$.

27. Sigui $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ un punt, i $g(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0$ un pla. Considereu la funció $f(x, y, z) = \dfrac{1}{2}\big((x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2\big)$. Apliqueu el mètode dels multiplicadors de Lagrange per a trobar el valor mínim de f sobre el pla.
(Escriviu $\mathrm{J}f = \lambda\, \mathrm{J}g$. D'entrada, aquesta equació diu que el punt crític es troba en la recta per (a, b, c) amb vector director (A, B, C). Multiplicant les tres equacions per A, B i C, respectivament, podeu determinar λ. I elevant les tres equacions al quadrat podeu calcular f en el punt crític.)
Deduïu-ne que la distància entre el punt i el pla val $|Aa + Bb + Cc + D| \,/\, \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

28. Trobeu el màxim absolut de la funció $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z$ amb la condició $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
29. Donada $f(x, y) = a^2x^2 + b^2y^2$, calculeu el màxim valor de f sobre l'el·lipse d'equació $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, on $a > b$.
30. Trobeu els extrems absoluts de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre el conjunt
$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x, y, z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}.$$
31. Trobeu els extrems absoluts de $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + y + x$ sobre el conjunt
$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y \geq -3,\ x \leq y,\ y \leq 0\}.$$
32. Trobeu els extrems absoluts de $f(x, y) = x + 3xy - 2y^2$ sobre el conjunt
$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}.$$
33. Considereu la funció $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-(x^2+y^2)}$.
    (a) Determineu i classifiqueu els punts crítics de f.
    (b) Determineu els extrems absoluts de f sobre el disc $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
34. Considereu la funció $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida per $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$.
    (a) Trobeu i classifiqueu tots els seus punts crítics.
    (b) Calculeu els extrems absoluts de f en el quadrat $[\pi/2, \pi] \times [\pi/2, \pi]$.
35. Considereu el conjunt $T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x + y \leq 2\}$. Siguin r_1, r_2, r_3 les rectes segons els costats del triangle frontera de T. Considereu la funció $f\colon T \to \mathbf{R}$ que assigna a cada punt $p \in T$ la suma dels quadrats de las distàncies de p a r_1, r_2, r_3. Justifiqueu que f té màxim i mínim absoluts i calculeu-los
(La distància entre el punt (a, b) i la recta $Ax + By + C = 0$ val $\dfrac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.)
36. Trobeu els punts de la corba $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16$ que estan a distància mínima i màxima de l'origen.
37. Dissenyeu un contenidor cilíndric que contingui $1\,\mathrm{m}^3$ de líquid fent servir la mínima quantitat de material.
38. Calculeu els punts crítics de la restricció de $U(x, y, z) = mgz$ a l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, i estudieu-ne el caràcter. Interpreteu físicament el resultat.

Respostes

1. (a) $P_2(x, y) = x - x^2 - xy$.
    (b) $P_2(u, v) = v^2$.
    (c) $P_2(u, v) = 1 + u + uv$.
    (d) $P_2(u, v) = 1 - 3u - 2v + 6u^2 + 6uv + v^2$.
    (e) $P_2(x, y) = 1 + x + x^2/2$.
2. (a) $1 + xy$.
    (b) $\log 2 + xy/2$.
    (c) $1 + x + x^2/2 + y^2 + x^3/6 + xy^2 + z^3$.
    (d) $1 - (x + y + z) + (x + y + z)^2 - (x + y + z)^3$.
    (e) $1 + y + x^2 + y^2/2 + x^2y$.
3. (a) $(0, 0)$ és un màxim local.
    (b) $(-1/4, -1/4)$ és un mínim local.
    (c) $(0, 0)$ és un coll (o punt de sella); $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ són mínims locals.

(d) $(0,0,0)$ és un coll.

(e) $(6,4,10)$ és un màxim local.

(f) $(2,2,1)$ i $(-2,-2,-1)$ són colls; $(1,1,2)$ és un mínim i $(-1,-1,-2)$ un màxim.

(g) Els punts $\left(\frac{\pi}{2}k, \frac{\pi}{2}+\pi\ell, 0\right)$, amb $k,\ell \in \mathbf{Z}$, són colls quan $k+\ell$ és parell, i mínims quan $k+\ell$ és imparell.
Els punts $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, \pi\ell, 0\right)$, amb $k,\ell \in \mathbf{Z}$, són colls.

4. Si $|k| \neq 1$, l'únic punt crític és $(0,0)$, que és un mínim local quan $|k|<1$ i un coll quan $|k|>1$.
Si $k=1$ els punts crítics són els de la recta $x+y=0$, i si $k=-1$ són els de la recta $x-y=0$; en ambdós casos són mínims locals.

5. (b) $\varphi(t) = b^2t^2 - 4a^2bt^3 + 3a^4t^4$;
$\varphi'(0) = 0$; $\varphi''(0) = 2b^2$, que és >0 si $b \neq 0$.
Si $b=0$, $\varphi(t) = 3a^4t^4$, també mínim a $t=0$.

   (c) Per als punts de les paràboles $y=x^2$, $y=3x^2$ la funció es nul·la, per als que estan entre ambdues paràboles la funció és negativa, i per als altres és positiva.

6. (c) $f(x,y) = -1 + x^2 + 2\sqrt{2}y^2 + o_2$.

   (d) Mínim local.

7. (a) $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$ són màxim i mínim respectivament.

   (b) No té extrems.

   (c) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ són màxim i mínim respectivament.

   (d) No té extrems.

8. El mínim s'asoleix en el punt $(0,0)$. No es pot obtenir pel mètode dels multiplicadors perquè C no és una corba regular en aquest punt.

9. (a) y té un màxim local per a $x = \sqrt[3]{2}$.

   (b) y no té cap extrem local.

10. El valor mínim és -3, i s'assoleix en $(\sqrt{3},0)$ i $(-\sqrt{3},0)$; el valor màxim és 6, i s'assoleix en $(0,\sqrt{3}$ i $(0,-\sqrt{3})$.

11. El mínim és $f(1,-1/3) = -1/3$ i el màxim és $f(-1,1) = 7$.

12. El mínim és $f(-1/2,-1/2,-1/2) = -3/4$ i el màxim és $f(\sqrt{3/2},\sqrt{3/2},1) = 5+\sqrt{6}$.

13. Màxim en $\frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)$, amb valor $\sqrt{3}$. Míxim en $-\frac{1}{\sqrt{2}}(a,b,0)$, amb valor $-\sqrt{2}$.

14. Si anomenem (x,y) els punts de la primera corba i (u,v) els punts de la segona, la funció a extremar és $(x-u)^2+(y-v)^2$, amb les condicions donades per les equacions de les corbes.
La distància mínima és $\frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, i s'assoleix entre els punts $(x,y) = \left(2+\frac{3}{2\sqrt{5}}, 2-\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$ i $(u,v) = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

15. $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

16. Vèrtexs: $\pm(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ i $\pm(2/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$. Semieixos: 1 i $\sqrt{2}$.

17. Podeu usar, per exemple, $f(x,y) = x^y$, al voltant de $(1,1)$. S'obté $0'9679\ldots$.

18. $P_2(x,y) = \ln 2 + \frac{5}{2}x - 2(y-1) + \frac{1}{2}x^2 + 2x(y-1) + \frac{1}{16}(y-1)^2$.

19. $Z(x,y) = x+y+\frac{1}{2}(x^2+y^2+4xy) + o(\|(x,y)\|^2)$. (Compareu amb el problema 22 del tema 3.)

20. $R_k(f,a;\mathbf{u}) = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(a+t\mathbf{u};\mathbf{u})\,\mathrm{d}t$.

21. (a) $(0,0)$ és un coll.

    (b) $(\pi/2,\pi/2)$, $(3\pi/2,3\pi/2)$, $(\pi/6,\pi/6)$, $(5\pi/6,5\pi/6)$, $(3\pi/2,\pi/2)$, $(\pi/2,3\pi/2)$ són coll, mínim, màxim, màxim, coll, coll, respectivament.

    (c) $(0,0,0)$ és un coll.

    (d) $(0,0,0)$ és un mínim; $(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},2)$, $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},2)$, $(2\sqrt{2},2\sqrt{2},-2)$, $(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2},-2)$ són colls.

22. (a) Si el punt és un màxim llavors la hessiana és semidefinida negativa.

    (b) Per exemple $f(x,y) = x^2+y^4$ i $f(x,y) = x^2-y^4$.

23. (b) Si $\Delta f < 0$ en $\mathring{A}$ llavors el mínim de f no s'assoleix en $\mathring{A}$.
24. (a) Tots els punts de $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ són extrems condicionats (de fet, f és constant sobre C).
    (b) $(0, 0)$ és un mínim (de fet, ja ho és per a la funció f abans de sotmetre-la al lligam).
25. (a) La jacobiana de $F(x, y, z, t) = xt - yz$ només s'anul·la en la matriu 0, que no és de M.
    (b) Són $\pm I$, on I és la matriu unitat.
    (c) De fet, g correspon a expressar M en forma explícita com a $t = \text{funció}(x, y, z)$.
    (d) Tenim $\bar{f}(1, 0, 0) = I$. En aquest punt la hessiana de $\bar{f}$ és indefinida, i doncs és un coll. Anàlogament estudiaríem f al voltant del punt $-I$.
    (e) No. No.
26. (d) L'interval $[\lambda, \mu]$, on λ i μ són el més petit i el més gran dels valors propis de A.

28. 17/8.
29. a^4.
30. Assoleix el mínim en el punt $(0, 0, 0)$ i val 0.
    Assoleix el màxim en els punts $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ i val 1.
31. El màxim s'assoleix en $(-3, 0)$ i el mínim en $(-1, -1)$.
32. El màxim absolut s'assoleix en $(1, 3/4)$ i val 17/8. El mínim absolut s'assoleix en $(-1, 1)$ i val -6.
33. (a) f té un mínim local en $(0, 0)$.
    f té colls en els punts $(\pm 1, 0)$.
    f té màxims locals en els punts $(0, \pm 1)$.
    (b) El màxim absolut és 3 i s'obté en els punts $(0, \pm 1)$.
    El mínim absolut és 0 i s'obté en $(0, 0)$.
34. (a) Són els punts de la família $\left\{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + h\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \mid h, k \in \mathbf{Z}\right\}$.
    Si h i k són parells la funció hi assoleix un màxim.
    Si h i k són imparells la funció hi assoleix un mínim.
    Si un és parell i l'altre imparell la funció hi té un coll.
    (b) El màxim absolut és 1 i s'obté en $(\pi/2, \pi/2)$ i en (π, π).
    El mínim absolut és -1 i s'obté en $(\pi, \pi/2)$ i en $(\pi/2, \pi)$.

35. En el punt $(2/5, 1/5)$ s'assoleix el valor mínim, 2/5. En el punt $(0, 2)$ s'assoleix el valor màxim, 4.
36. A distància mínima: $(1, 1)$ i $(-1, -1)$. A distància màxima: $(2, -2)$ i $(-2, 2)$.
37. $r = \dfrac{1}{(2\pi)^{1/3}}, \quad h = \dfrac{2}{(2\pi)^{1/3}}$.
38. Els punts crítics són $(0, 0, -R)$ (mínim) i $(0, 0, R)$ (màxim). Són els punts d'equilibri (estable i inestable, respectivament) d'una partícula de massa m obligada a moure's sobre l'esfera i sotmesa a la força de la gravetat.

6 Integració

Problemes bàsics

1. Calculeu les integrals de les funcions següents sobre els rectangles indicats:

   (a) $f(x,y) = y^2;\quad |x| \le 1,\ |y| \le 2.$

   (b) $f(x,y) = x|y|;\quad 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 3.$

   (c) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2;\quad -1 \le x,y,z \le 1.$

   (d) $f(x,y,z) = xyz;\quad 0 \le x,y,z \le 1.$

2. Calculeu les integrals de les funcions següents sobre les regions indicades:

   (a) $f(x,y) = x-y;\quad \{(x,y) \mid x+y<1,\ x>0,\ y>0\}.$

   (b) $f(x,y) = x^2y^2;\quad \{(x,y) \mid x \ge 0,\ |x|+|y| \le 1\}.$

   (c) $f(x,y) = 1;\quad \{(x,y) \mid x^2 \le y \le x\}.$

   (d) $f(x,y) = 1;\quad \{(x,y) \mid x+y \ge 1,\ x^2+y^2 \le 1\}.$

   (e) $f(x,y,z) = z;\quad \{(x,y,z) \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1,\ 0 \le z \le 2-x^2-y^2\}.$

   (f) $f(x,y,z) = (1+x+y+z)^{-3};$ regió limitada pels tres plans coordenats i el pla $x+y+z=1$.

   (g) $f(x,y,z) = xy^2z^3;$ regió limitada per la superfície $z=xy$ i els plans $y=x$, $x=1$, $z=0$.

3. Reexpresseu les integrals dobles següents canviant l'ordre d'integració:

   (a) $\displaystyle\int_0^4 \mathrm{d}x \int_{3x^2}^{12x} \mathrm{d}y\, f(x,y).$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} \mathrm{d}x\, f(x,y).$

4. Si $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 3\}$ i f és contínua en A, rescriviu $\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ integrant primer respecte a x, després respecte a y, i després respecte a z.

5. Considereu la funció definida en $D = [0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$ per $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < \sin x \\ 0 & \text{si } y = \sin x \\ 3 & \text{si } y > \sin x \end{cases}$

   Quin és el conjunt de punts de discontinuïtat de f? És f integrable? Calculeu la integral $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, f(x,y)$.

6. Calculeu $\iint_T (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, essent T la regió definida per $y \le 2x+2$, $x+y+1 \ge 0$, $x^2+y \le 5$, $x \le 2$.

7. Sigui R el rectangle de vèrtexs $(1,2)$, $(1,5)$, $(3,2)$ i $(3,5)$. Sigui T l'aplicació lineal representada per la matriu $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Obteniu l'àrea de $T(R)$.

8. Sigui U el conjunt definit per $v^2+u^2<1$, $u>0$, $v>0$, i considereu l'aplicació $\varphi(u,v) = (u^2-v^2, 2uv)$. Calculeu la integral sobre $\varphi(U)$ de la funció $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

9. Calculeu les integrals $\int_A f$ indicades:

   (a) $f(x,y) = xy^2;\ A = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1,\ x>0,\ y>0\}.$

   (b) $f(x,y) = x^2+y^2;\ A = \{(x,y) \mid x^2+y^2-2ax \le 0\}.$

   (c) $f(x,y) = x^2+y^2;\ A = \{(x,y) \mid ax \le x^2+y^2 \le a^2\}.$

   (d) $f(x,y,z) = 7yz;\ A = \{(x,y,z) \mid y>0,\ 0<z<a,\ x^2+y^2<b^2\}$, amb $a,b>0$ constants.

   (e) $f(x,y,z) = z^2;$ A la regió comuna a les esferes $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ i $x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$.

   (f) $f(x,y,z) = xyz;\ A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2<1,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}.$

   (g) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2};\ A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2<1,\ x^2+y^2<z^2,\ z>0\}.$

10. Sigui $D \subset \mathbf{R}^2$ un conjunt mesurable Jordan, simètric respecte a l'eix OX (és a dir, si $(x,y) \in D$, també $(x,-y) \in D$).

    (a) Raoneu que podeu escriure $D = D_1 \cup D_2$, on D_1 és dins el semiplà superior i $D_2 = \varphi(D_1)$, essent $\varphi(x,y) = (x,-y)$ la simetria respecte a l'eix OX. Són disjunts D_1 i D_2?

    (b) Sigui $f\colon D \to \mathbf{R}$ integrable Riemann. Proveu que si f és parella respecte a y (és a dir, $f(x,-y) = f(x,y)$) llavors $\int_D f = 2\int_{D_1} f$, i si f és imparella respecte a y ($f(x,-y) = -f(x,y)$) llavors $\int_D f = 0$.
    (Apliqueu el teorema del canvi de variables amb φ per a calcular $\int_{D_2} f$.)

11. Calculeu les integrals $\iint_A f$ indicades. (Utilitzeu canvis de variables apropiats.)

    (a) $f(x,y) = 1$; A el conjunt definit per $(x+y)^2 + (2x-y+1)^2 \le 1$.

    (b) $f(x,y) = x^2 + y^2$; A la regió definida per les desigualtats $\alpha \le x^2 - y^2 \le \beta$, $\gamma \le xy \le \delta$, on $0 < \alpha < \beta$, $0 < \gamma < \delta$ són constants donades.

    (c) $f(x,y) = e^{(x-y)/(x+y)}$; $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ 1 < x+y < 2\}$.

12. Calculeu:

    (a) L'àrea tancada per l'el·lipse de semieixos a, b.

    (b) El volum tancat per l'el·lipsoide de semieixos a, b, c.

13. Sigui A la regió plana definida en coordenades polars per $\phi_1 < \phi < \phi_2$, $r < R(\phi)$, on R és una funció positiva.

    (a) Proveu que la seva àrea es pot calcular amb la integral $\displaystyle\int_{\phi_1}^{\phi_2} \mathrm{d}\phi\, \frac{1}{2} R(\phi)^2$.

    (b) Calculeu l'àrea tancada per la cardioide: $r = a(1+\cos\phi)$.

    (c) Calculeu l'àrea tancada per la lemniscata: $r^2 = a^2 \cos 2\phi$.

14. Sigui A un sòlid de revolució obtingut fent girar la regió $B \subset \{(x,y,z) \mid x > 0,\ y = 0\}$ al voltant de l'eix OZ.

    (a) Proveu que el seu volum es pot calcular amb la integral $2\pi \iint_B \mathrm{d}x\mathrm{d}z\, x$.

    (b) Suposem que B és la regió simple descrita per $z_1 < z < z_2$, $f(z) < x < g(z)$. Proveu que el volum de revolució és $\pi \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\, \big(g(z)^2 - f(z)^2\big)$.

    (c) Calculeu el volum d'un con circular recte de radi a i alçada h.

    (d) Calculeu el volum tancat pel tor de generatriu $(x-a)^2 + z^2 = b^2$ (vegeu tema 4, problema 17).

15. Sigui D el recinte determinat per $x^2 + y^2 \le 8$, $y \ge 0$, $y \le 2$, i sigui $I = \displaystyle\iint_D y\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

    (a) Expresseu I aplicant el teorema de Fubini, en els dos ordres possibles, en coordenades cartesianes.

    (b) Expresseu I en coordenades polars.

    (c) Calculeu el valor de I.

    (d) Sense fer més càlculs, raoneu quins són els valors de les integrals

$$\iint_D x\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \iint_D (x+y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \iint_D xy\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

16. Considereu la funció $f(x,y) = \displaystyle\int_y^x e^{xyt}\mathrm{d}t$. Calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ usant la fórmula de Leibniz. Comproveu el resultat calculant primer la integral i derivant després.

17. Comproveu que la funció $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x f(\xi)\sin(x-\xi)\, \mathrm{d}\xi$ satisfà l'equació diferencial $\varphi'' + \varphi = f$.

18. Calculeu les integrals impròpies $\int_A f$:

(a) $f(x,y) = xe^{-y}$; $A = \{(x,y) \mid 0 \leq x < 1, y \geq 0\}$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y}}$; $A = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$.

19. Calculeu la integral $J = \displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ i deduïu-ne el valor de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$.
(Useu coordenades polars.)

20. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ i $B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$, determineu per a quins valors de $\alpha > 0$ existeix la integral impròpia $\displaystyle\iiint_B \frac{\mathrm{d}V}{r^\alpha}$ i calculeu-la.
(Integreu fora d'una esfera de radi ε centrada en l'origen.)

21. Es consideren una esfera i un con circular tals que el centre de l'esfera està situat sobre l'eix del con i el vèrtex del con sobre la superfície de l'esfera. Determineu la semiobertura α del con per tal que els volums de les parts de l'esfera interior i exterior al con siguin iguals.

22. Considereu el paraboloide d'equació $z = a - x^2 - y^2$ i el pla $z = \lambda a$, on $0 < \lambda < 1$. Sigui $\mathcal{V}(A)$ el volum del paraboloide comprès entre el seu vèrtex i el pla, i $\mathcal{V}(B)$ el volum comprès entre el pla donat i el pla XY. Determineu λ per tal que se satisfaci que $\mathcal{V}(A) = k\,\mathcal{V}(B)$.

Problemes addicionals

23. Calculeu la integral de la funció següent sobre la regió definida per les desigualtats indicades:
$$f(x,y) = x^2 + y^2; \quad |x| \leq |y| \leq 2.$$

24. Calculeu l'àrea de les regions definides per les desigualtats indicades:

(a) $a \leq \dfrac{y}{x} \leq b$, $\ \alpha \leq \dfrac{y}{x^2} \leq \beta$, amb $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$.

(b) $x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}$ (astroide).

25. Expresseu en coordenades polars la integral $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sobre el domini limitat per les rectes $y = x$, $y = -x$ i $y = 1$.

26. Considereu el recinte $S = S_1 \cup S_2$, on S_1 és el recinte limitat per les rectes $y = 0$, $y = x$, $x = 1$, $x = 2$, i S_2 és el recinte limitat, en el primer quadrant, per les rectes $y = x$, $y = 3x$ i les circumferències $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 8$. Calculeu $\displaystyle\iint_S (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

27. Invertiu l'ordre d'integració per a calcular $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} \mathrm{d}y \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{2} \mathrm{d}y \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)$.

28. Calculeu les derivades totals o parcials de les funcions següents:

(a) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin tx}{t} \mathrm{d}t$.

(b) $F(x,y) = \displaystyle\int_0^x \cos(ty)\mathrm{d}t$.

(c) $F(x,y) = \displaystyle\int_1^x e^{y-t}\mathrm{d}t$.

29. Calculeu la integral de la funció $f(x,y) = |\cos(x+y)|$ sobre el quadrat $[0,\pi] \times [0,\pi]$.
(Apliqueu el teorema de Fubini.)

30. Considereu la funció $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ definida per $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ 2y & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$. Estudieu l'existència de les integrals $\iint_{[0,1]\times[0,1]} f$, $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y\, f(x,y)$, $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x\, f(x,y)$.

31. Sigui $A \subset \mathbf{R}^3$ un conjunt mesurable Jordan, tal que les seccions horitzontals $A_c = A \cap \{z = c\}$ són mesurables Jordan (en els plans $z = c$).

    (a) Suposem que $A \subset R \times [z_1, z_2]$, amb $R \subset \mathbf{R}^2$ un cert rectangle compacte. Proveu que $\mathrm{vol}(A) = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\, \text{àrea}(A_z)$.
    (Usant el teorema de Fubini, $\int_A 1 = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z \iint_R \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, \chi_A(x, y, z)$, on χ_A és la funció característica de A.)

    (b) Proveu el *principi de Cavalieri*: si A i B tenen les seccions horitzontals amb mateixes àrees, llavors $\mathrm{vol}(A) = \mathrm{vol}(B)$.

    (c) Sense fer cap càlcul, proveu que el cilindre recte $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq h\}$ i el cilindre oblic $\{(x, y, z) \mid x^2 + (y - z)^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq h\}$ tenen mateix volum.

32. Obteniu la probabilitat que l'equació $ax^2 + bx + c = 0$, els coeficients de la qual s'escullen a l'atzar en l'interval $[0, 1]$, tingui arrels reals.

33. Considereu el sòlid pla (de densitat uniforme) limitat per la cardioide d'equació $r = a(1 + \cos\phi)$ en coordenades polars. Calculeu-ne el centre de massa.

34. Considereu el sòlid pla de massa m limitat per la lemniscata d'equació $r^2 = a^2 \cos 2\phi$ en coordenades polars. Calculeu-ne el moment d'inèrcia respecte a un eix perpendicular al pla i que passa per l'origen.

35. Un disc circular de radi R està carregat amb una densitat de càrrega $\sigma = br$. Calculeu el camp elèctric en un punt de l'eix del disc a distància d del pla del disc.

36. Demostreu que la força d'atracció gravitatòria d'una bola homogènia sobre un punt exterior a la bola és la mateixa que si es considera tota la massa concentrada en el centre de la bola.

37. Calculeu la força d'atracció gravitatòria que exerceix un tronc de con circular i homogeni sobre un punt situat en el vèrtex del con complet, expressant el resultat en funció de la densitat δ, l'angle de semiobertura del con, α, i l'alçada del tronc de con, h.
    (Situeu l'origen de coordenades en el vèrtex del con, i useu coordenades esfèriques.)

38. Un mètode per a calcular la *integral de Gauss* $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$: considereu les funcions $f(x) = \left[\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t\right]^2$ i $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2} \mathrm{d}t$.

    (a) Comproveu que $f(x) + g(x)$ és constant i calculeu-ne el valor.

    (b) Calculeu $\lim_{x \to \infty} g(x)$ i deduïu-ne el valor de la integral de Gauss.

39. Un mètode de càlcul de la *integral de Dirichlet* $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

    (a) Considereu la funció $F(\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$. Deriveu-la i obteniu que $\lim_{\lambda \to \infty} F(\lambda) = 0$.

    (b) Comproveu que $I = \lim_{\lambda \to 0} F(\lambda)$.

    (*Observació* La integral I és impròpia. Els resultats estudiats en aquest tema sobre continuïtat i derivació d'integrals depenendents de paràmetres no són sempre vàlids per a integrals impròpies, encara que sí que ho són en aquest cas.)

40. Considereu el recinte $A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q \leq 1\right\}$ i la funció $f(x, y) = x^{\alpha-1} y^{\beta-1}$ $(a, b, p, q, \alpha, \beta > 0)$. Demostreu la *fórmula de Dirichlet bidimensional*:

$$\int_A f = \frac{a^\alpha b^\beta}{pq} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} + 1\right)}.$$

(Feu el canvi $u = (x/a)^p$, $v = (y/b)^q$, apliqueu la definició de la funció B, i la seva expressió en termes de la funció Γ.)
(*Observació* Per a α o β menors que 1 la fórmula de Dirichlet calcula una integral impròpia.)

41. Calculeu l'àrea S_n del recinte limitat, en el primer quadrant, pels eixos coordenats i la corba $x^{2/n} + y^{2/n} = a^{2/n}$.
(*Observació* Expresseu el resultat segons la paritat de n.)

Respostes

1. (a) 32/3.
   (b) 10.
   (c) 8.
   (d) 1/8.
2. (a) 0.
   (b) 1/90.
   (c) 1/6.
   (d) $\dfrac{\pi-2}{4}$.
   (e) 176/45.
   (f) $\log\sqrt{2} - 5/16$.
   (g) 1/364.
3. (a) $\displaystyle\int_0^{48} \mathrm{d}y \int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} \mathrm{d}x\, f(x,y)$.
   (b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\, f(x,y) + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y\, f(x,y)$.
4. $\displaystyle\int_0^3 \mathrm{d}z \int_{-z}^{z} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} \mathrm{d}x\, f(x,y,z)$.
5. El conjunt de punts de discontinuïtat és $\{(x, \sin x) \mid x \in [0, \pi/2]\}$. f és integrable, atès que aquest conjunt és de mesura nul·la. La integral val $\dfrac{3\pi^2}{4} - 2$.
6. 287/20.
7. 42.
8. π.
9. (a) 1/15.
   (b) $\dfrac{3\pi a^4}{2}$.
   (c) $\dfrac{13}{32}\pi a^4$.
   (d) $\dfrac{7}{3}a^2b^3$.
   (e) $\dfrac{59\pi R^5}{3\cdot 5\cdot 2^5}$.
   (f) 1/48.
   (g) $\pi^2/16 - \pi/8$.
10. (b) $\int_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{D_1} f(x,-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\int_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ segons la hipòtesi.
11. (a) $\pi/3$.
    (b) $(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)$.
    (c) $\dfrac{3}{2}\sinh 1$.
12. (a) πab.
    (b) $\frac{4}{3}\pi abc$.
13. (b) $3\pi a^2/2$.
    (c) a^2.
14. (c) $\frac{1}{3}\pi a^2 h$.
    (d) $2\pi^2 ab^2$.

15. (a) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}y\, y \int_{-(8-y^2)^{1/2}}^{(8-y^2)^{1/2}} \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int_0^2 \mathrm{d}y\, y + \int_{-\sqrt{8}}^{-2} \mathrm{d}x \int_0^{(8-x^2)^{1/2}} \mathrm{d}y\, y + \int_2^{\sqrt{8}} \mathrm{d}x \int_0^{(8-y^2)^{1/2}} \mathrm{d}y\, y.$

    (b) $\displaystyle 2\left(\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{8}} \mathrm{d}r\, r^2 \sin\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2/\sin\theta} \mathrm{d}r\, r^2 \sin\theta\right).$

    (c) $\displaystyle \frac{16}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$

    (d) 0, I, 0.

16. $\displaystyle f(x,y) = \frac{e^{x^2 y} - e^{xy^2}}{xy}.\ \frac{\partial f}{\partial x} = \int_y^x yte^{txy}\mathrm{d}t + e^{x^2 y}.\ \frac{\partial f}{\partial y} = \int_y^x xte^{txy}\mathrm{d}t - e^{xy^2}.$

18. (a) $1/2$.

    (b) 2.

19. $J = \pi$, $I = \sqrt{\pi}$.

20. $\displaystyle I = \frac{4\pi}{3-\alpha}\, a^{3-\alpha}$, per a $\alpha < 3$.

21. $\displaystyle \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$

22. $\displaystyle \lambda = 1 - \sqrt{\frac{k}{1+k}}.$

23. $64/3$.

24. (a) $\displaystyle \frac{1}{6}(b^3 - a^3)\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right).$

    (b) $\displaystyle \frac{3}{8}\pi a^2.$

25. $\displaystyle \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^{1/\sin\theta} \mathrm{d}r\, r f(r\cos\theta, r\sin\theta).$

26. $5 + 15(\operatorname{arc\,tg} 3 - (\pi/4)) = 5 + 15 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}$.

27. $4(\pi+2)/\pi^3$.

28. (a) $\displaystyle F'(x) = \frac{4\sin x^4 - 3\sin x^3}{x}$

    (b) $\displaystyle F(x,y) = \frac{\sin xy}{y};\ \frac{\partial F}{\partial x} = \cos xy,\ \frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^x -t\sin ty\, \mathrm{d}t.$

    (c) $F(x,y) = -e^{y-x} + e^{y-1}$; $\partial F/\partial x = e^{y-x}$, $\partial F/\partial y = \int_1^x e^{y-t}\mathrm{d}t$.

29. 2π.

30. Només existeix la segona, i val 1.

32. $\displaystyle \frac{5 + 6\ln 2}{36} \approx 25'4\%.$

33. $\displaystyle (x_{\rm cm}, y_{\rm cm}) = \left(\frac{5}{6}a, 0\right).$

34. $\displaystyle \frac{\pi}{8} m a^2.$

35. $\displaystyle E_z = \frac{bd}{2\epsilon_0}\left(\ln\frac{R + (R^2+d^2)^{1/2}}{d} - \frac{R}{(R^2+d^2)^{1/2}}\right).$

37. $F_z = mG\, 2\pi\delta h\, (1 - \cos\alpha)$, on m és la massa del punt.

38. (a) $f'(x) + g'(x) = 0$ i $f(0) + g(0) = \pi/4$ impliquen $f(x) + g(x) = \pi/4$.

    (b) $\displaystyle \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t \le \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}t = e^{-x^2} \to 0$ quan $x \to \infty$. La integral de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ val $\displaystyle\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

39. $\displaystyle F'(\lambda) = \frac{-1}{1+\lambda^2}$, d'on $F(\lambda) = -\operatorname{arc\,tg}\lambda + \pi/2$. A més, $\displaystyle\lim_{\lambda\to 0} F(\lambda) = \pi/2$, d'on $I = \pi/2$.

41. $\displaystyle S_n = \frac{1}{2^n}\frac{n!!}{(n-1)!!} a^2 \xi_n$, essent $\xi_n = \begin{cases} 1 & n \text{ parell} \\ \pi/2 & n \text{ imparell} \end{cases}$

7 Integrals de línia i de superfície

Problemes bàsics

1. Calculeu la llargada de les corbes següents:
   (a) $c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $0 < t < 4\pi$ (hèlix).
   (b) $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$, $0 < t < 2\pi$ (cicloide).
   (c) $\gamma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$, $0 \leq t < 2\pi$ (astroide o hipocicloide de quatre puntes).
   (d) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (el·lipse de semieixos $a > b$).

2. Obteniu les fórmules que permeten calcular la llargada d'una corba plana en els supòsits indicats:
   (a) Corba en forma explícita $y = f(x)$, $x_1 < x < x_2$.
   (b) Corba en coordenades polars $r = f(\phi)$, $\phi_1 < \phi < \phi_2$.

3. Calculeu la llargada de les corbes expressades en coordenades polars següents:
   (a) $r = a(1 + \cos\phi)$, $0 < \phi < 2\pi$ (cardioide).
   (b) $r = e^{-\phi}$, $0 < \phi < +\infty$ (espiral logarítmica).

4. Calculeu les integrals de línia següents:
   (a) $\displaystyle\int_C \sqrt{a^2 - y^2}\,\mathrm{d}l$, on C és la corba $x^2 + y^2 = a^2$, $y > 0$.
   (b) $\displaystyle\int_C x^2\,\mathrm{d}l$, on C és la de la intersecció de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i el pla $x + y + z = 0$.

5. Calculeu les integrals de línia $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$ indicades:
   (a) $\displaystyle\int_{(R,0)}^{(-R,0)} x\,\mathrm{d}y$ al llarg de la corba $x^2 + y^2 = R^2$, $y > 0$.
   (b) $\displaystyle\int_{(-1,1)}^{(1,1)} (x^2 - 2xy)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y$, al llarg de la paràbola $y = x^2$.
   (c) $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, y - x)$; C és l'arc de l'el·lipse $x^2 + y^2/4 = 1$ orientat des del punt $(1, 0)$ fins al $(0, 2)$.
   (d) $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y^2, 3y - 4x)$; C és la frontera de $R = \{(x, y) \mid y^2 \leq x,\ y \geq x^2\}$ recorreguda en sentit positiu.
   (e) $\displaystyle\int_{(1,0,0)}^{(2,1,2)} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$ al llarg del segment que uneix ambdós punts, on $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{x-y}, \dfrac{1}{y-x}, z\right)$.
   (f) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$; C és l'arc de la paràbola $x = z^2$, $y = 0$, des de $(1, 0, -1)$ fins $(1, 0, 1)$.
   (g) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + y, y^2 + z, x + y + z)$; C és la circumferència $x^2 + y^2 = 3$, $z = 0$, orientada en el pla XY en sentit positiu.
   (h) $\displaystyle\oint_C y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$, on C és la corba intersecció de $z = xy$ amb $x^2 + y^2 = 1$, orientada de manera que la seva projecció sobre el pla XY sigui positiva.

6. Calculeu l'àrea de les superfícies següents:
   (a) Con $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} = \dfrac{z^2}{h^2}$, $0 < z < h$.
   (b) Esfera de radi a.
   (c) Casquet esfèric d'alçada h en l'esfera de radi a.

7. Integreu les funcions següents sobre les superfícies indicades:
   (a) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$, sobre l'hemisferi superior de l'esfera de radi a centrada en l'origen.

(b) $f(x, y, z) = z$, sobre $z = 1 - x^2 - y^2$, $z > 0$.

(c) $f(x, y, z) = x$, sobre el cilindre definit per $x^2 + y^2 = a^2$, amb $0 < z < 1$.

(d) $f(x, y, z) = 1$, sobre la superfície de $\mathbf{R}^3$ parametritzada per $g(u, v) = (u - v, u + v, uv)$, $u^2 + v^2 < 1$.

8. Calculeu l'àrea de les superfícies següents:

(a) La porció de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interior al cilindre $x^2 + y^2 = ay$, essent $a > 0$.

(b) El tros de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0$ (on $a \geq 0$) contingut dins el paraboloide $2z = x^2 + y^2$.

(c) El fragment del con d'equació $x^2 + y^2 = z^2$ limitat pels plans $z = 0$ i $y + 2z = 1$.

9. Sigui S una superfície de revolució obtinguda fent girar la generatriu $C \subset \{(x, y, z) \mid x > 0,\ y = 0\}$ al voltant de l'eix OZ.

(a) Si $x = a(t)$, $z = c(t)$ $(t_1 < t < t_2)$ és una parametrització injectiva i regular de C, proveu que l'àrea de S és $2\pi \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, a(t)\sqrt{a'(t)^2 + c'(t)^2}$.

(b) Apliqueu-ho a calcular l'àrea del tor de generatriu $(x - R)^2 + z^2 = r^2$.

10. Calculeu les integrals de superfície $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ indicades:

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, 1)$, sobre la superfície definida per $g(t, \theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta)$, amb $0 < t < 1$ i $0 < \theta < 2\pi$.

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$, a través de la frontera del cub $0 \leq x, y, z \leq 2$, orientada vers l'exterior.

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y - x, z)$, a través de la superfície $S = \{(x, y, z) \mid z = 4 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$, orientada amb la normal cap amunt.

(d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, x^2 y, x^2 z)$, a través de la frontera del conjunt definit per $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq b$, orientada cap a l'exterior.

(e) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, z^2)$, a través de la superfície cònica $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, tancada amb el pla $z = 0$, orientada cap a l'exterior

(f) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 1/3)$, a través de la superfície $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$, orientada amb la normal cap amunt.

(g) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, a través de la superfície $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$, $z > 0$, orientada amb la normal en sentit radial positiu.

(h) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 0, 0)$, sobre la part de l'esfera unitat continguda dins el con $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$, orientada amb la normal cap amunt.

(i) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y^2, z)$, sobre la frontera de la regió tancada pel pla $x + y + z = 1$ i els plans coordenats, orientada vers l'exterior.

(j) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, a través de la frontera de $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ z \geq 0,\ x \geq z\}$, orientada cap a l'exterior.

(k) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + e^y, z - y, x + y + z)$, a través de la superfície formada per $x^2 + y^2 + z^2 = 10z$ $(0 \leq z \leq 2)$ i $x^2 + y^2 = (z - 6)^2$ $(2 \leq z \leq 6)$, orientada cap a l'exterior.

11. La imatge M de la parametrització $\sigma\colon [0, 2\pi] \times \,]-1, 1[\, \to \mathbf{R}^3$

$$\sigma(\phi, v) = \left((R + v\sin(\phi/2))\cos\phi, (R + v\sin(\phi/2))\sin\phi, v\cos(\phi/2)\right),$$

on $R > 1$ és una constant, és una banda de Möbius (sense vora).

(a) Justifiqueu que σ és injectiva, excepte que $\sigma(0, v) = \sigma(2\pi, -v)$.

(b) Calculeu els vectors tangents $\mathbf{T}_\phi$, $\mathbf{T}_v$ deduïts de la parametrització.

(c) Calculeu el producte vectorial d'aquests vectors sobre un punt qualsevol de l''equador' de la banda, $\mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_v(\phi, 0)$, i el corresponent vector normal $\mathbf{n}(\phi, 0)$.

(d) Vegeu que M no és orientable tot comparant $\mathbf{n}(0, 0)$ i $\mathbf{n}(2\pi, 0)$.

(e) Té sentit calcular el flux d'un camp vectorial a través de M? Podríem integrar la funció constant igual a 1 sobre M a fi de calcular-ne l'àrea?

Problemes addicionals

12. Calculeu les integrals de línia següents:

    (a) $\displaystyle\oint_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}l$, on C és la circumferència de centre $(0,0)$ i radi R.

    (b) $\displaystyle\int_C (xy+z^2)\,\mathrm{d}l$, on C és l'arc d'hèlix $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$ comprès entre $(1,0,0)$ i $(-1,0,\pi)$.

13. Calculeu les integrals de línia dels camps vectorials donats al llarg de les corbes orientades indicades:

    (a) $\mathbf{F}(x,y,z)=(2xy,3z,5zy)$ al llarg de la corba parametritzada $\gamma(t)=(t+1,t^3-1,t^2)$ des de $(0,-2,1)$ fins $(2,0,1)$.

    (b) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y,xz-y)$, sobre el segment que va des de $(0,0,0)$ fins $(1,2,4)$.

    (c) $\mathbf{F}(x,y)=\left(\dfrac{x+y}{x^2+y^2},\dfrac{y-x}{x^2+y^2}\right)$, al llarg de la circumferència $x^2+y^2=a^2$ recorreguda positivament.

    (d) $\mathbf{F}(x,y,z)=(3xy,-y^2,e^z)$, al llarg de la corba d'equacions $z=0$, $y=2x^2$, des de $(0,0,0)$ fins $(1,2,0)$.

    (e) $\displaystyle\oint_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$, on C és la circumferència de radi 2 centrada en $(1/3,1/3,1/3)$ i situada en el pla $x+y+z=1$, recorreguda en el sentit de les busques del rellotge vista des de l'origen.

    (f) $\displaystyle\int_{(2,1,\pi/2)}^{(2,1,\pi)} \sin^2 z\mathrm{d}x + x\sin 2z\mathrm{d}z$, al llarg de la recta que uneix ambdós punts.

14. Proveu que la integral de línia $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}x}{yz}+\frac{\mathrm{d}y}{xz}+\frac{\mathrm{d}z}{xy}$ al llarg de qualsevol corba situada sobre un octant d'una esfera centrada a l'origen i de radi arbitrari val zero.

15. Una tanca circular, centrada a l'origen i de radi 1, té alçada $h(x,y)=|x|+|y|$. Calculeu-ne l'àrea.

16. Considereu el sòlid pla (de densitat uniforme) $S=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$. Calculeu-ne el centre de massa.

17. Calculeu el centre de massa de la regió de l'esfera $x^2+y^2+z^2=r^2$ compresa entre els plans $z=a$ i $z=b$, amb $|a|,|b|\leq r$.

18. Calculeu el flux dels camps vectorials següents a través de les superfícies orientades indicades:

    (a) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$, sobre la superfície definida per $g(t,u)=(t+u,t-u,t)$, amb $0<t<2$ i $1<u<3$.

    (b) $\mathbf{F}(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y,-y,1)$ sobre el paraboloide $z=1-x^2-y^2$, $0<z<1$, orientat amb la normal cap amunt.

    (c) $\mathbf{F}(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y,-y,1)$ sobre la meitat inferior de l'esfera de radio 1 centrada a l'origen i orientada amb la normal cap avall.

    (d) $\mathbf{F}(x,y,z)=y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$, a través de la superfície de la piràmide limitada pels plans $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$.

    (e) $\mathbf{F}(x,y,z)=(4xz,-y^2,yz)$, a través de la frontera del cub $0\leq x,y,z\leq 1$.

    (f) $\mathbf{F}(x,y,z)=(x-y,x-y,5z^3)$, a través de la superfície esfèrica $x^2+y^2+z^2=1$, orientada cap a fora.

    (g) $\mathbf{F}(x,y,z)=(y,-y^2z,yz^2-x^2)$, a través de la superfície $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $z>0$, orientada cap a fora.

    (h) $\mathbf{F}(x,y,z)=(z-y,x-z,z-x)$, a través de la superfície $x^2+y^2+z^2=9$, $1<z<2$, orientada en sentit radial positiu.

(i) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+z, z-y, 1)$, a través de la porció de superfície cònica $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = z^2$, compresa entre els plans $z = 0$ i $z = 1$, orientada en direcció z positiva.

19. Siguin $\mathbf{F} = (2, -3, 1)$, i S un cercle de radi a, situat en un pla P. Doneu l'equació dels plans P per als quals el flux de $\mathbf{F}$ a través de S es màxim.

Respostes

1. (a) $4\pi\sqrt{a^2+b^2}$.
   (b) $8R$.
   (c) $6a$.
   (d) $4a\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\,\sqrt{1-k^2\cos^2 t}$, amb $k = \sqrt{a^2-b^2}/a$ (excentricitat).
2. (a) $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\,\sqrt{1+f'(x)^2}$.
   (b) $\int_{\phi_1}^{\phi_2} \mathrm{d}\phi\,\sqrt{f(\phi)^2+f'(\phi)^2}$.
3. (a) $8a$.
   (b) $\sqrt{2}$.
4. (a) $2a^2$.
   (b) $2\pi/3$.
5. (a) $R^2\pi/2$.
   (b) $-14/15$.
   (c) $3/2-\pi$.
   (d) $-49/30$.
   (e) 2.
   (f) $2/3$.
   (g) -3π.
   (h) $-\pi$.
6. (a) $\pi a\sqrt{a^2+h^2}$.
   (b) $4\pi a^2$.
   (c) $2\pi ah$.
7. (a) $\dfrac{\pi a^5}{2}$.
   (b) $\pi\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{12} - \dfrac{11}{60}\right)$.
   (c) 0.
   (d) $\dfrac{\pi}{3}(6\sqrt{6}-8)$.
8. (a) $(-4+2\pi)a^2$.
   (b) $4\pi a^2$, si $a \le 1$; $4\pi a$, si $a > 1$.
   (c) $2\pi\sqrt{6}/9$.
9. (b) $4\pi^2 rR$.
10. (a) 2π.
    (b) 24.
    (c) 24π.
    (d) $5\pi a^4 b/4$.
    (e) $\pi/6$.
    (f) $5\pi/3$.
    (g) 12π.
    (h) $\dfrac{8-5\sqrt{2}}{12}\pi$.
    (i) $5/12$.
    (j) $2R^3/3$.

(k) $116\pi/3$.

11. (c) $\mathbf{n}(\phi, 0) = \begin{pmatrix} \cos\phi \cos\frac{\phi}{2} \\ \sin\phi \cos\frac{\phi}{2} \\ -\sin\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}$

(e) No. Sí.

12. (a) $2\pi R^3$.

(b) $\sqrt{2}\pi^3/3$.

13. (a) $114/35$.

(b) $23/6$.

(c) -2π.

(d) $-7/6$.

(e) $-12\pi/\sqrt{3}$.

(f) -2.

14. Observeu que $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{xyz}(x, y, z)$ és ortogonal a l'esfera.

15. 8.

16. $(x_{\mathrm{cm}}, y_{\mathrm{cm}}, z_{\mathrm{cm}}) = (1/3, 1/3, 1/3)$.

17. $(x_{\mathrm{cm}}, y_{\mathrm{cm}}, z_{\mathrm{cm}}) = \left(0, 0, \dfrac{a+b}{2}\right)$.

18. (a) $104/3$.

(b) $4\pi/3$.

(c) $-\dfrac{\pi(\pi+8)}{4}$.

(d) 0.

(e) $3/2$.

(f) 4π.

(g) $-\pi a^3 b/4$.

(h) $14\pi/3$.

(i) $\sqrt{6}\pi$.

19. $2x - 3y + z = C$.

8 Teoremes integrals de l'anàlisi vectorial

Problemes bàsics

1. Designem per $\mathbf{r}$ el camp radial de $\mathbf{R}^n$, i per r la seva norma euclidiana, que és un camp escalar C^∞ en $\mathbf{R}^n - \{0\}$. Obteniu les relacions següents:

   (a) $\operatorname{grad} r = \mathbf{r}/r$.

   (b) $\operatorname{grad} h(r) = \dfrac{h'(r)}{r}\mathbf{r}$, on $h\colon]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ és C^1.

   (c) $\operatorname{grad} r^\alpha = \alpha r^{\alpha-2}\mathbf{r}$.

   (d) $\operatorname{div} \mathbf{r} = n$.

   (e) $\operatorname{div}(h(r)\mathbf{r}) = nh(r) + rh'(r)$. Quan val 0? I quan val $h(r)$?

   (f) $\operatorname{div}(r^\alpha \mathbf{r}) = (n+\alpha)r^\alpha$.

   (g) $\Delta h(r) = h''(r) + (n-1)h'(r)/r$.

   (h) $\Delta r^\alpha = \alpha(n+\alpha-2)r^{\alpha-2}$.

   (i) En dimensió $n = 3$, calculeu $\operatorname{rot}(h(r)\mathbf{r})$.

   (j) Doneu un camp vectorial en $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ amb rotacional i divergència nuls.

2. Calculeu el rotacional dels camps $\mathbf{a} \times \mathbf{r}$, $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{b}$, on $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ són vectors constants.

3. Calculeu la circulació dels camps vectorials següents al llarg de les corbes orientades indicades, utilitzant el teorema de Stokes:

   (a) $\mathbf{F} = (x^2y^3, 1, z)$,
   C, circumferència $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, recorreguda en el sentit positiu.

   (b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, -2z, x)$,
   C, el·lipse intersecció del cilindre $x^2 + y^2 = R^2$ i el pla $x = z$, recorreguda de manera que la seva projecció sobre el pla XY sigui positiva.

   (c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (ye^{xy}, xe^{xy}, xyz)$,
   C, corba reunió de les tres corbes obtingudes tallant el con $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ amb els plans $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$ i dins el primer octant; recorreguda de manera que, des de l'origen, es vegi en el sentit de les busques del rellotge.

   (d) $\mathbf{F} = (y - z, z - x, x - y)$,
   C, corba tancada intersecció de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i el pla $x + y + z = 1$, recorreguda en el sentit $(1,0,0) \to (0,1,0) \to (0,0,1)$.

   (e) $\mathbf{F} = (yz, -x, 2y)$,
   C, el triangle de vèrtexs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$, orientat en aquest sentit.

   (f) $\mathbf{F} = (y, z, x)$,
   C, la interseció de $z = xy$ amb $x^2 + y^2 = 1$, recorreguda de forma que la seva projecció sobre el pla XY sigui positiva.

4. Verifiqueu el teorema de Stokes per a la superfície helicoïdal definida per la parametrització $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$, $(u,v) \in [0,1] \times [0,\pi/2]$, i el camp vectorial donat per $\mathbf{F}(x,y,z) = (xz, yx, zy)$.

5. Calculeu el flux del rotacional del camp vectorial $\mathbf{F} = (y, zx, yzx)$ a través de la superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, orientada amb la normal "cap amunt".

6. Calculeu els fluxos dels camps vectorials següents a través de les superfícies orientades donades, utilizant el teorema de Gauss:

   (a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, y^2, z^2)$,
   S, la vora del cub $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$.

   (b) $\mathbf{f}(x,y,z) = (x^2y, xy^2, xyz)$,
   S, la vora de la regió $V = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z < a^2,\ x > 0, y > 0, z > 0\}$, on $a > 0$ és una constant.

(c) $\mathbf{f}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$,
S, la vora de la regió $V = \left\{(x,y,z) \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} \le \dfrac{z^2}{b^2},\ 0 \le z \le b\right\}$, on $a, b > 0$ són dues constants.

(d) $\mathbf{p}(x,y,z) = x\mathbf{i} - (2x+y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
S, l'hemisferi $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z > 0$, orientat segons la normal exterior de l'esfera.

7. Siguin $a, b, c > 0$ constants. Considereu les funcions $\varphi(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ i $g(x,y,z) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c}$. Aplicant el teorema de Gauss, calculeu el flux del camp $\operatorname{grad}\varphi$ a través de la superfície $S = \{(x,y,z) \mid g(x,y,z) = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$ orientada amb la normal "cap avall".

8. Un camp escalar $f(x,y,z)$ satisfà $\|\nabla f\|^2 = 4f$, $\nabla \cdot (f\nabla f) = 10f$. Calculeu $\displaystyle\iint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}S$ essent S l'esfera unitat centrada a l'origen i $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ la derivada direccional de f segons el vector normal unitari exterior a S.

9. Determineu $h(x,y,z)$ a fi que el camp $\mathbf{f} = (h, 2x - 3zy^2, -y^3 + 2xz)$ sigui conservatiu. Obteniu-ne aleshores un potencial.

10. Sigui $\mathbf{f}$ un camp vectorial de la forma $\mathbf{f} = \phi(r)\mathbf{r}$.
    (a) Demostreu que $\mathbf{f}$ és conservatiu.
    (b) Determineu $\phi(r)$ per tal que el flux de $\mathbf{f}$ a través de qualsevol superfície tancada que no contingui l'origen sigui nul.
    (c) En aquest darrer cas, calculeu la circulació de $\mathbf{f}$ entre els punts $(1,0,0)$ i $(0,1,\pi/2)$ mitjançant la funció potencial.

11. Comproveu que la integral de línia $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (3x^2 + yz)\mathrm{d}x + (3y^2 + xz)\mathrm{d}y + (3z^2 + xy)\mathrm{d}z$ no depèn del camí, i calculeu-la.

12. Donada la relació $\nabla \times \mathbf{F} = (xy^2 + xz^2, yx^2 + yz^2, -x^2z - y^2z - az^3)$, determineu a.

13. Sigui el camp vectorial $\mathbf{g}(x,y,z) = (-x, -y, 2z)$.
    (a) Existeix algun camp $\mathbf{q}$ tal que $\operatorname{rot}\mathbf{q} = \mathbf{g}$? En cas afirmatiu, determineu-ne algun.
    (b) Calculeu $\iint_S \mathbf{g} \cdot \mathrm{d}S$, essent S la semiesfera $S = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,\ z > c\}$ orientada en la direcció radial. (Useu el resultat anterior.)

14. Calculeu les integrals de línia següents, aplicant el teorema de Green:
    (a) $\displaystyle\oint x^2y\,\mathrm{d}x - xy^2\,\mathrm{d}y$ sobre la circumferència $x^2 + y^2 = R^2$ (orientada positivament).
    (b) $\displaystyle\oint_C \frac{(x+2y)\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$, on C és la circumferència centrada en $(2,0)$ i de radi 1.
    (c) $\displaystyle\oint_C -2xye^{-x^2}\mathrm{d}x + (e^{-x^2} + 3x)\mathrm{d}y$, essent C la corba $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.
    (d) $\displaystyle\oint_C y^2\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, al llarg del quadrat de vèrtexs $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ i $(0,2)$.
    (e) $\displaystyle\oint_C (x^3 - 3y)\mathrm{d}x + (x + \sin y)\mathrm{d}y$, on C és el triangle de vèrtexs $(0,0)$, $(1,0)$ i $(0,2)$.
    (f) $\displaystyle\int_C -x^2y\,\mathrm{d}x + xy^2\,\mathrm{d}y$, essent C la corba definida per $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$, orientada des de $(1,0)$ fins a $(-1,0)$.
    (g) $\displaystyle\oint_{C_1} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \oint_{C_2} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, essent $\mathbf{f} = (e^x \cos y - y, -e^x \sin y)$, C_1 la corba $x^2 + y^2 = 4$ i C_2 la corba $x^2 - 2x + y^2 = 0$, ambdues orientades positivament.

15. Sigui $C \subset \mathbf{R}^2$ una corba de Jordan i R la regió que tanca.

    (a) Com ha de ser $\mathbf{f} = (P, Q)$ per tal que $\oint_C \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$ sigui l'àrea de R?

    (b) Comproveu que $\mathbf{f} = \dfrac{1}{2}(-y, x)$ ho satisfà.

    (c) Apliqueu-ho a calcular l'àrea tancada per l'el·lipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

16. Comproveu que les integrals de línia següents són independents del camí, i calculeu-les.

    (a) $\displaystyle\int_C \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$, amb $\mathbf{f} = (e^{y^2} \cos x, 2ye^{y^2} \sin x)$, i $C = \{(x, y) \mid y = \sin x\}$ des de $(0, 0)$ fins $(\pi, 0)$.

    (b) $\displaystyle\int_C \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, on C és el quart d'el·lipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ situat en el primer quadrant, i orientat des de $(a, 0)$ fins $(0, b)$.

17. Sigui el camp vectorial $\mathbf{f}(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$.

    (a) Calculeu la integral de $\mathbf{f}$ al llarg de la circumferència $x^2 + y^2 = r^2$, orientada positivament.

    (b) Sigui C una corba tancada simple que no deixa l'origen en el seu interior. Proveu que $\oint_C \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0$.

    (c) Sigui C una corba tancada simple (orientada positivament) que conté l'origen en el seu interior. Proveu que el valor de $\oint_C \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$ és independent de la corba considerada. Quin és aquest valor?

    (d) Verifiqueu que el camp vectorial $\mathbf{f}$ compleix $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$. Admet funció potencial en el seu domini de definició? Per què?

    (e) Sigui $U =]0, 1[\times]0, 1[$. Comproveu que la integral $\int_{\partial U} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$ no es pot calcular mitjançant la fórmula de Green. Per què?

18. Siguin $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 16, (x + 2)^2 + y^2 > 1, (x - 1)^2 + y^2 > 1\}$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ un camp vectorial de classe C^1 amb domini D, i $C \subset D$ una corba tancada simple, orientada positivament. Quants valors diferents pot valdre $\oint_C \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ (segons l'elecció de C) en els casos següents?

    (a) Si $\mathbf{f}$ és el gradient d'un camp escalar en D.

    (b) Si $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$.

Problemes addicionals

19. Comproveu les propietats següents, on F i G són camps vectorials C^2 en $\mathbf{R}^3$:

    (a) $\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{rot} F - F \cdot \operatorname{rot} G$.

    (b) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} F) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} F) - \Delta F$.

20. Si f i g són camps escalars C^2 en $\mathbf{R}^3$, què val $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g)$?

21. Un fluid gira al voltant de l'eix OZ amb velocitat angular $\omega(t, x, y, z)$.

    (a) Proveu que el seu camp de velocitats és de la forma $\mathbf{v}(t, x, y, z) = \omega\,(-y, x, 0)$, i calculeu-ne el rotacional.

    (b) En el cas que ω només depengui de la distància a l'eix OZ, ρ, esbrineu quan $\mathbf{v}$ és irrotacional.

22. Calculeu la circulació dels camps vectorials següents al llarg de les corbes indicades, utilitzant el teorema de Stokes:

    (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (3xz + yz, 3xz - 3zy, 2xy)$,
    C, corba tancada obtinguda intersecant el pla $2x + 2y - z = 2$ amb la frontera del cub $Q = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$, recorreguda en el sentit que va de $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$.

(b) $\mathbf{f} = (x+y, y+z, z+x)$,
C, el·lipse intersecció del cilindre $x^2 + y^2 = 3$ amb el pla $2x + 2y + z = 0$, recorreguda de manera que la seva projecció al pla XY es recorri positivament.

(c) $\mathbf{f} = (y, z, x)$,
C, corba intersecció de les dues superfícies $x + y = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, recorreguda de manera que, vista des de l'origen, el sentit és el de les busques del rellotge.

(d) $\mathbf{F} = (x - y + z, y - z + x, z - x + y)$,
corba intersecció de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ amb $2x + 2y + z = 0$, orientada de manera que la seva projecció sobre el pla XY sigui recorreguda en sentit positiu.

23. Siguin $\mathbf{F} = (ye^{xy}, xe^{xy} + a(x - z), -ax)$ i C la corba intersecció de $x + y + z = 1$ amb $x^2 + y^2 = 1$. Calculeu a per tal que la circulació de $\mathbf{F}$ al llarg de C valgui π.

24. Obteniu $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$, essent $\mathbf{F} = (x - z, x^3 + yz, -3xy^2)$ i S la superfície $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < z < 2$ orientada amb la normal "cap amunt".

25. Siguin $\mathbf{F}$ un camp amb rotacional $(1, 2, 3)$ i C la intersecció de $x^2 + y^2 = 1$ amb $x + y + z = 1$ recorreguda de manera que, en projectar sobre el pla XY, doni sentit positiu. Determineu $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$.

26. Sigui $\mathbf{f}$ un camp vectorial de classe C^1 normal a una superfície regular S. Proveu que $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ és tangent a S. (Apliqueu el teorema de Stokes.)

27. Calculeu els fluxos dels camps vectorials a través de les superfícies orientades donades, utilizant el teorema de Gauss:

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$,
S, la vora del cub $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$.

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$,
S, la mateixa.

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y, y - z, x - y)$,
S, la mateixa.

28. Calculeu $\iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot dS$, on $\mathbf{F}$ és el camp vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x^2, z^3)$ i S és la superfície que limita la regió $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $1/2 \leq z \leq 1$.

29. Siguin $\mathbf{F} = (ye, x \cos z, x \cos y - b)$ i S la superfície $x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 1$, $z > 0$, on $a > 0$. Determineu b per tal que el flux radial positiu a través de S sigui π, independentment de a.

30. Donat el camp vectorial $\mathbf{F} = (y + z^2 - x, z^2 + y - x, a\sqrt{2}z/3)$ i les superfícies S_1: $(z - 2)^2 = x^2 + y^2$, $0 < z < 2$, S_2: $x^2 + y^2 < 4$, $z = 0$, trobeu el valor de a per tal que els fluxos "cap amunt" de $\mathbf{F}$ a través d'ambdues superfícies coincideixin.

31. Proveu que el flux d'un camp constant a través d'una superfície tancada S és nul. Proveu també que si $\mathbf{a}$ és un vector fixat, llavors $\iint_S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{a}) \, dS = 0$.

32. Sigui U una regió de $\mathbf{R}^3$ que no contingui l'origen, i sigui S la vora de U. Expresseu $\iint_S r^\alpha \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$ com una integral en la regió U. Què s'obté si $\alpha = 0$?

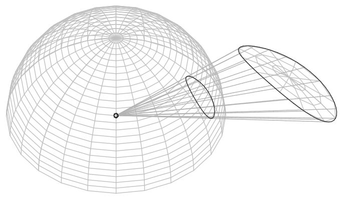
33. De la mateixa manera que en el pla dues semirectes que parteixen d'un punt defineixen un angle, en l'espai podem definir *angle sòlid* com una regió Ω formada per semirectes que parteixen d'un origen O. La *mesura* d'aquest angle és l'àrea de la superfície obtinguda tallant Ω amb l'esfera S de centre O i radi 1.

(a) Vist des de l'origen, quant val l'angle sòlid de tot l'espai? I el d'un octant?

(b) Sigui M una superfície regular que no conté O i tal que cada semirecta amb origen O talla M com a molt en un sol punt. Sigui $\Omega(M)$ el conjunt d'aquestes semirectes que tallen M; s'anomena *angle sòlid* de vèrtex O subtendit per M.

Proveu que la seva mesura es pot calcular amb la integral de superfície $\displaystyle\int_M \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S}$.

(Sigui M_a la projecció de M sobre l'esfera de centre O i radi a, amb a prou petit, i sigui U la regió "cònica" compresa entre M_a i M. Utilitzeu el teorema de Gauss en U per a provar que la integral de superfície anterior coincideix amb $\frac{1}{a^2}\int_{M_a} \mathrm{d}S$, i noteu que aquesta quantitat no depèn del radi a triat.)



(c) Calculeu la mesura de l'angle sòlid, amb vèrtex a l'origen, subtendit per la superfície esfèrica $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z>a\cos\alpha$.

34. Suposem que els camps escalars f i g satisfan $\nabla^2 g=0$, $g\nabla^2 f=x+y$, $\nabla\cdot(g\nabla f)=x+y+z$. Calculeu la integral de superfície $\iint_S f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S$, essent S l'el·lipsoide d'equació $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, i $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}$ la derivada direccional segons la normal exterior a S.

35. Sigui V una regió de l'espai, i S la seva vora.

(a) Aplicant el teorema de la Gauss a $\iint_S \phi\nabla\phi\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ obteniu l'expressió:

$$\iiint_V \|\nabla\phi\|^2\,\mathrm{d}V=-\iiint_V \phi\nabla^2\phi\,\mathrm{d}V+\iint_S \phi\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S$$

essent $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ la derivada segons la normal exterior a S.

(b) Demostreu que si ϕ_1 i ϕ_2 són dues solucions del problema

$$\nabla^2\phi=h \text{ en } V,\qquad \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}=g \text{ en } S,$$

cal $\phi_1-\phi_2=\text{const.}$ (Considereu $\psi=\phi_1-\phi_2$.)

(c) Demostreu que un camp vectorial $\mathbf{f}$ definit en una regió V queda determinat pel seu rotacional i la seva divergència en V, i el seu component normal en $S=\partial V$.
(Considereu $\mathbf{g}=\mathbf{f}_1-\mathbf{f}_2$ amb $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$ dos camps amb mateixa divergència i rotacional en V, i mateix component normal en S.)

36. Demostreu que el problema de Neuman per a l'equació del potencial, $\Delta u=f$ en Ω, $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}=g$ en $\Gamma=\partial\Omega$, no pot tenir solució si $\int_\Omega f\mathrm{d}V\neq\int_\Gamma g\mathrm{d}S$.
(Apliqueu el teorema de Gauss a $\int_\Gamma \nabla u\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$, essent u solució del problema.)

37. Es consideren coordenades esfèriques (r,θ,ϕ) $(r^2=x^2+y^2+z^2,\ z=r\cos\theta)$. Sigui u una solució del problema $\nabla^2u=u$ si $r<1$, i $\frac{\partial u}{\partial r}=\sin\theta$ si $r=1$. Obteniu $\iiint_{r\le 1} u\,\mathrm{d}V$.

38. Siguin u i v camps escalars C^1 en un obert D, i $C\subset D$ una corba tancada orientada. Obteniu $\oint_C(u\nabla v+v\nabla u)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$.

39. Sigui ϕ una funció de classe C^1 en un obert simplement connex D, i $\mathbf{f}$ un camp vectorial conservatiu de classe C^1 en D. Proveu que el camp vectorial $\phi\,\mathbf{f}$ és conservatiu sii $\operatorname{grad}\phi$ i $\mathbf{f}$ són en cada punt proporcionals.

40. Comproveu que els camps vectorials següents són conservatius, i calculeu-ne potencials escalars.

(a) $\mathbf{f}=\mathbf{r}/r$.

(b) $\mathbf{f}=\frac{\mathbf{r}}{r^2}$.

(c) $\mathbf{f}=r^\alpha\mathbf{r}$, $(\alpha\neq-2)$.

(d) $\mathbf{f}(x,y,z)=(2xy+z^3,x^2,3xz^2)$.

(e) $\mathbf{f}(x,y,z)=(y^2z, 2xyz, xy^2-1)$.

41. Trobeu $P(x,y,z)$ per tal que $\mathrm{rot}(P,(x-z)y,0)=(y,z,x)$.

42. Demostreu que el camp vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(y-z)\mathbf{i}+(z-x)\mathbf{j}+(x-y)\mathbf{k}$ és solenoïdal, i obteniu un camp vectorial $\mathbf{g}$ tal que $\mathbf{f}=\mathrm{rot}\,\mathbf{g}$.

43. Calculeu les integrals de línia següents, aplicant el teorema de Green:

 (a) $\oint_C (y^2\cos x-2e^y)\mathrm{d}x+(2y\sin x-2xe^y)\mathrm{d}y$, on C és la corba d'equació $x^2+y^2=\pi$ (orientada positivament).

 (b) $\oint_C (2xe^{x^2-y^2}-4y)\mathrm{d}x-(2ye^{x^2-y^2}-4x)\mathrm{d}y$, on C és la circumferència $2x^2+2y^2-3x+5y=0$.

 (c) $\oint \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$, on $\mathbf{f}=(y-\cos x\cos y, -x+\sin x\sin y)$, al llarg de la circumferència $x^2+y^2-2x+2y=0$.

 (d) $\oint \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$, on $\mathbf{f}=(xy+x^2y, \frac{1}{2}x^2+e^y\sin y)$, al llarg de la circumferència $x^2+y^2=1$.

 (e) $\int_C (x^2+y^2)\mathrm{d}x+x(1+2y)\mathrm{d}y$, essent C la corba orientada definida per la parametrització $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0<t<2\pi$ (cicloide).

44. Considereu el camp vectorial $\mathbf{f}(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2}, y\left(xy+\log(x+\sqrt{x^2+y^2})\right)\right)$.

 (a) Raoneu si s'hi pot aplicar el teorema de Green en el rectangle $R=\{(x,y)\mid 1\le x\le 4,\ 0\le y\le 2\}$.

 (b) Calculeu la circulació de $\mathbf{f}$ al llarg de la vora de R.

45. Determineu l'àrea del domini comprès entre l'eix OX i l'arc de cicloide definit per $x=R(t-\sin t)$, $y=R(1-\cos t)$, amb $0\le t\le 2\pi$.

46. Sigui $U\subset\mathbf{R}^2$ un obert del pla, i $\mathbf{F}$ un camp vectorial de classe C^1 en U. Sigui $D\subset U$ una regió amb vora $\partial D=C$. Proveu el *teorema de la divergència* en el pla:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}r=\iint_D \mathrm{div}\,\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

on $\mathbf{n}$ és el vector unitari normal exterior a D.
(Si $\mathbf{F}=(P,Q)$, considereu el camp vectorial $\mathbf{G}=(-Q,P)$, i apliqueu-hi el teorema de Green.)
(El primer membre s'anomena *flux* de $\mathbf{F}$ a través de C.)

47. Siguin $f(x,y)$ un camp escalar de classe C^2 en un obert $U\subset\mathbf{R}^2$, $R\subset U$ una regió, i $C=\partial R$ la vora de R, amb normal exterior unitària $\mathbf{n}$.

 (a) Aplicant el teorema de la divergència, proveu la fórmula:

$$\iint_R\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_C\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}\,\mathrm{d}l,$$

 on $\dfrac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}$ és la derivada direccional de f en la direcció de la normal.

 (b) Calculeu $\oint_C \dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}l$, on $u=x^2+3y^2$ i $\mathbf{n}$ és la normal exterior unitària a la corba $x^2+y^2=4$, directament i com a aplicació de l'apartat anterior.

48. Estudieu si els camps vectorials següents admeten funció potencial. En cas afirmatiu, calculeu-la.

 (a) $\mathbf{f}(x,y)=(xy,1)$.

 (b) $\mathbf{f}(x,y)=(y,x)$.

 (c) $\mathbf{f}(x,y)=(x^2-3xy, x^2-x^3+y)$.

 (d) $\mathbf{f}(x,y)=(e^{x-y}(1+x+y), e^{x-y}(1-x-y))$.

(e) $\mathbf{f}(x,y) = \left(\dfrac{2x}{y+x^2}, \dfrac{1}{y+x^2}\right)$.

49. Comproveu que les integrals de línia següents són independents del camí, i calculeu-les.

(a) $\displaystyle\int_C x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$, al llarg de la corba $y = \varphi(x)$ des de $x = 0$ fins $x = 2\pi$.

(b) $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)\mathrm{d}x + \psi(y)\mathrm{d}y$.

(c) $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{4x(y^2+1)\mathrm{d}x - 4x^2y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+1)^2}$.

50. Siguin P i Q funcions $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de clase C^1, tals que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Definim

$$f(x,y) = \int_0^1 (xP(tx,ty) + yQ(tx,ty))\,\mathrm{d}t$$

(a) Proveu que f és potencial del camp $\mathbf{F} = (P,Q)$.

(b) Apliqueu-ho a les funcions $P = x + 2y$, $Q = 2x + y^3$.

51. Obteniu els valors de b per als quals les equacions diferencials següents són exactes, i resoleu-les.

(a) $(bx^2y + y^3)\mathrm{d}x + (x^3 + bxy^2)\mathrm{d}y = 0$.

(b) $(3x - 5y + 7)\mathrm{d}x + (bx - 6y + 10)\mathrm{d}y = 0$.

52. Per a les equacions diferencials següents, obteniu un factor integrant μ del tipus indicat i useu-lo per a resoldre-les.

(a) $y^2\mathrm{d}x + (1 + xy)\mathrm{d}y = 0$; $\mu(xy)$.

(b) $(3xy - 2y^2)\mathrm{d}x + (2x^2 - 3xy)\mathrm{d}y = 0$; $\mu(xy)$.

(c) $(x^2y^3 - y)\mathrm{d}x + (x^3y^2 + x)\mathrm{d}y = 0$; $\mu(xy)$.

(d) $(3x^2y + 3xy^2)\mathrm{d}x + (x^3 + x^2y)\mathrm{d}y = 0$; $\mu\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

(e) $y(1 + xy)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$; $\mu = \phi(y)$.

(f) $(y^4 - 2y^2)\mathrm{d}x + (3xy^3 - 4xy + y)\mathrm{d}y = 0$; $\mu = \phi(xy^2)$.

(g) $(xy^2 - x^3 + x)\mathrm{d}y + (x^2y - y^3 + y)\mathrm{d}x = 0$; $\mu = \phi(xy)$.

(h) $y\mathrm{d}x + x(x^2y - 1)\mathrm{d}y = 0$; $\mu = \dfrac{1}{x^2}\phi(y/x)$.

(i) $(y^2 - xy)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0$; $\mu(x,y) = \phi(xy^2)$.

53. Quina condició han de complir P i Q per tal que l'equació $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$ admeti un factor integrant funció de $ax + by$?

Respostes

1. (e) $h(r) = C/r^n$, $h(r) = C/r^{n-1}$.

   (i) 0.

   (j) $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^3$.

2. $2\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

3. (a) $-\pi R^6/8$.

   (b) $-3\pi R^2$.

   (c) 0.

   (d) $-4\pi/\sqrt{3}$.

   (e) 1/2.

   (f) $-\pi$.

4. La circulació de $\mathbf{f}$ al llarg de la vora orientada en un sentit val $4/3 - \pi/8$.

5. $-\pi$.
6. (a) $5/2$.
   (b) $5a^6/24$.
   (c) $\pi a^2 b^2/2$.
   (d) $2\pi/3$.
7. $-\dfrac{1}{3}abc\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$.
8. 8π.
9. $h = 2y + z^2 + g(x)$. Un potencial és $\phi = 2xy + xz^2 - y^3 z + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.
10. (b) $\phi(r) = k/r^3$.
    (c) $k - \dfrac{k}{\sqrt{1+(\pi/2)^2}}$.
11. 4.
12. $a = 2/3$.
13. (a) Sí, per exemple $(0, 2zx, yx)$.
    (b) $2\pi c R^2$.
14. (a) $-\pi R^4/2$.
    (b) 0.
    (c) 15π.
    (d) -4.
    (e) 4.
    (f) $\pi/4$.
    (g) 3π.
15. (a) Cal $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$.
16. (a) 0.
    (b) $b - a$.
17. (a) 2π.
    (c) 2π.
    (d) No.
    (e) La integral de línia dóna $\pi/2$, mentre que $\int_U \ldots$ val 0. La raó és que $\bar{U}$ inclou el punt $(0,0)$, que no és del domini del camp vectorial.
18. Un i quatre, respectivament.
20. 0.
21. (a) Utilitzem que $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, amb $\boldsymbol{\omega} = (0,0,\omega)$. $\mathbf{v} = \left(-x\dfrac{\partial \omega}{\partial z}, -y\dfrac{\partial \omega}{\partial z}, 2\omega + x\dfrac{\partial \omega}{\partial x} + y\dfrac{\partial \omega}{\partial y}\right)$.
    (b) $\omega = A/\rho^2$.
22. (a) $3/2$.
    (b) -15π.
    (c) $-2\sqrt{2}\pi$.
    (d) $10\pi/3$.
23. $a = 1/3$.
24. 12π.
25. 6π.
27. (a) 0
    (b) 0.
    (c) 16.
28. 0.

29. -1.
30. 0.
32. $(3+\alpha)\iiint_T r^\alpha \mathrm{d}V$.
33. (a) 4π; $\pi/2$.
    (c) $2\pi(1-\cos\alpha)$.
34. 0.
38. 0.
40. (a) $r+k$.
    (b) $\log r + k$.
    (c) $\dfrac{r^{\alpha+2}}{\alpha+2}+k$.
    (d) $x^2y + xz^3 + k$.
    (e) $z(xy^2-1)+k$.
41. $\dfrac{1}{2}(-2xy+y^2+z^2)+\varphi(x)$.
42. $\mathbf{g}(x,y,z) = (x^2/2 - xy - yz + z^2/2)\mathbf{j} + (x^2/2 - xz)\mathbf{k}$.
43. (a) 0.
    (b) 17π.
    (c) -4π.
    (d) $-\pi/4$.
    (e) $\dfrac{8\pi^3a^3}{3} - 3\pi a^2$.
44. (a) Sí.
    (b) 8.
45. $3\pi R^2$.
47. (b) 32π.
48. (a) No.
    (b) Sí, $xy + C$.
    (c) No.
    (d) Sí, $e^{x-y}(x+y)+C$.
    (e) Sí, $\log|x^2+y| + C$.
49. (a) $2\pi^2 + \dfrac{1}{2}(\varphi^2(2\pi) - \varphi^2(0))$.
    (b) $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,\mathrm{d}y$.
    (c) $-1/9$.
50. (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}y^4 + 2xy$.
51. (a) $b=3$; $x^3y + xy^3 = C$.
    (b) $b=-5$; $\frac{3}{2}x^2 - 5xy - 3y^2 + 7x + 10y = C$.
52. (a) $\mu = e^{xy}$; $ye^{xy} = C$.
    (b) $\mu = xy$; $x^3y^2 - x^2y^3 = C$.
    (c) $\mu = \dfrac{1}{xy}$; $\ln\dfrac{y}{x} + \dfrac{x^2y^2}{2} = C$.
    (d) $\mu = \dfrac{x}{x+y}$; $x^3y = C$.
    (e) $\mu(x,y) = 1/y^2$; $x^2 + 2x/y = C$.
    (f) $\mu(x,y) = 1+xy^2$; $xy^2(y^2-2)(xy^2+2)+y^2 = C$.
    (g) $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2y^2}$; $x^2+y^2-Cxy-1=0$.
    (h) $\mu(x,y) = y/x^3$; $2y^3 - 3(y^2/x^2) = C$.
    (i) $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xy^2}$; $\ln|x| - \dfrac{x}{y} = C$.
53. $\dfrac{Q_x - P_y}{bP - aQ} = f(ax+by)$.