Aplicacions geomètriques de la derivació

Apunts d'Anàlisi Vectorial

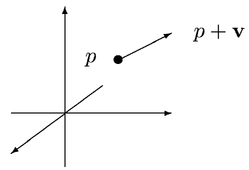
Xavier Gràcia, abril del 2002

1 Vectors tangents

Un *vector tangent* és un parell $(p, \mathbf{v})$, on $p \in \mathbf{R}^n$ és un punt i $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ és un vector.

S'escriu també $\mathbf{v}_p$, i es diu també que $\mathbf{v}$ és un vector tangent en p.

Es representa gràficament amb una fletxa d'origen p i extrem $p + \mathbf{v}$.



El conjunt de vectors tangents en el punt p, $\mathrm{T}_p(\mathbf{R}^n)$, és un espai vectorial igual que $\mathbf{R}^n$. Podem sumar vectors tangents en p ($\mathbf{u}_p + \mathbf{v}_p = (\mathbf{u} + \mathbf{v})_p$), fer-ne el producte escalar …

Sigui $U \subset \mathbf{R}^n$ un obert. Un *camp vectorial* en U és assignar a cada punt $p \in U$ un vector tangent $(p, \mathbf{f}(p))$ en p. Per tant, és una aplicació

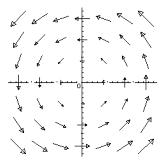
$$U \to U \times \mathbf{R}^n \qquad p \mapsto (p, \mathbf{f}(p))$$

El camp vectorial queda doncs definit per l'aplicació

$$\mathbf{f}: U \to \mathbf{R}^n \qquad p \mapsto \mathbf{f}(p)$$

i per això es diu simplement que $\mathbf{f}$ és el camp vectorial.

Exemple Sigui un sòlid en rotació al voltant de l'eix OZ amb velocitat angular constant ω. El camp de velocitats de les partícules del sòlid ve donat per $\mathbf{v}(x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0)$.



Recordem que un camí és una aplicació contínua $c: I \to \mathbf{R}^n$, on $I \subset \mathbf{R}$ és un interval. Si c és diferenciable en $t_o \in I$, la derivada

$$c'(t_o) = \lim_{h \to 0} \frac{c(t_o + h) - c(t_o)}{h} \in \mathbf{R}^n$$

s'interpreta com un vector tangent en el punt $c(t_o)$. L'anomenem *vector tangent* o *velocitat* de c en t_o.

En components, si $c(t) = \begin{pmatrix} c^1(t) \\ \vdots \\ c^n(t) \end{pmatrix}$, $c'(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{D}c^1(t) \\ \vdots \\ \mathrm{D}c^n(t) \end{pmatrix}$.

Transformació dels vectors tangents Sigui $f: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ diferenciable. f transforma camins diferenciables dins $\mathbf{R}^m$ en camins diferenciables dins $\mathbf{R}^n$:

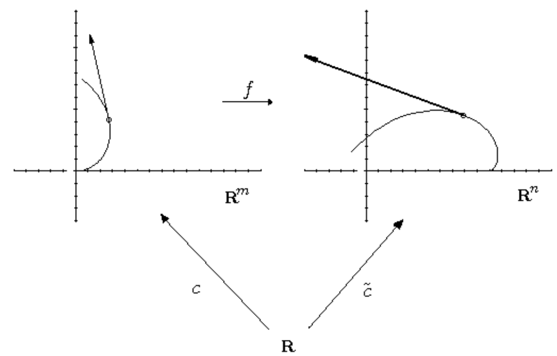
$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^m \arrow[r, "f"] & \mathbf{R}^n \\ I \arrow[u, "c"] \arrow[ur, "\tilde{c}"'] & \end{tikzcd} \qquad \tilde{c}(t) = f(c(t))$$

Per la regla de la cadena, si $c(t_o) = p_o \in \mathbf{R}^m$,

$$\tilde{c}'(t_o) = f'(p_o) \cdot c'(t_o) \in \mathbf{R}^n.$$

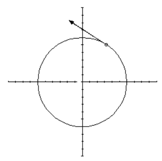
Per tant els vectors tangents dels camins que passen per p_o es transformen aplicant-los la diferencial de f en p_o, $f'(p_o)$. Hem provat, doncs:

Proposició *Sigui $f: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ diferenciable. Si el vector tangent a $t = 0$ d'un camí $c: I \to \mathbf{R}^m$ és $\mathbf{u}_p$, el vector tangent del camí $f \circ c: I \to \mathbf{R}^n$ és $\mathbf{v}_q$, on $q = f(p)$ i $\mathbf{v} = \mathrm{D}f(p) \cdot \mathbf{u}$.*



Exemple Siguin $R, \omega > 0$ constants. El camí $c: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $c(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)$, té vector tangent $c'(t) = R\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}$.

Observem que $(c'(t) \mid c(t)) = 0$: el vector tangent és ortogonal al vector posició. Això és perquè $c(t)$ és dins una circumferència.



Més generalment, sigui $c: I \to \mathbf{R}^n$ tal que, per a tota t, $\|c(t)\| = R$. Llavors també es compleix $(c'(t) \mid c(t)) = 0$.

En efecte, la funció $(c(t) \mid c(t)) = R^2$ és constant; derivant-la resulta $2\,(c'(t) \mid c(t)) = 0$.

Exemple Sigui $c: I \to \mathbf{R}^2$ un camí tal que $c(0) = (0,0)$, $c'(0) = (1,1)$.

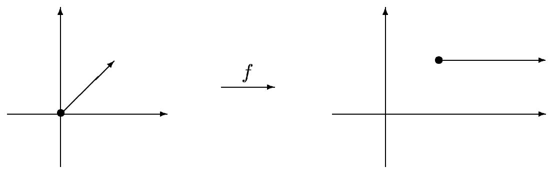
Sigui $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$.

Quin és el vector tangent del camí $f \circ c$ a $t = 0$?

$$(f \circ c)(0) = f(c(0)) = f(0,0) = (1,1)$$

$$(f \circ c)'(0) = \mathrm{D}f(0,0) \cdot c'(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on hem usat que $\mathrm{J}f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}$



2 Gradient d'una funció escalar

Siguin $V \subset \mathbf{R}^n$ obert, $f: V \to \mathbf{R}$ diferenciable.

La diferencial de f en $p \in V$ és una aplicació lineal $\mathrm{D}f(p): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

Anomenem *gradient* de f en p el vector $\operatorname{grad} f(p) = \nabla f(p) \in \mathbf{R}^n$ tal que, $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$,

$$(\operatorname{grad} f(p) \mid \mathbf{u}) = \mathrm{D}f(p) \cdot \mathbf{u}$$

(aquesta fórmula determina unívocament el gradient, per ser el producte escalar no-degenerat).

Considerarem $\operatorname{grad} f(p)$ com un vector tangent en p. Per tant, hem definit un camp vectorial, anomenat *gradient* de f:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f: V \to \mathbf{R}^n.$$

Com s'expressa en coordenades? En la base canònica $(\mathbf{e}_j)$ de $\mathbf{R}^n$, que és ortonormal, el component j-èsim del vector $\operatorname{grad} f(p)$ s'obté així:

$$(\operatorname{grad} f(p))^j = (\operatorname{grad} f(p) \mid \mathbf{e}_j) = \mathrm{D}f(p) \cdot \mathbf{e}_j = \mathrm{D}_j f(p) :$$

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_1 f \\ \vdots \\ \mathrm{D}_n f \end{pmatrix}$$

Per tant *en coordenades cartesianes el gradient és la jacobiana escrita com a vector.*

Propietats $\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$

$\operatorname{grad}(\lambda f) = \lambda \operatorname{grad} f$

$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$

si $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *és diferenciable,* $\operatorname{grad}(h \circ f)(p) = h'(f(p)) \operatorname{grad} f(p)$

■

Exemple Sigui $r: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $r(x) = \left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2\right)^{1/2}$ (norma euclidiana de x).

Tenim que $\dfrac{\partial r}{\partial x^i} = x^i / r(x)$. Per tant, si escrivim $\mathbf{r}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $\mathbf{r}(x) = x$, obtenim

$$\operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r}\,, \text{ definit en } \mathbf{R}^n - \{0\}.$$

Així, $\operatorname{grad} r^\alpha = \alpha r^{\alpha-1} \operatorname{grad} r = \alpha r^{\alpha-2} \mathbf{r}$.

Per exemple, si $V(x) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} \dfrac{q}{r(x)}$, llavors $\operatorname{grad} V = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} \dfrac{q}{r^3} \mathbf{r}$.

Interpretació geomètrica: *el gradient indica la direcció de màxim creixement de la funció en un punt.*

Proposició *Siguin $V \subset \mathbf{R}^n$ obert, $f\colon V \to \mathbf{R}$ diferenciable, $p \in V$. La derivada direccional de f en p segons un vector unitari $\mathbf{u}$ val*

$$f'(p;\mathbf{u}) = \|\operatorname{grad} f(p)\| \cos\alpha$$

on α és l'angle format pels vectors $\operatorname{grad} f(p)$ i $\mathbf{u}$. El seu valor màxim és $\|\operatorname{grad} f(p)\|$, i s'assoleix en la direcció indicada pel gradient.

prova En efecte, prenem un vector tangent $\mathbf{u}_p$ unitari ($\|\mathbf{u}\| = 1$). La derivada direccional és

$$f'(p;\mathbf{u}) = (\operatorname{grad} f(p) \mid \mathbf{u}) = \|\operatorname{grad} f(p)\|\|\mathbf{u}\| \cos\alpha = \|\operatorname{grad} f(p)\| \cos\alpha.$$

■ Aquest nombre és màxim quan $\alpha = 0$, i val $\|\operatorname{grad} f(p)\|$
nul quan $\alpha = \pi/2$
mínim quan $\alpha = \pi$

Exemple Suposem que la temperatura en un punt del pla està donada per

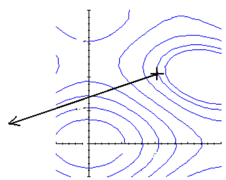
$$T(x,y) = 10 + 6\cos x\cos y + 3\cos 2x + 4\cos 3y.$$

Si una formiga és en el punt $p = (\pi/3, \pi/3)$, quina direcció ha de prendre per tal d'allunyar-se de la calor?

$\operatorname{grad} T(x,y) = \begin{pmatrix} -6\sin x\cos y - 6\sin 2x \\ -6\cos x\sin y - 12\sin 3y \end{pmatrix}$ $\quad$ $\operatorname{grad} T(p) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Direcció de màxim creixement: $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Direcció de màxima disminució: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

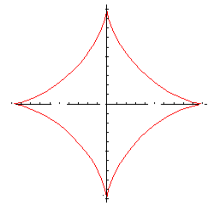


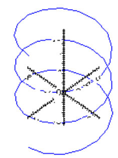
Exemples de corbes i de superfícies

astroide implícita $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

paramètrica $\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

explícita $y = \pm(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$ $(-a \le x \le a)$





hèlix paramètrica $\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \\ z(t) = t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$

implícita $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = R\cos z \end{cases}$

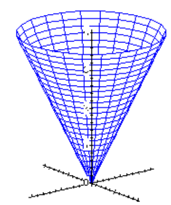
explícita $\begin{cases} x = R\cos z \\ y = R\sin z \end{cases}$ $(z \in \mathbf{R})$

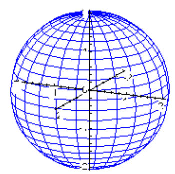
mig *con* implícita $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z \ge 0$

explícita $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

paramètrica $(\rho,\phi) \mapsto (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, \rho)$ $(\rho \ge 0,\ 0 \le \phi \le 2\pi)$

paramètrica $(x,y) \mapsto (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$





esfera implícita $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

explícita $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 \le R^2$

paramètrica $\left[\begin{array}{ccc} [0,2\pi]\times[0,\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (\phi,\theta) & \mapsto & g(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\phi\sin\theta \\ R\sin\phi\sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix} \end{array}\right]$

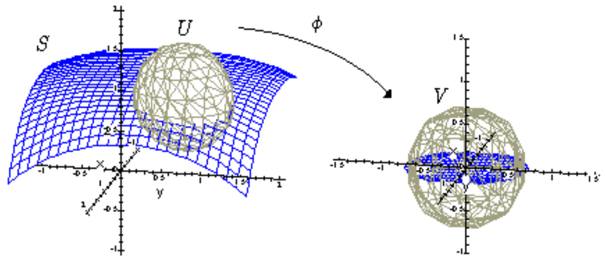
3 Superfícies

Una *superfície regular* de $\mathbf{R}^3$ és un subconjunt $S \subset \mathbf{R}^3$ que satisfà:

> per a tot $p \in S$, existeix un obert $U \ni p$ dins $\mathbf{R}^3$, i un difeomorfisme $\varphi\colon U \to V$, tals que
> $$\varphi(U \cap S) = V \cap (\mathbf{R}^2 \times \{0\}) =: T$$

És a dir,

> al voltant de cada punt, la superfície, amb un canvi de coordenades apropiat, es transforma en un tros de pla



Es diu que la superfície és *de classe* C^k quan, en la definició, tots els difeomorfismes φ es poden prendre de classe C^k.

En les noves coordenades $y = (y^1, y^2, y^3)$ la superfície es descriu localment

- implícitament: $y^3 = 0$
- paramètricament: $\left[\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (y^1, y^2) & \mapsto & (y^1, y^2, 0) \end{array}\right]$

Per tant en les velles coordenades $x = (x^1, x^2, x^3)$ la superfície es descriu localment

- implícitament: $F(x) := \varphi^3(x) = 0$
- paramètricament: $\left[\begin{array}{ccc} g\colon T & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (y^1, y^2) & \mapsto & \varphi^{-1}(y^1, y^2, 0) \end{array}\right]$

Notem que aquestes aplicacions F, g tenen jacobianes amb rang màxim (1 per a F, 2 per a g). Veurem immediatament que aquest és la condició clau que permet assegurar que certs objectes són superfícies regulars.

El graf d'una funció de dues variables és una superfície regular:

Proposició *Sigui $V \subset \mathbf{R}^2$ obert, i $f\colon V \to \mathbf{R}$ de classe C^k $(k \geq 1)$. El graf de f,*
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in V, z = f(x, y)\},$$
és una superfície regular en $\mathbf{R}^3$, de classe C^k.

prova Considerem $\left[\begin{array}{ccc} V \times \mathbf{R} & \xrightarrow{\varphi} & V \times \mathbf{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, y, z - f(x, y)) \end{array}\right]$

És una aplicació entre dos oberts de $\mathbf{R}^3$, de classe C^k i bijectiva, amb inversa $(x, y, \theta) \mapsto (x, y, \theta + f(x, y))$ de classe C^k; per tant és un difeomorfisme de classe C^k.
Notem que $(x, y, z) \in S$ sii $\varphi(x, y, z) \in V \times \{0\}$, i doncs φ transforma S en un tros de pla. ■

En general, una "superfície de nivell" d'una funció de tres variables és una superfície regular.

Proposició *Siguin $W \subset \mathbf{R}^3$ obert, $F\colon W \to \mathbf{R}$ una funció de classe C^k $(k \geq 1)$,*
$$S = \{x \in W \mid F(x) = 0\} = F^{-1}(0).$$
Suposem que $S \neq \emptyset$.
Si en tot $x \in S$ es té $\operatorname{rang} \mathrm{D}F(x) = 1$, llavors S és una superfície regular de classe C^k.

prova Sigui $p \in S$. Tenim $\mathrm{D}F(p) \neq 0$. Podem suposar, p. ex., que $\mathrm{D}_3F(p) \neq 0$.
Pel teorema de la funció implícita existeixen oberts $A \ni (p^1, p^2)$, $B \ni p^3$, i una funció de classe C^k $f\colon A \to \mathbf{R}$, tals que, si $x \in A \times B$,
$$F(x^1, x^2, x^3) = 0 \iff x^3 = f(x^1, x^2).$$
Per tant, sobre $A \times B$, S és el graf d'una aplicació de classe C^k. Segons la proposició anterior, en aquest obert S és una superfície regular. I així en tot punt p. ■

En canvi: si $U \xrightarrow{g} \mathbf{R}^3$ ($U \subset \mathbf{R}^2$ obert) és una *superfície parametritzada*, la imatge $S = g(U)$ pot no ser una superfície regular en el sentit anterior, encara que g sigui C^∞, injectiva i amb $\operatorname{rang} \mathrm{D}g(u) = 2$ en tot $u \in U$ (*parametrització regular*).
Tanmateix, si $U' \subset U$ és un obert prou petit, $g(U') \subset \mathbf{R}^3$ serà una superfície regular:

Proposició *Sigui $g\colon U \longrightarrow \mathbf{R}^3$ de classe C^k $(k \geq 1)$ en un obert $U \subset \mathbf{R}^2$. Sigui $u_o \in U$ tal que $\operatorname{rang} \mathrm{D}g(u_o) = 2$. Existeix un obert $U' \subset U$ contenint u_o tal que*
$$g(U') = \{g(u^1, u^2) \mid (u^1, u^2) \in U'\} \subset \mathbf{R}^3$$
és una superfície regular de classe C^k.

prova Suposem p. ex. $\left|\begin{matrix}\partial g^1/\partial u^1 & \partial g^1/\partial u^2 \\ \partial g^2/\partial u^1 & \partial g^2/\partial u^2\end{matrix}\right|_{u_o} \neq 0.$

Construïm la funció $\left[\begin{array}{ccc} U \times \mathbf{R} & \xrightarrow{G} & \mathbf{R}^3 \\ (u^1, u^2, \tau) & \mapsto & (g^1(u^1,u^2), g^2(u^1,u^2), g^3(u^1,u^2)+\tau) \end{array}\right].$

$\mathrm{J}G(u^1,u^2,\tau) = \begin{pmatrix} \partial g^1/\partial u^1 & \partial g^1/\partial u^2 & 0 \\ \partial g^2/\partial u^1 & \partial g^2/\partial u^2 & 0 \\ \partial g^3/\partial u^1 & \partial g^3/\partial u^2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det \mathrm{J}G(u_o^1, u_o^2, 0) \neq 0$.

Pel teorema de la funció inversa existeixen oberts $U' \times J \subset U \times \mathbf{R}$ contenint $(u_o^1, u_o^2, 0)$ i $V \subset \mathbf{R}^3$ contenint $G(u_o^1, u_o^2, 0)$ tals que $G\colon U' \times J \to V$ és un difeomorfisme.

■ Ara bé, $g(U') = \underbrace{G}_{\text{difeo}}\big(\underbrace{U' \times \{0\}}_{\text{tros de pla}}\big)$, per tant és una superfície.

Observació. Una superfície descrita explícitament com el graf d'una funció f de dues variables, $S = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in V, z = f(x,y)\}$, també es pot descriure:

• implícitament, amb l'equació

$$F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0;$$

notem que $\mathrm{J}F(x,y,z) = (-\mathrm{D}_1 f(x,y) \;\; -\mathrm{D}_2 f(x,y) \;\; 1) \neq 0$ arreu

• paramètricament, amb la parametrització

$$g(x,y) = (x, y, f(x,y)),$$

que és regular ja que $\mathrm{J}g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \mathrm{D}_1 f(x,y) & \mathrm{D}_2 f(x,y) \end{pmatrix}$ té rang 2 arreu.

4 Vectors tangents a una superfície

Sigui $S \subset \mathbf{R}^3$ una superfície regular, $p \in S$.

Anomenem *vectors tangents a S en p* els vectors tangents $(p, \mathbf{u})$ dels camins *continguts* en S i que passen per p.

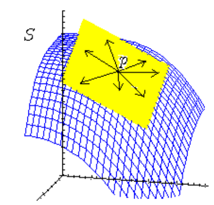
Anomenem *espai tangent a S en p* el conjunt dels vectors tangents a S en p:

$$\mathrm{T}_p(S) = \{(p,\mathbf{u}) \mid \text{existeix } \gamma\colon I \to S \subset \mathbf{R}^3 \text{ tal que } \gamma(0) = p,\, \gamma'(0) = \mathbf{u}\}.$$

Llavors el conjunt de punts de la forma

$$\{x = p + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \text{ tangent a } S \text{ en } p\}$$

és un pla dins $\mathbf{R}^3$, anomenat *pla tangent* a S en p.



Proposició *L'espai tangent a S en p és un espai vectorial de dimensió 2.*

prova D'acord amb la definició de superfície, podem trobar un obert $U \ni p$ i un difeomorfisme $U \xrightarrow{\varphi} V$ tals que $\phi(S \cap U) = T \cap V$, on $T = \mathbf{R}^2 \times \{0\}$. Tenim bijeccions

$$\{\text{camins en } U\} \leftrightarrow \{\text{camins en } V\}$$

$$\{\text{vectors tangents en } p\} \leftrightarrow \{\text{vectors tangents en } \varphi(p)\}$$

i doncs

$$\{\text{camins en } S \cap U\} \leftrightarrow \{\text{camins en } T \cap V\}$$

$$\{\text{vectors tangents a } S \text{ en } p\} \leftrightarrow \{\text{vectors tangents a } T \text{ en } \varphi(p)\} = \mathbf{R}^2 \times \{0\},$$

ja que sobre un obert de $\mathbf{R}^2$ podem passar per qualsevol punt amb qualsevol velocitat.

Tenint en compte que $\mathrm{D}\varphi(p)\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ és l'isomorfisme (d'espais vectorials) que transforma els vectors tangents, l'invers transforma el subespai $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ en $\mathrm{T}_p(S)$, que donc

■ també és de dimensió 2.

Tot seguit veurem com es calculen els vectors tangents en funció de com vingui donada la superfície.

Superfície descrita implícitament

Proposició *Sigui $S \subset \mathbf{R}^3$ una superfície, $p \in S$.*

Suposem que $S = F^{-1}(0)$ on $F: W \to \mathbf{R}$ és C^1 en un obert $W \subset \mathbf{R}^3$ i $\operatorname{rang} \mathrm{D}F(p) = 1$.

Llavors

$$\mathrm{T}_p(S) = \{(p, \mathbf{u}) \mid \mathrm{D}F(p) \cdot \mathbf{u} = 0\},$$

o sigui, és el nucli $\operatorname{Ker} \mathrm{D}F(p)$.

prova Veurem primer que $\mathrm{T}_p(S) \subset \operatorname{Ker} \mathrm{D}F(p)$.

Si $\mathbf{u}$ és tangent a S en p, existeix $\gamma: I \to W \subset \mathbf{R}^3$ contingut en S amb

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = \mathbf{u}.$$

Considerem $I \xrightarrow{\gamma} W \xrightarrow{F} \mathbf{R}$. $F(\gamma(t)) = 0$ perquè F s'anul·la en els punts de S.

Per la regla de la cadena tenim $\mathrm{D}F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$, o sigui que $\mathrm{D}F(p) \cdot \mathbf{u} = 0$.

■ Finalment, com que els dos espais tenen dimensió 2, coincideixen: $\mathrm{T}_p(S) = \operatorname{Ker} \mathrm{D}F(p)$.

Punts del pla tangent: $x = p + \mathbf{u}$, on $\mathbf{u}$ tangent a S en p.

Equació del pla tangent a S en p:

$$\mathrm{D}F(p) \cdot (x - p) = 0.$$

En components: $\mathrm{D}_1F(p)(x^1 - p^1) + \mathrm{D}_2F(p)(x^2 - p^2) + \mathrm{D}_3F(p)(x^3 - p^3) = 0$.

En termes del gradient:

$$(\operatorname{grad} F(p) \mid x - p) = 0 \quad \text{(pla normal a } \operatorname{grad} F(p) \text{ en } p.)$$

Recta normal a S en p:

$$p + \lambda \operatorname{grad} F(p) \quad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

Superfície descrita explícitament

Si S és el graf d'una funció $f: U \to \mathbf{R}$ ($U \subset \mathbf{R}^2$ obert) de classe C^1,

$$S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in U, z = f(x, y)\},$$

recordem que S és la superfície de nivell 0 de $F(x, y, z) = z - f(x, y)$, i $\mathrm{J}F(x, y, z) = (-\mathrm{D}_1f(x, y) \;\; -\mathrm{D}_2f(x, y) \;\; 1)$.

Sigui $(x_o, y_o, z_o) \in S$: $(x_o, y_o) \in U$, $z_o = f(x_o, y_o)$.

Equació del pla tangent: $\mathrm{D}_1f(x_o, y_o)(x - x_o) + \mathrm{D}_2f(x_o, y_o)(y - y_o) - (z - z_o) = 0$, o sigui

$$z = z_o + \mathrm{D}_1f(x_o, y_o)(x - x_o) + \mathrm{D}_2f(x_o, y_o)(y - y_o) :$$

El pla tangent al graf de f en $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ és el graf de l'aproximació lineal de f en (x_o, y_o).

Això ens recorda la interpretació geomètrica de la diferenciabilitat: existència del pla tangent.

Equació de la recta normal:

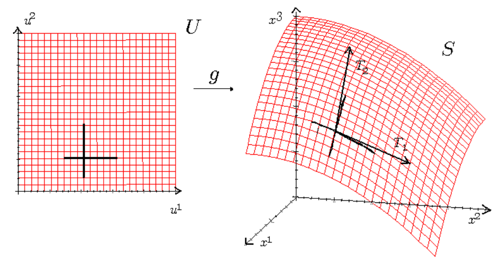
$$\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \partial f/\partial x(x_o, y_o) \\ \partial f/\partial y(x_o, y_o) \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

Superfície descrita paramètricament

Sigui $g: U \to \mathbf{R}^3$ ($U \subset \mathbf{R}^2$ obert) una parametrització injectiva de classe C^1 d'una superfície $S = g(U)$.

Sigui $u_o = (u_o^1, u_o^2) \in U$. La variació d'un dels dos paràmetres descriu camins en S

$$u^1 \mapsto g(u^1, u_o^2) \qquad u^2 \mapsto g(u_o^1, u^2)$$



Tenen vectors tangents a S en $p = g(u_o)$:

$$T_1(u_o) = \mathrm{D}_1g(u_o) = \begin{pmatrix} \partial g^1(u_o)/\partial u^1 \\ \partial g^2(u_o)/\partial u^1 \\ \partial g^3(u_o)/\partial u^1 \end{pmatrix} \qquad T_2(u_o) = \mathrm{D}_2g(u_o) = \begin{pmatrix} \partial g^1(u_o)/\partial u^2 \\ \partial g^2(u_o)/\partial u^2 \\ \partial g^3(u_o)/\partial u^2 \end{pmatrix}$$

Matricialment $\mathrm{D}g = (T_1 \quad T_2) = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_1g^1 & \mathrm{D}_2g^1 \\ \mathrm{D}_1g^2 & \mathrm{D}_2g^2 \\ \mathrm{D}_1g^3 & \mathrm{D}_2g^3 \end{pmatrix}$

La parametrització és regular $\iff$ $\mathrm{D}g(u_o)$ té rang 2 $\iff$ $T_1(u_o), T_2(u_o)$ són linealment independents.

Llavors, com que l'espai tangent té dimensió 2, està generat per T_1 i T_2:

$$\mathrm{T}_p(S) = \langle T_1(u_o), T_2(u_o) \rangle.$$

Hem provat el resultat següent:

Proposició *Sigui $g\colon U \to \mathbf{R}^3$ ($U \subset \mathbf{R}^2$ obert) una parametrització injectiva de classe C^1 d'una superfície regular $S = g(U)$. Sigui $u_o = (u_o^1, u_o^2) \in U$. Les columnes $\mathbf{T}_1(u_o)$, $\mathbf{T}_2(u_o)$ de la matriu jacobiana $\mathrm{J}g(u_o)$ són vectors tangents a S en $p = g(u_0)$, i si la parametrització és regular són una base de l'espai tangent $\mathrm{T}_p(S)$.*

Equació del pla tangent:

$$p + \lambda\, T_1(u_o) + \mu\, T_2(u_o) \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R}).$$

Equació de la recta normal:

$$\begin{aligned} (T_1(u_o) \mid x - p) &= 0 \\ (T_2(u_o) \mid x - p) &= 0 \end{aligned}$$

Producte vectorial fonamental de la parametrització:

$$T_1 \times T_2 = \begin{pmatrix} \left|\dfrac{\partial(y,z))}{\partial(u,v)}\right| \\ \left|\dfrac{\partial(z,x))}{\partial(u,v)}\right| \\ \left|\dfrac{\partial(x,y))}{\partial(u,v)}\right| \end{pmatrix}$$

$T_1 \times T_2 \neq 0$ sii la parametrització és regular.

Llavors és vector director de la recta normal:

$$p + \lambda T_1 \times T_2 \quad (\lambda \in \mathbf{R})$$

Vector normal unitari: $\dfrac{T_1 \times T_2}{\|T_1 \times T_2\|}$.

Observem que aquest vector no depèn essencialment de la parametrització, llevat que un canvi de parametrització pot produir un canvi de signe en aquest vector.

Exemple Superfície definida per $z = f(x,y) = x^2 + 2y^2$ (paraboloide el·líptic).

$\mathrm{D}f(x,y) = (\,2x \quad 4y\,)$

Aproximació lineal: $f(x,y) = f(x_o,y_o) + \mathrm{D}f(x_o,y_o) \cdot \begin{pmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{pmatrix} + o(\|(x - x_o, y - y_o)\|)$.

Calculem el pla tangent en $(x_o, y_o) = (1,2)$:

$$f(1,2) = 9, \quad \mathrm{D}f(1,2) = (2 \ \ 8)$$

$$z - 9 = (\,2 \quad 8\,) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} = 2(x-1) + 8(y-2)$$

Per tant:

$$2x + 8y - z = 9.$$

Exemple Superfície S definida per $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 18 = 0$ (hiperboloide d'un full).

$\mathrm{D}F(x,y.z) = (\,2x \quad 2y \quad -2z\,)$

$\operatorname{rang} \mathrm{D}(x,y,z) < 1 \iff \mathrm{D}F(x,y,z) = (0\;0\;0) \iff (x,y,z) = (0,0,0) \notin S$.

Per tant $S = F^{-1}(0)$ és una superfície regular.

Pla tangent en $P = (3,5,-4)$: $\mathrm{D}F(3,5,-4) = (6\;10\;8) \Longrightarrow$

$$(\,6 \quad 10 \quad 8\,) \begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 5 \\ z + 4 \end{pmatrix} = 2(3x + 5y + 4z - 18) = 0.$$

Recta normal a S en P: $\operatorname{grad} F(P) = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exemple Superfície: esfera de radi R centrada a l'origen, parametritzada amb

$$g\colon (\phi,\theta) \mapsto (R\cos\phi\sin\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\theta).$$

$$T_\phi = R \begin{pmatrix} -\sin\phi\sin\theta \\ \cos\phi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T_\theta = R \begin{pmatrix} -\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \mathrm{D}g = (\,T_\phi \quad T_\theta\,).$$

$\operatorname{rang}(\,T_\phi \quad T_\theta\,) = 2$ en $]0,2\pi[\, \times\,]0,\pi[$,

per tant T_ϕ, T_θ són base de l'espai tangent en cada punt.

Equació del pla tangent a S en el punt de coordenades (ϕ,θ):

$$\begin{pmatrix} R\cos\phi\sin\theta \\ R\sin\phi\sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\sin\phi\sin\theta \\ \cos\phi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Eliminant els paràmetres es pot veure que és

$$(\cos\phi\sin\theta)x + (\sin\phi\sin\theta)y + (\cos\theta)z = R.$$

Producte vectorial fonamental: $T_\phi \times T_\theta = -R^2 \sin\theta \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = -R\sin\theta\, g(\phi,\theta)$.

Vector normal unitari: $N = \dfrac{T_1 \times T_2}{\|T_1 \times T_2\|} = -\begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{R} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix}$.

Recta normal: $p + \lambda N$.

5 Corbes

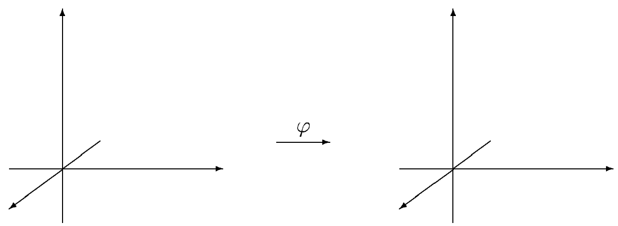
Una *corba regular* de $\mathbf{R}^3$ (per exemple) és un subconjunt $C \subset \mathbf{R}^3$ que satisfà:

per a tot $p \in C$, existeix un obert $U \ni p$ dins $\mathbf{R}^3$ i un difeomorfisme $\varphi: U \to V$ tals que

$$\varphi(U \cap C) = V \cap (\mathbf{R} \times \{0\} \times \{0\}) = T$$

És a dir,

al voltant de cada punt la corba, amb un canvi de coordenades apropiat, és un tros de recta



Es diu que la corba és de classe C^k quan, en la definició, tots els difeomorfismes φ es poden prendre de classe C^k.

En les noves coordenades $y = (y^1, y^2, y^3)$ la corba es descriu localment

- implícitament: $y^2 = y^3 = 0$
- paramètricament: $\begin{bmatrix} T & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ y^1 & \mapsto & (y^1, 0, 0) \end{bmatrix}$

Per tant en les velles coordenades $x = (x^1, x^2, x^3)$ la corba es descriu localment

- implícitament: $\varphi^2(x) = \varphi^3(x) = 0$
- paramètricament: $\begin{bmatrix} T & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ y^1 & \mapsto & \varphi^{-1}(y^1, 0, 0) \end{bmatrix}$

De manera anàloga podríem parlar de corbes en el pla $\mathbf{R}^2$, i més generalment en $\mathbf{R}^n$.

El graf d'una funció d'una variable és una corba regular

Proposició *Sigui $U \subset \mathbf{R}$ obert, i $f, g: U \to \mathbf{R}$ funcions de classe C^k $(k \geq 1)$. Llavors el graf de (f, g),*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \in U, y = f(x), z = g(x)\},$$

és una corba regular en $\mathbf{R}^3$, de classe C^k.

prova La demostració és molt semblant a la de les superfícies: l'aplicació

$$\varphi(x, y, z) = (x, y - f(x), z - g(x))$$

és un difeomorfisme de $U \times \mathbf{R}^2$ en ell mateix que transforma C en un fragment de la recta $y = z = 0$. ∎

En general, la intersecció de dues "superfícies de nivell" és una corba regular

Proposició *Siguin $W \subset \mathbf{R}^3$ obert, $F, G: W \to \mathbf{R}$ funcions de classe C^k,*

$$C = \{x \in W \mid F(x) = G(x) = 0\} = F^{-1}(0) \cap G^{-1}(0).$$

Suposem que $C \neq \emptyset$.

Si en tot $x \in C$ $\operatorname{rang} \mathrm{D}(F, G)(x) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} \mathrm{J}F(x) \\ \mathrm{J}G(x) \end{pmatrix} = 2$, llavors C és una corba regular de classe C^k.

prova Sigui $p \in C$. Com que la jacobiana té rang 2, podem suposar, per exemple, que

$$\det \left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(x^2, x^3)} \right) \bigg|_p \neq 0.$$

Pel teorema de la funció implícita existeixen oberts $A \ni p^1$, $B \ni (p^2, p^3)$, i una funció de classe C^k $f = (f^2, f^3): A \to \mathbf{R}^2$ tals que en $A \times B$,

$$\begin{cases} F(x^1, x^2, x^3) = 0 \\ G(x^1, x^2, x^3) = 0 \end{cases} \iff (x^2, x^3) = f(x^1).$$

És a dir, sobre l'obert $A \times B$ C és el graf d'una funció d'una variable, per tant és una corba regular. ∎

Es podria enunciar un resultat similar per a les corbes de nivell d'una funció de dues variables: en general, donen corbes regulars en el pla.

Descripció paramètrica

Proposició *Sigui $\gamma: U \to \mathbf{R}^3$ de classe C^k $(k \geq 1)$ en un obert $U \subset \mathbf{R}$ (es diu que γ és una corba parametritzada). Sigui $t_o \in U$ tal que $\operatorname{rang} \mathrm{D}\gamma(t_o) = 1$ (es diu que la parametrització és regular en t_o). Existeix un obert $J \subset U$ contenint t_o tal que*

$$\gamma(J) = \{\gamma(t) \mid t \in J\} \subset \mathbf{R}^3$$

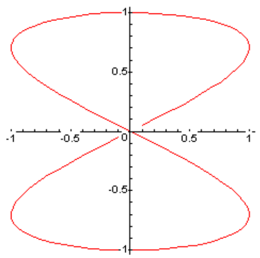
és una corba regular de classe C^k.

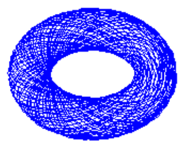
La demostració seria similar a la de les superfícies parametritzades. També es podria donar un enunciat similar per a corbes parametritzades en $\mathbf{R}^2$ (o en $\mathbf{R}^n$).

Cal observar que, encara que γ sigui C^∞, injectiva i amb $\gamma'(t) \neq 0$ sempre, és possible que la imatge *sencera* $\gamma(U)$ no sigui una corba regular.

Exemple Corba en forma de 8.

Exemple Corba densa en el tor.





Observació Una corba en $\mathbf{R}^3$ descrita explícitament com el graf d'una funció d'una variable $(f,g)\colon U \to \mathbf{R}^2$, $C = \{(x, f(x), g(x)) \mid x \in U\}$, també es pot descriure:

- implícitament com el conjunt de solucions de

$$F(x,y,z) = y - f(x) = 0, \quad G(x,y,z) = z - g(x) = 0;$$

tenim $\begin{pmatrix} \mathrm{J}F(x,y,z) \\ \mathrm{J}G(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f'(x) & 1 & 0 \\ -g'(x) & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que té rang 2 arreu.

- paramètricament, amb la parametrització

$$\gamma(x) = (x, f(x), g(x)),$$

que és regular ja que $\gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$, enlloc nul.

6 Vectors tangents a una corba

Tot el que hem fet amb superfícies es pot fer amb corbes.

Es defineix *vector tangent* a una corba regular C en un punt $p \in C$.

El conjunt dels vectors tangents a C en p, $\mathrm{T}_p(C)$, és un espai vectorial de dimensió 1, anomenat *espai tangent* a C en p.

Els punts de la forma $x = p + \mathbf{u}$, ($\mathbf{u}$ vector tangent a C en p) formen una recta dins $\mathbf{R}^3$, o $\mathbf{R}^2$ … anomenada *recta tangent* a C en p. Podem calcular-la segons com tinguem descrita la corba.

Corba descrita paramètricament Sigui $\gamma\colon I \to \mathbf{R}^n$ ($n = 2, 3$), on $I \subset \mathbf{R}$ obert, una parametrització injectiva de classe C^1, de manera que $C = \gamma(I)$. Sigui $p = \gamma(t_o)$.

Suposem que a $t = t_o$ la parametrització és regular, és a dir, el vector tangent $T(t_o) = \gamma'(t_o) \neq 0$.

Com que és tangent a la corba en p i l'espai tangent té dimensió 1, $\mathrm{T}_p(C)$ està generat per $T(t_o)$.

Equació de la recta tangent a C en p:

$$p + \lambda T(t_o) \quad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

Equació de la recta normal ($n = 2$) o pla normal ($n = 3$): punts x tals que

$$(T(t_o) \mid x - p) = 0.$$

Corba descrita implícitament en el pla Sigui $C \subset \mathbf{R}^2$ una corba en el pla, $p \in C$.

Suposem que $C = F^{-1}(0)$ on $F\colon W \to \mathbf{R}$ és C^1 en un obert $W \subset \mathbf{R}^2$ i $\operatorname{rang} \mathrm{D}F(p) = 1$.

Equació de la recta tangent a C en p:

$$\mathrm{D}F(p) \cdot (x - p) = 0,$$

o, en termes del gradient,

$$(\operatorname{grad} F(p) \mid x - p) = 0 \quad (\text{pla normal a } \operatorname{grad} F(p) \text{ en } p).$$

Recta normal a C en p:

$$P + \lambda \operatorname{grad} F(p) \quad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

Corba descrita implícitament en l'espai Sigui ara $C \subset \mathbf{R}^3$ una corba en l'espai, $p \in C$. Suposem que $C = F^{-1}(0) \cap G^{-1}(0)$ on $F, G\colon W \to \mathbf{R}$ són C^1 en un obert $W \subset \mathbf{R}^3$ i $\operatorname{rang} \mathrm{D}(F,G)(p) = 2$.

Equació de la recta tangent a C en p:

$$\begin{cases} \mathrm{D}F(p)\cdot(x-p)=0 \\ \mathrm{D}G(p)\cdot(x-p)=0 \end{cases}$$

En termes del gradient:

$$\begin{cases} (\operatorname{grad} F(p) \mid x-p)=0 \\ (\operatorname{grad} G(p) \mid x-p)=0 \end{cases}$$

També es pot representar per

$$p+\lambda \operatorname{grad} F(p)\times \operatorname{grad} G(p).$$

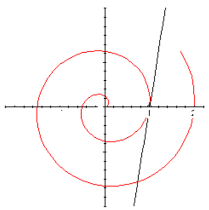
Pla normal a C en p:

$$p+\lambda \operatorname{grad} F(p)+\mu \operatorname{grad} G(p).$$

Exemple Sigui $\gamma\colon]0,+\infty[\, \to \mathbf{R}^2$ definida per

$$\gamma(t)=(t\cos 2\pi t, t\sin 2\pi t).$$

$C=\gamma(]0,+\infty[)\subset \mathbf{R}^2$ és una espiral. Es pot comprovar que és una corba regular.



$\gamma'(t)=(\cos 2\pi t-2\pi t\sin 2\pi t, \sin 2\pi t+2\pi t\cos 2\pi t)$.

Prenem per exemple $t=1$. El vector $\gamma'(1)=(1,2\pi)$ és tangent a C en $p=\gamma(1)=(1,0)$.

Recta tangent a C en p:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2\pi \end{pmatrix}$$

o bé $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2\pi}$, o sigui $y=2\pi(x-1)$.

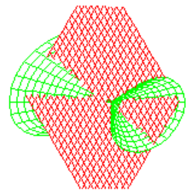
Recta normal a C en p:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 2\pi \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple Sigui C el conjunt de solucions del sistema

$$\begin{cases} F(x,y,z) &= x+y+z-3=0 \\ G(x,y,z) &= x^2-y^2+2z^2-2=0 \end{cases}$$

(intersecció d'un pla i un hiperboloide d'un full).



Vegem que C és una corba regular.

$C\neq\emptyset$, ja que p.ex. $(1,1,1)\in C$.

Les funcions són C^∞. Calculem la jacobiana $\partial(F,G)/\partial(x,y,z)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & -2y & 4z \end{pmatrix}$.

Aquesta matriu té:

- rang 2 arreu excepte on té rang 1
- rang 1 en els punts de la recta $x=-y=2z$

  substituint aquests punts dins el sistema surt $\begin{cases} 2z-2z+z-3=0 \Longrightarrow z=3 \\ 4z^2-4z^2+2z^2-2=0 \Longrightarrow z^2=1 \end{cases}$

  per tant cap punt d'aquesta recta no és de C

Per tant la jacobiana té rang màxim en tot punt de C, que és doncs una corba regular en tot punt.

Calculem la recta tangent i el pla normal a C en $p=(1,1,1)$.

$\mathrm{J}(F,G)(p)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

$\operatorname{grad} F(p)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{grad} G(p)=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{grad} F(p)\times \operatorname{grad} G(p)=\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

recta tangent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=2 \end{cases} \text{ i també } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

pla normal:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ i també } 3(x-1)-(y-1)-2(z-1)=3x-y-2z=0.$$

7 Varietats m-dimensionals

Els conceptes de corba i superfície es generalitzen de manera immediata a objectes de més dimensions.

Una *varietat m-dimensional* de $\mathbf{R}^n$ és un subconjunt $M \subset \mathbf{R}^n$ que satisfà:

> per a tot $p \in M$, existeix un obert $U \ni p$ dins $\mathbf{R}^n$ i un difeomorfisme $\varphi\colon U \to V$ tals que
> $$\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^m \times \{(0,\dots,0)\}) = T$$

És a dir,

> al voltant de cada punt la varietat, amb un canvi de coordenades apropiat, és com un obert de $\mathbf{R}^m$.

En les noves coordenades $y = (y^1,\dots,y^n)$ la varietat es descriu localment

- implícitament: $y^{m+1} = \dots = y^n = 0$
- paramètricament: $\left[\begin{array}{rcl} T & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ (y^1,\dots,y^m) & \mapsto & (y^1,\dots,y^m,0,\dots,0) \end{array}\right]$

Per tant en les velles coordenades $x = (x^1,\dots,x^n)$ la corba es descriu localment

- implícitament: $\varphi^{m+1}(x) = \dots = \varphi^n(x) = 0$
- paramètricament: $\left[\begin{array}{rcl} T & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ (y^1,\dots,y^m) & \mapsto & \varphi^{-1}(y^1,\dots,y^m,0,\dots,0) \end{array}\right]$

Si $p \in M$, anomenem *vectors tangents a M en p* els vectors tangents $(p,\mathbf{u})$ dels camins *continguts* en M i que passen per p.

Anomenem *espai tangent a M en p* el conjunt dels vectors tangents a M en p:

$$\mathrm{T}_p(M) = \{(p,\mathbf{u}) \mid \text{existeix } \gamma\colon I \to M \subset \mathbf{R}^n \text{ tal que } \gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = \mathbf{u}\}.$$

Es demostra que *l'espai tangent a M en p és un espai vectorial de dimensió m.*

Llavors el conjunt de punts de la forma

$$\{x = p + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \text{ tangent a } M \text{ en } p\}$$

és una varietat afí de dimensió m dins $\mathbf{R}^n$.

La construcció de varietats m-dimensionals mitjançant parametritzacions o sistemes d'equacions es fa com amb les corbes i superfícies, i l'espai tangent s'obté de manera semblant.

Una observació final: Malgrat que estem molt acostumats a visualitzar $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ ja sabem que els espais vectorials de dimensió m qualsevol són importants, perquè apareixen en nombroses aplicacions.

De la mateixa manera, estem acostumats a visualitzar corbes i superfícies, però les varietats de dimensió superior també apareixen en nombroses aplicacions, sempre que tenim un conjunt de variables lligades per certes relacions; per exemple, el conjunt de possibles configuracions d'un sòlid rígid en l'espai (com ara un satèl·lit artificial …) és una varietat de dimensió 6.