

Ampliació de Models Matemàtics de la Física

Definicions i resultats

apunts per a l'assignatura d'Ampliació de Models Matemàtics de la Física
de la Llicenciatura de Matemàtiques de la FME

Xavier Gràcia

xavier.gracia@upc.edu

<http://web.mat.upc.edu/xavier.gracia/ammf/>

Departament de Matemàtiques
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

2005–2015 / versió 16 juliol 2024



© Xavier Gràcia Sabaté 2024

Document subjecte a la llicència de Reconeixement –
NoComercial – CompartirIgual 4.0 Internacional

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Sumari

1	Connexions	5
1.1	Connexions en una varietat	5
1.2	Derivació covariant de camps tensorials	7
1.3	Derivació covariant al llarg de camins	8
1.4	Transport paral·lel i geodèsiques	10
1.5	Torsió i curvatura d'una connexió	11
2	Varietats pseudoriemannianes	15
2.1	Varietats pseudoriemannianes	15
2.2	Algunes construccions en varietats pseudoriemannianes	16
2.3	La connexió de Levi-Civita	17
2.4	Subvarietats d'una varietat riemanniana	18
2.5	Curvatura en una varietat pseudoriemanniana	20
2.6	Distància en una varietat riemanniana	21
3	Fibrats vectorials	23
3.1	Fibracions	23
3.2	Fibrats vectorials	26
3.3	Operacions amb fibrats vectorials	28
3.4	El fibrat tangent d'una varietat	30
3.5	Vectors tangents verticals	32
4	Estructures canòniques dels fibrats tangent i cotangent	35
4.1	L'endomorfisme vertical de $T(TM)$	35
4.2	La involució canònica de $T(TM)$	36
4.3	Aixecament de camps vectorials al fibrat tangent	36
4.4	Equacions diferencials de segon ordre	37
4.5	Les formes diferencials canòniques del fibrat cotangent	39
4.6	Aixecament de difeomorfismes i de camps vectorials al fibrat co- tangent	40
5	Varietats simplèctiques	43
5.1	Varietats simplèctiques. Teorema de Darboux	43
5.2	Camps vectorials hamiltonians	44
5.3	Claudàtor de Poisson	45
5.4	Simplectomorfismes i transformacions canòniques	47
5.5	Varietats de Poisson	48
6	Càlcul variacional	53
6.1	Funcionals i variacions	53
6.2	Equació d'Euler-Lagrange	55
6.3	Propietats i exemples	57
6.4	Aplicació: geodèsiques en varietats pseudoriemannianes	58
6.5	La segona variació	59
6.6	Altres problemes variacionals	60
7	Fonaments de la mecànica	65
7.1	Principis bàsics	65
7.2	L'espai temps galileà	65
7.3	El grup de Galileu	66

7.4	Cinemàtica	68
7.5	Dinàmica	69
7.6	Sistema de partícules a l'espai	70
7.7	El problema dels dos cossos	73
8	Mecànica en una varietat riemanniana	75
8.1	L'equació de Newton	75
8.2	Forces conservatives	76
8.3	Forces dependents de la velocitat i del temps	77
8.4	Sistemes amb lligams. Principi de d'Alembert	78
8.5	Sistemes de partícules a l'espai amb lligams ideals	79
8.6	Equacions de Lagrange	80
9	Formalisme lagrangià	83
9.1	L'equació d'Euler–Lagrange	83
9.2	Formulació geomètrica de l'equació d'Euler–Lagrange	84
9.3	Lagrangianes regulars	86
9.4	Simetries i constants del moviment	87
9.5	Lagrangianes mecàniques	88
9.6	Generalitzacions de les lagrangianes mecàniques	90
9.7	Lagrangianes singulars	91
10	Formalisme hamiltonià	93
10.1	Sistemes dinàmics hamiltonians	93
10.2	Simetries dels sistemes dinàmics hamiltonians	94
10.3	Formulació hamiltoniana de la mecànica	95
10.4	Sistemes completament integrables	96
A	Apèndixs	99
A.1	Fluxos dependents del temps	99
A.2	Transformacions i simetries, finites i infinitesimals	101
A.3	Constants del moviment	103
	Índex terminològic	105

Continuant el costum endegat amb Geometria Diferencial 2, aquí teniu el resum dels apunts de l'assignatura d'Ampliació de Models Matemàtics de la Física, optativa de l'antiga llicenciatura de matemàtiques de la FME que vaig impartir ocasionalment fins l'any 2010. No hi ha demostracions, ni gairebé exemples; només les definicions i els resultats. Us agrairé que em feu arribar correccions i suggeriments.

Les definicions apareixen *subratllades*. La resta d'enunciats són proposicions, teoremes, corollaris, ...

Llevat de menció contrària, totes les varietats considerades són varietats diferenciabls de classe C^∞ , reals, pures, de dimensió finita i separades; sovint també suposarem que són paracompactes. Usarem el conveni de sumació d'Einstein de manera habitual. Les notacions utilitzades són molt semblants a les dels apunts de Geometria Diferencial 2.

1 Connexions

Moltes de les operacions considerades en aquest tema es poden efectuar amb graus de diferenciabilitat finits, però per simplicitat la teoria s'exposarà amb aplicacions de classe C^∞ .

1.1 Connexions en una varietat

Hi ha un nombre sorprenentment elevat de maneres de definir una connexió. Ho farem en termes de la derivació covariant.

- (1.1.1) Sigui M una varietat diferenciable, $\mathfrak{X}(M)$ el $C^\infty(M)$ -mòdul dels seus camps vectorials diferenciables. Una **connexió**¹ (o, més pròpiament, una **derivació covariant**) en M és una aplicació

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

que satisfà les propietats següents:

- i) $\nabla_X Y$ és $\mathbf{R}$ -lineal en Y ,
- ii) $\nabla_X Y$ és $C^\infty(M)$ -lineal en X ,
- iii) donada $f \in C^\infty(M)$, $\nabla_X(fY) = (\mathcal{L}_X f)Y + f(\nabla_X Y)$.

Es diu que $\nabla_X Y$ és la **derivada covariant** de Y respecte a X .

- (1.1.2) $(\nabla_X Y)(p)$ només depèn de:

- el valor de X en p ;
- el valor de Y en un veïnat qualsevol de p .

D'acord amb la primera d'elles, està ben definit $\nabla_u Y$ per a $u \in TM$ un vector tangent qualsevol.

- (1.1.3) Sigui ∇ una connexió en M , i sigui $U \subset M$ un conjunt obert. Existeix una connexió ∇^U en U definida per la propietat següent: si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla^U_{X|_U} Y|_U = (\nabla_X Y)|_U$.

La definició es pot fer així. Donats camps vectorials X', Y' en U i un punt $p \in U$, siguin X, Y camps vectorials en M que coincideixen amb X', Y' en un veïnat de p . Llavors es defineix $(\nabla^U_{X'} Y')(p) = (\nabla_X Y)(p)$.

Sovint ometrem el superíndex i escriurem simplement $\nabla_{X'} Y'$.

¹O **connexió afí**, per a distingir-ho d'altres conceptes de connexió.

- (1.1.4) Sigui (U, φ) una carta de M . Els camps vectorials coordenats $\partial/\partial x^i$ defineixen una base de $\mathfrak{X}(U)$, i per tant es pot escriure

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Les funcions $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$ s'anomenen **símbols de Christoffel** de la connexió ∇ relatius a la base $\partial/\partial x^i$ (o a la carta (U, φ)).

Més generalment, sigui U un conjunt obert tal que el mòdul $\mathfrak{X}(U)$ té una base de camps vectorials (E_i) , no necessàriament camps coordenats. Llavors també es pot escriure

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k,$$

per a certes funcions Γ_{ij}^k que també anomenarem símbols de Christoffel.

- (1.1.5) Sigui M una varietat paral·lelitzable, de manera que el mòdul $\mathfrak{X}(M)$ té una base de camps vectorials (E_i) . Fixada aquesta base, hi ha una bijecció entre el conjunt de les connexions ∇ en M i el conjunt de les famílies de funcions diferenciables (Γ_{ij}^k) : una connexió té associats els símbols de Christoffel, i, recíprocament, donades unes funcions (Γ_{ij}^k) la fórmula

$$\nabla_X Y = (\mathcal{L}_X g^k + \Gamma_{ij}^k f^i g^j) E_k$$

per a $X = f^i E_i$ i $Y = g^j E_j$ camps vectorials diferenciables en M , defineix una connexió.

Dit altrament, els símbols de Christoffel determinen la connexió, en el sentit que permeten calcular la derivada covariant en l'obert on estan definits.

- (1.1.6) *La connexió estàndard de $\mathbf{R}^n$*

La **connexió estàndard** de $\mathbf{R}^n$ és aquella on els símbols de Christoffel en el sistema de coordenades canònic valen zero, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0$.

- (1.1.7) Sigui M una varietat i ∇ una connexió en M . Siguin (x^i) , $(\bar{x}^\alpha)$ dos sistemes de coordenades sobre un conjunt obert de M , i siguin Γ_{ij}^k , $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ els respectius símbols de Christoffel. Llavors

$$\Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\gamma} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\delta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\delta}.$$

- (1.1.8) Una connexió *no* equival a un camp tensorial, els símbols de Christoffel *no* són els components d'un camp tensorial, i no té sentit dir que una connexió és nul·la. Les connexions formen un espai afí, no pas un espai vectorial.

- (1.1.9) Siguin ∇^α connexions en una varietat, λ_α una família de funcions diferenciables tals que els seus suports formen un conjunt localment finit. Llavors $\nabla = \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla^\alpha$, entesa com $\nabla_X Y = \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla^\alpha_X Y$, és una connexió sii $\sum \lambda_\alpha = 1$.
- (1.1.10) Tota varietat diferenciable paracompacta² té una connexió. Recíprocament, es pot provar que l'existència d'una connexió implica que la varietat és paracompacta.

1.2 Derivació covariant de camps tensorials

En aquest apartat M és una varietat diferenciable i ∇ una connexió en M .

- (1.2.1) Sigui X un camp vectorial diferenciable en M . Existeix una única aplicació $\nabla_X: \mathcal{T}_\bullet(M) \rightarrow \mathcal{T}_\bullet(M)$ de l'àlgebra dels camps tensorials diferenciables en ella mateixa tal que sobre funcions coincideix amb $\mathcal{L}_X$, sobre camps vectorials coincideix amb ∇_X , i satisfà les propietats següents:

- i) És $\mathbf{R}$ -lineal.
- ii) Aplica $\mathcal{T}_\ell^k(M)$ en $\mathcal{T}_\ell^k(M)$.
- iii) $\nabla_X(S \otimes T) = (\nabla_X S) \otimes T + S \otimes (\nabla_X T)$.
- iv) Commuta amb les contraccions interiors

Aquestes propietats signifiquen que ∇_X és una derivació de la $\mathbf{R}$ -àlgebra $\mathcal{T}_\bullet(M)$, de grau $(0, 0)$, que commuta amb les contraccions interiors.

- (1.2.2) Es diu que $\nabla_X: \mathcal{T}_\bullet(M) \rightarrow \mathcal{T}_\bullet(M)$ és la **derivació covariant** definida per la connexió.
- (1.2.3) El valor de $(\nabla_X T)(p)$ només depèn de $X(p)$ i del valor de T en un veïnat de p . Per tant, la derivació covariant també es pot aplicar a camps tensorials definits en un conjunt obert $U \subset M$.
- (1.2.4) Les propietats anteriors permeten calcular ∇_X sobre qualsevol camp tensorial diferenciable a partir del seu coneixement sobre funcions i camps vectorials, i per exemple si $\alpha \in \mathcal{T}_1(M) = \Omega^1(M)$

$$\langle \nabla_X \alpha, Y \rangle = \nabla_X \langle \alpha, Y \rangle - \langle \alpha, \nabla_X Y \rangle.$$

²Això equival a afirmar que per a qualsevol recobriment obert de M hi ha una partició de la unitat subordinada, a que M és metrizable, i també a que tot component connex de M té base numerable d'oberts.

Més particularment,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^j = -\Gamma_{ik}^j dx^k.$$

(1.2.5) En coordenades, suposem que s'escriu

$$Y = Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}.$$

Llavors $\nabla_Y T = S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes \partial/\partial x^{i_1} \otimes \dots \otimes \partial/\partial x^{i_r}$, essent $S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = Y^k \left(\partial_k T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{n=1}^r T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots \ell \dots i_r} \Gamma_{k\ell}^{i_n} - \sum_{n=1}^s T_{j_1 \dots \ell \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{kj_n}^{\ell} \right)$.

(1.2.6) Donat un camp tensorial $T \in \mathcal{T}_s^r(M)$, l'aplicació ∇T definida per

$$(\nabla T)(X_1, \dots, X_s, Y, \omega^1, \dots, \omega^r) = (\nabla_Y T)(X_1, \dots, X_s, \omega^1, \dots, \omega^r).$$

defineix un camp tensorial $\nabla T \in \mathcal{T}_{s+1}^r(M)$, anomenat **diferencial covariant** de T .

És habitual expressar ∇T en components com

$$\nabla T = T_{j_1 \dots j_s; k}^{i_1 \dots i_r} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}},$$

essent $T_{j_1 \dots j_s; k}^{i_1 \dots i_r} = \partial_k T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{n=1}^r T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots \ell \dots i_r} \Gamma_{k\ell}^{i_n} - \sum_{n=1}^s T_{j_1 \dots \ell \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{kj_n}^{\ell}$.

Si f és una funció, $\nabla f = df$.

1.3 Derivació covariant al llarg de camins

En aquest apartat M és una varietat diferenciable i ∇ una connexió en M .

(1.3.1) Recordem que un **camp vectorial al llarg d'una aplicació** $F: N \rightarrow M$ és una aplicació $Z: N \rightarrow TM$ tal que, per a tot $q \in N$, $Z(q) \in T_{F(q)}M$. És a dir, $\tau_M \circ Z = F$.

Els camps vectorials al llarg de F diferenciables constitueixen un $C^\infty(N)$ -mòdul que podem denotar per $\mathfrak{X}(F)$.

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, llavors $Z = X \circ F$ és un camp vectorial al llarg de F ; però en general no tot camp vectorial al llarg de F es pot definir així.

Ens interessarà particularment el cas d'un camí diferenciable $\gamma: I \rightarrow M$ i el $C^\infty(I)$ -mòdul dels camps vectorials diferenciables al llarg de γ , $\mathfrak{X}(\gamma)$. Un dels seus elements destacats és la velocitat del camí, $\gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

(1.3.2) Donats camps vectorials $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, el valor de $(\nabla_X Y)(p)$ en un punt p depèn de $X(p)$ i del valor de Y en un veïnat de p . Però en realitat basta conèixer el valor de Y al llarg d'un camí γ tal que $\gamma'(0) = X(p)$. Efectivament, si $X = f^i \partial/\partial x^i$ i $Y = g^j \partial/\partial x^j$, hem calculat $\nabla_X Y =$

$(\mathcal{L}_X g^k + \Gamma_{ij}^k f^i g^j) \partial/\partial x^k$, i això en el punt p requereix simplement conèixer $(\mathcal{L}_X g^k)(p) = D(g^k \circ \gamma)(0)$. Podem escriure doncs

$$\nabla_{\gamma'(t)} Y = (D(g^k \circ \gamma)(t) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) D\tilde{\gamma}^i(t) (g^j \circ \gamma)(t)) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)},$$

essent $\tilde{\gamma}$ l'expressió local de γ .

(1.3.3) Sigui $\gamma: I \rightarrow M$ un camí diferenciable. Aleshores existeix una única aplicació $\nabla_t: \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$ que compleix les propietats següents:

i) És $\mathbf{R}$ -lineal.

ii) Si $f \in C^\infty(I)$, $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$, llavors

$$\nabla_t(f\mathbf{w}) = Df \mathbf{w} + f \nabla_t \mathbf{w}.$$

iii) Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_t(Y \circ \gamma)(t) = \nabla_{\gamma'(t)} Y.$$

(1.3.4) Diem que $\nabla_t \mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$ és la **derivada covariant** de $\mathbf{w}$ **al llarg** de γ .

Altres possibles notacions: $\nabla_t \mathbf{w} = \nabla_t^\gamma \mathbf{w} = \nabla_{\gamma'(t)} \mathbf{w} = \nabla_{\frac{d}{dt}} \mathbf{w} = \frac{\nabla}{dt} \mathbf{w}$.

(1.3.5) Considerem una carta (U, φ) en M , tal que $\gamma(I) \subset U$. Llavors una base de $\mathfrak{X}(\gamma)$ està formada pels camps vectorials al llarg de γ definits pels camps vectorials coordenats: $\partial/\partial x^i \circ \gamma$.

Sigui $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Es pot expressar $\mathbf{w} = w^i \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma$, on $w^i: I \rightarrow \mathbf{R}$. Escrivim també $\gamma' = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma$ (essent $(q^i(t))$ l'expressió local de $\gamma(t)$). Llavors

$$\nabla_t \mathbf{w} = \left(\dot{w}^k + (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \dot{q}^i w^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \circ \gamma.$$

(1.3.6) De manera anàloga al concepte de camp vectorial al llarg d'una aplicació, es defineix **camp tensorial de tipus (r, s) al llarg d'una aplicació** $F: N \rightarrow M$ com una aplicació $Z: N \rightarrow \text{Tens}_s^r(TM)$ tal que, per a tot $q \in N$, $Z(q) \in \text{Tens}_s^r(T_{F(q)}M)$

Els camps tensorials al llarg de F de tipus (r, s) diferenciables constitueixen un $C^\infty(N)$ -mòdul que denotarem per $\mathcal{T}_s^r(F)$.

En una base coordenada apropiada $Z \in \mathcal{T}_s^r(F)$ s'expressa

$$Z|_V = Z_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (dx^{j_1} \circ F) \otimes \dots \otimes (dx^{j_s} \circ F) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \circ F \right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \circ F \right),$$

essent $Z_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}: V \rightarrow \mathbf{R}$ funcions diferenciables en un conjunt obert $V \subset N$.

Ens interessarà particularment el cas d'un camí diferenciable $\gamma: I \rightarrow M$ i els $C^\infty(I)$ -mòduls dels camps tensorials diferenciables al llarg de γ , $\mathcal{T}_s^r(\gamma)$.

- (1.3.7) La derivació covariant de camps tensorials diferenciables al llarg d'un camí $\gamma: I \rightarrow M$ es defineix tal com amb camps tensorials en M , i dóna lloc a una derivació $\nabla_t: \mathcal{T}_\bullet^*(\gamma) \rightarrow \mathcal{T}_\bullet^*(\gamma)$ de la $\mathbf{R}$ -àlgebra $\mathcal{T}_\bullet^*(\gamma)$, de grau $(0, 0)$, que commuta amb les contraccions interiors, i que estén la derivació ordinària de $f \in C^\infty(I)$ i la derivació covariant de $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

Si $Z \in \mathcal{T}_\bullet^*(\gamma)$, llavors $\nabla_t Z \in \mathcal{T}_\bullet^*(\gamma)$ s'anomena **derivada covariant** de Z **al llarg** de γ .

- (1.3.8) Les propietats donades permeten calcular la derivada covariant de qualsevol camp tensorial al llarg de γ .

Per exemple, si $\alpha \in \Omega^1(\gamma)$ és una 1-forma diferencial al llarg de γ , i $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$, llavors

$$D\langle \alpha, \mathbf{w} \rangle = \langle \nabla_t \alpha, \mathbf{w} \rangle + \langle \alpha, \nabla_t \mathbf{w} \rangle.$$

En coordenades, si $\alpha = A_i dx^i \circ \gamma$,

$$\nabla_t \alpha = \left(\dot{A}_j - (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \dot{q}^i A_k \right) dx^j \circ \gamma.$$

1.4 Transport paral·lel i geodèsiques

En aquest apartat M és una varietat diferenciable i ∇ una connexió en M .

- (1.4.1) Sigui $\gamma: I \rightarrow M$ un camí diferenciable. Un camp vectorial al llarg de γ diferenciable, $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$, es diu **paral·lel** si la seva derivada covariant al llarg de γ és nul·la,

$$\nabla_t \mathbf{w} = 0.$$

- (1.4.2) Siguin M , ∇ , $\gamma: I \rightarrow M$ com abans. Donats $t_o \in I$ i $\mathbf{w}_o \in T_{\gamma(t_o)}M$, existeix un únic $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$ paral·lel tal que $\mathbf{w}(t_o) = \mathbf{w}_o$.

- (1.4.3) Es diu que $\mathbf{w}$ és el **transport paral·lel** del vector $\mathbf{w}_o$ al llarg de γ (respecte a la connexió ∇).

- (1.4.4) Amb les mateixes notacions, l'aplicació $T_{\gamma(t_o)}M \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$ definida per $\mathbf{w}_o \mapsto \mathbf{w}$ és lineal.

Si $(\mathbf{e}_i)$ és una base de $T_{\gamma(t_o)}M$ i $\mathbf{w}_i$ són els corresponents transports paral·lels, llavors:

- Per a tot $t \in I$, $(\mathbf{w}_i(t))$ és una base de $T_{\gamma(t)}M$.
- $(\mathbf{w}_i)$ és una base del $C^\infty(I)$ -mòdul $\mathfrak{X}(\gamma)$.

(1.4.5) Sigui $P_{t_0 t}: T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t)}M$ l'operador de transport paral·lel al llarg de γ . Donat qualsevol $\mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$,

$$\nabla_t \mathbf{w}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P_{t_0 t}^{-1} \cdot \mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(t_0)}{t - t_0},$$

de manera que el transport paral·lel determina la derivada covariant al llarg de γ .

(1.4.6) Un camí diferenciable $\gamma: I \rightarrow M$ es diu **geodèsica** de la connexió ∇ si γ' és paral·lel al llarg de γ :

$$\nabla_t \gamma' = 0.$$

Si en coordenades γ s'expressa $(q^i(t))$, llavors γ és una geodèsica sii se satisfà l'equació diferencial de segon ordre

$$\ddot{q}^k + (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \dot{q}^i \dot{q}^j = 0.$$

(1.4.7) Donat un punt $v_p \in T_p M$, hi ha una única geodèsica maximal amb condició inicial v_p .

(1.4.8) Més endavant es veurà que les geodèsiques de ∇ es corresponen amb les corbes integrals d'un cert camp vectorial S en TM , l'*esprai geodèsic* de ∇ .

(1.4.9) Sigui $\gamma: I \rightarrow M$ una geodèsica, i $\varphi: J \rightarrow I$ un difeomorfisme entre intervals oberts de $\mathbf{R}$. El camí reparametritzat $\gamma \circ \varphi$ és una geodèsica sii φ és una afinat.

(1.4.10) Un camp vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es diu **paral·lel** si és paral·lel al llarg de qualsevol camí diferenciable.

És el mateix dir que $\nabla_v Y = 0$ per a tot vector v , que $\nabla_X Y = 0$ per a tot camp vectorial X , o que $\nabla Y = 0$.

(1.4.11) Es defineix igualment el concepte de **camp tensorial paral·lel** al llarg d'un camí: $\nabla_t Z = 0$.

Anàlogament es defineix el concepte de camp tensorial $T \in \mathcal{T}_\bullet(M)$ paral·lel: $\nabla_v T = 0$ per a tot $v \in TM$, $\nabla_X T = 0$ per a tot camp vectorial X , o simplement $\nabla T = 0$.

1.5 Torsió i curvatura d'una connexió

En aquest apartat M és una varietat diferenciable i ∇ una connexió en M .

- (1.5.1) L'aplicació $T: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definida per

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

és $C^\infty(M)$ -bilineal (i antisimètrica), per tant equival a un camp tensorial $T \in \mathcal{T}_2^1(M)$, anomenat **tensor de torsió** de la connexió.

- (1.5.2) Una connexió es diu **simètrica** (o sense torsió) quan la seva torsió és nul·la.

- (1.5.3) Considerem una referència local (E_i) de camps vectorials diferenciables, i sigui (E^i) la referència dual. Si Γ_{ij}^k són els corresponents símbols de Christoffel, i $[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k$, llavors

$$T = T_{ij}^k E^i \otimes E^j \otimes E_k, \quad \text{amb } T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k - c_{ij}^k.$$

Per tant ∇ és simètrica sii en una referència *coordenada* els Γ_{ij}^k són simètrics en (i, j) .

- (1.5.4) Dues connexions en M són iguals sii tenen les mateixes geodèsiques i la mateixa torsió.

Donada una connexió en M n'hi ha una altra, única, que té les mateixes geodèsiques i torsió nul·la.

- (1.5.5) L'aplicació $R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definida per

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

és $C^\infty(M)$ -trilineal (i antisimètrica en (X, Y)), per tant equival a un camp tensorial $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$, anomenat **tensor de curvatura** de la connexió.

- (1.5.6) Considerem una referència local (E_i) de camps vectorials. Si Γ_{ij}^k són els corresponents símbols de Christoffel, i $[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k$, llavors

$$R = R_{ijk}^\ell E^i \otimes E^j \otimes E^k \otimes E_\ell,$$

$$\text{amb } R_{ijk}^\ell = \Gamma_{jk, i}^\ell - \Gamma_{ik, j}^\ell + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^\ell - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^\ell - c_{ij}^m \Gamma_{mk}^\ell.$$

- (1.5.7) Si la torsió de ∇ és nul·la, llavors $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$ (identitat de Bianchi algebraica).

- (1.5.8) Una connexió es diu **plana** si el seu tensor de curvatura és nul.

- (1.5.9) Sigui una varietat dotada d'una connexió. Les condicions següents són equivalents:

- La connexió és plana.
- Al voltant de qualsevol punt hi ha una base de camps vectorials coordinats paral·lels.

- El transport paral·lel entre dos punts al llarg d'un camí que els uneixi dins un conjunt obert difeomorf a una bola no depèn del camí triat.

2 Varietats pseudoriemannianes

D'ara endavant, llevat d'indicació contrària, suposarem que totes les aplicacions són de classe C^∞ . Tanmateix, moltes de les operacions considerades es poden efectuar amb graus de diferenciabilitat finits.

2.1 Varietats pseudoriemannianes

- (2.1.1) Sigui M una varietat diferenciable. Una **mètrica pseudoriemanniana** (o semiriemanniana) en M és un camp tensorial $g \in \mathcal{T}_2(M)$ 2-covariant, simètric i no-degenerat.

Aquestes dues darreres propietats signifiquen que, en cada $p \in M$, $g_p \in T_p^*M \otimes T_p^*M$ defineix una mètrica en l'espai tangent T_pM , és a dir, una forma bilineal simètrica no-degenerada. $g_p: T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbf{R}$.

- (2.1.2) Es diu **mètrica riemanniana** si g és definit positiu. És a dir, si en cada punt g_p és un producte escalar en T_pM .

- (2.1.3) Una **mètrica lorentziana** és una mètrica de signatura $(1, m-1)$ (o $(m-1, 1)$).

- (2.1.4) Una **varietat pseudoriemanniana** [riemanniana, lorentziana] és una varietat dotada d'una mètrica pseudoriemanniana [riemanniana, lorentziana].

- (2.1.5) Algunes notacions:

- $(u_p|v_p) = g_p(u_p, v_p)$, essent $u_p, v_p \in T_pM$.
- $\|v_p\| = \sqrt{(v_p|v_p)}$ si $(v_p|v_p) \geq 0$.
- $(X|Y) = g(X, Y): M \rightarrow \mathbf{R}$, essent $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Dos vectors $u, v \in T_pM$ són ortogonals si $(u|v) = 0$.

Dos camps vectorials X, Y són ortogonals si ho són en tot punt, és a dir, si $(X|Y) = 0$.

En el cas riemannianà també podem parlar de l'angle entre dos vectors no nuls $u, v \in T_pM$: és un nombre θ tal que $\cos \theta = (u|v)/\|u\|\|v\|$.

- (2.1.6) Expressió local en una carta (U, φ) . Si $g_{ij} = (\partial/\partial x^i | \partial/\partial x^j)$, llavors $g|_U = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. La matriu (g_{ij}) és en tot $p \in U$ simètrica no-degenerada (i definida positiva en el cas riemannianà).

Més generalment, sigui (E_i) una base de camps vectorials en un obert U . Llavors $g|_U = g_{ij} E^i \otimes E^j$, essent $g_{ij} = (E_i|E_j)$, i (E^i) la base dual de (E_i) .

(2.1.7) *La mètrica estàndard de $\mathbf{R}^n$*

La **mètrica riemanniana estàndard** de $\mathbf{R}^n$ és $g = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j$ en el sistema de coordenades canònic.

(2.1.8) *L'espai de Minkowski*

L'**espai de Minkowski** és la varietat lorentziana donada per l'espai $\mathbf{R}^n$ i la **mètrica de Minkowski**: $g = \eta_{ij} dx^i \otimes dx^j$, on $\eta = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ (o amb el signe oposat).

(2.1.9) Si $j: N \hookrightarrow M$ és una subvarietat immersa d'una varietat riemanniana amb mètrica g , llavors $j^*(g)$ és una mètrica riemanniana en N .

Aquest resultat pot ser fals si g és pseudoriemanniana.

(2.1.10) Una **isometria** [**isometria local**] entre dues varietats pseudoriemannianes (M_1, g_1) i (M_2, g_2) és un difeomorfisme [difeomorfisme local] $F: M_1 \rightarrow M_2$ tal que $F^*(g_2) = g_1$.

(2.1.11) Una isometria d'una varietat pseudoriemanniana (M, g) és un difeomorfisme de M en ella mateixa que deixa la mètrica invariant.

Una **isometria infinitesimal** o **camp de Killing** és un camp vectorial X en M tal que els difeomorfismes F^t definits pel seu flux són isometries.

(2.1.12) X és una isometria infinitesimal de (M, g) sii $\mathcal{L}_X g = 0$.

(2.1.13) Tota varietat diferenciable paracompacta admet una mètrica riemanniana.

(2.1.14) Es pot provar que una varietat paracompacta M admet una mètrica lorentziana sii hi existeix un camp vectorial diferenciable sense punts crítics. Suposant M connexa, això es compleix sii M és no compacta o bé té característica d'Euler–Poincaré nul·la.

2.2 Algunes construccions en varietats pseudoriemannianes

En aquest apartat (M, g) és una varietat pseudoriemanniana.

(2.2.1) La mètrica en cada punt $p \in M$ defineix un isomorfisme d'espais vectorials

$$\hat{g}_p: T_p M \rightarrow T_p^* M, \quad \langle \hat{g}_p(u_p), v_p \rangle = g(u_p, v_p).$$

Globalment això defineix un difeomorfisme

$$\hat{g}: TM \rightarrow T^*M,$$

que de fet és un isomorfisme de fibrats vectorials.

Aquest isomorfisme es trasllada als mòduls de seccions: l'aplicació

$$\mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M), \quad X \mapsto \hat{g} \circ X \equiv X^\flat$$

és un isomorfisme, amb invers $\theta \mapsto \hat{g}^{-1} \circ \theta \equiv \theta^\sharp$.

- (2.2.2) En coordenades l'isomorfisme $\hat{g}: TM \rightarrow T^*M$ s'expressa $(x^i, v^i) \mapsto (x^i, v^i g_{ij}(x))$, i el seu invers $(x^i, \alpha_i) \mapsto (x^i, \alpha_i g^{ij}(x))$, essent (g^{ij}) la matriu inversa de (g_{ij}) : $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$.

És freqüent escriure per exemple $v_j = v^i g_{ij}$, etc. Aquest fet d'abaixar i apujar els índexs justifica la notació $v^\flat$, $\alpha^\sharp$, i que aquests isomorfismes s'anomenin *isomorfismes musicals*.

- (2.2.3) Més generalment, els isomorfismes musicals definits per una mètrica permeten abaixar o apujar índexs qualssevol en un camp tensorial. Els camps tensorials obtinguts d'aquesta manera a vegades són dits geomètricament equivalents.

- (2.2.4) Donada una funció $f: M \rightarrow \mathbf{R}$, el **gradient** de f és el camp vectorial

$$\text{grad } f = \hat{g}^{-1} \circ \text{d}f.$$

Per tant, $(\text{grad } f|X) = \langle \text{d}f, X \rangle$.

En coordenades, $\text{grad } f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$.

- (2.2.5) En una varietat pseudoriemanniana (M, g) existeix una mesura canònica v_g , anomenada **volum riemannà**.

En el domini d'una carta (U, φ) , la integral d'una funció $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ ve donada en termes de la seva expressió local per

$$\int_U f \, dv_g = \int_{\varphi(U)} \tilde{f}(x^1, \dots, x^m) \sqrt{|\det(g_{ij})|} \, dx^1 \cdots dx^m,$$

on (g_{ij}) és la matriu de g en la carta donada.

- (2.2.6) En el cas de ser M orientada aquesta mesura ve induïda per una forma de volum canònica Ω_g , també anomenada **forma de volum riemannà**. En una carta corresponent a l'orientació de M s'expressa

$$\Omega_g = \sqrt{|\det(g_{ij})|} \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

2.3 La connexió de Levi-Civita

En aquest apartat (M, g) és una varietat pseudoriemanniana.

- (2.3.1) Una connexió ∇ en M es diu **riemanniana** si la mètrica és un camp tensorial paral·lel, és a dir, $\nabla g = 0$.

Això també es pot expressar dient que $\nabla_X g = 0$ per a tot camp vectorial X , i també de la manera següent: per a qualssevol $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\mathcal{L}_X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

- (2.3.2) Que una connexió ∇ sigui riemanniana també equival al següent: donats un camí $\gamma: I \rightarrow M$ i $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{X}(\gamma)$ qualssevol, es compleix

$$D(\mathbf{v}|\mathbf{w}) = (\nabla_t \mathbf{v}|\mathbf{w}) + (\mathbf{v}|\nabla_t \mathbf{w}).$$

En aquestes condicions, si $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ són paral·lels llavors $(\mathbf{v}|\mathbf{w})$ és constant, i doncs el transport paral·lel és una isometria.

En particular, si γ és una geodèsica llavors $(\gamma'|\gamma')$ és constant.

- (2.3.3) *Teorema fonamental de la geometria riemanniana*

En una varietat pseudoriemanniana existeix una única connexió riemanniana sense torsió.

Aquesta connexió està definida per la **fórmula de Koszul**:

$$\begin{aligned} 2(\nabla_X Y|Z) &= \mathcal{L}_X(Y|Z) + \mathcal{L}_Y(X|Z) - \mathcal{L}_Z(X|Y) + \\ &+ ([X, Y]|Z) + ([Z, X]|Y) + ([Z, Y]|X). \end{aligned}$$

- (2.3.4) La connexió definida s'anomena **connexió de Levi-Civita** de (M, g) . Si no es diu el contrari, sempre que tinguem una varietat pseudoriemanniana la considerarem dotada de la connexió de Levi-Civita.

- (2.3.5) Donada una carta de M , en la corresponent base de camps vectorials coordenats, els símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita són

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right).$$

També s'escriuen $\Gamma_{ij}^k = g^{k\ell} [ij, \ell]$, on els $[ij, \ell] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right)$ s'anomenen *símbols de Christoffel de primera espècie*.

2.4 Subvarietats d'una varietat riemanniana

(2.4.1) Sigui $j: M \hookrightarrow \widetilde{M}$ una subvarietat immersa d'una varietat riemanniana amb mètrica $\tilde{g}$ i connexió de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$. Llavors $g = j^*(\tilde{g})$ és una mètrica riemanniana en M .

(2.4.2) La inclusió permet identificar $T_p M$ com a subespai de $T_{j(p)} \widetilde{M}$ per a tot $p \in M$. Tenim una descomposició

$$T_{j(p)} \widetilde{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$$

en suma directa de subespais ortogonals. Amb ella doncs tot vector $w \in T_{j(p)} \widetilde{M}$ es descompon en suma $w = w^\top + w^\perp$ de part tangent més part normal.

(2.4.3) Considerem dos camps vectorials X, Y en M . En un veïnat de cada punt $p \in M$ els podem estendre a camps vectorials definits en un obert de $\widetilde{M}$, i usar la connexió de $\widetilde{M}$ per a calcular $\widetilde{\nabla}_X Y$; podem usar aquesta notació ja que el valor d'aquesta expressió en cada punt de M no depèn de les extensions usades. Tenim doncs un camp vectorial $\widetilde{\nabla}_X Y: M \rightarrow \widetilde{M}$ al llarg de la inclusió. Podem descompondre'l com a suma d'un camp vectorial tangent a M i un camp vectorial normal a M :

$$\widetilde{\nabla}_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top + (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp.$$

(2.4.4) La connexió de Levi-Civita d'una subvarietat

L'expressió

$$\nabla_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\top$$

defineix una connexió en M , que coincideix amb la connexió de Levi-Civita de g .

(2.4.5) L'expressió

$$II(X, Y) = (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp$$

és $C^\infty(M)$ -bilineal i simètrica.

Per a cada punt $p \in M$ l'aplicació II defineix doncs una aplicació bilineal simètrica $T_p M \times T_p M \rightarrow (T_p M)^\perp$ anomenada **segona forma fonamental** de M .

Per definició tenim doncs la *fórmula de Gauss*:

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y).$$

Si N és un camp vectorial normal a M es compleix l'equació de Weingarten

$$(\widetilde{\nabla}_X N|Y) = -(N|II(X, Y)).$$

- (2.4.6) Suposem ara que M i $\tilde{M}$ són varietats orientades i que M és una hipersuperfície en $\tilde{M}$. En aquest cas hi ha un únic camp vectorial normal unitari N en M tal que, si $(X_1, \dots, X_m)$ és una base positiva de M , $(X_1, \dots, X_m, N)$ és una base positiva de $\tilde{M}$.

En aquestes condicions es pot reemplaçar la segona forma fonamental vectorial $\mathcal{H}$ per una **segona forma fonamental escalar**

$$h(X, Y) = (\mathcal{H}(X, Y)|N),$$

és a dir, tal que $\mathcal{H}(X, Y) = h(X, Y)N$.

Hem definit doncs un camp tensorial 2-covariant simètric h en M . En cada punt, associat a la forma quadràtica h a través de la mètrica g , hi ha un endomorfisme simètric S de cada espai tangent $T_p M$, a vegades anomenat *aplicació de Weingarten*. Per definició, $(S(X)|Y) = h(X, Y)$. Els valors propis de S es diuen *curvatures principals*. El producte de totes elles s'anomena *curvatura gaussiana*: $K = \det(S)$.

La teoria de les superfícies de $\mathbf{R}^3$ es pot continuar desenvolupant seguint les línies esbossades ...

- (2.4.7) Sigui M una varietat riemanniana i $C \subset M$ una corba connexa orientada. Es pot parametritzar C localment amb un camí $c: I \rightarrow M$ tal que $\|c'\| = 1$ (*paràmetre arc*) amb l'orientació de C . Sigui $\mathbf{t} = c' \in \mathfrak{X}(c)$ el vector tangent: per a cada $s \in I$ $\mathbf{t}(s)$ és una base positiva de $T_{c(s)} C$. Suposem que els vectors $(\mathbf{t}, \nabla_s \mathbf{t}, \dots, \nabla_s^{m-1} \mathbf{t})$ són linealment independents en un $s_0 \in I$. Aplicant-hi el procediment d'ortonormalització de Gram-Schmidt obtenim una base ortonormal $(\mathbf{f}_1(s), \dots, \mathbf{f}_m(s))$ de $T_{c(s)} M$ per a s en un veïnat de s_0 . És la **referència de Frenet**. Les derivades covariants d'aquests vectors són combinacions lineals d'ells mateixos amb uns coeficients dits curvatures: són les fórmules de Frenet-Serret. Etc.

- (2.4.8) *Teorema d'embedding de Nash*

Tota varietat riemanniana amb base numerable d'oberts és isomètrica a una subvarietat d'un $\mathbf{R}^N$.

2.5 Curvatura en una varietat pseudoriemanniana

En aquest apartat (M, g) és una varietat pseudoriemanniana.

- (2.5.1) *El tensor de Riemann*

Sigui R el tensor de curvatura de la connexió de Levi-Civita de g . El **tensor de curvatura de Riemann** és el camp tensorial $\text{Rie} \in \mathcal{T}_4(M)$ obtingut

abaixant l'índex contravariant de R al darrer lloc:

$$\text{Rie}(X, Y, Z, W) = (R(X, Y)Z|W).$$

En una base de camps vectorials, $\text{Rie} = R_{ijkl}E^i \otimes \dots \otimes E^\ell$, on $R_{ijkl} = R_{ijk}^n g_{nl}$.

Hi ha diversos convenis possibles en aquesta definició; per les simetries de Rie, el resultat final pot diferir en un signe.

(2.5.2) Una varietat riemanniana és **plana** si és localment isomètrica a l'espai euclidià.

(2.5.3) Una varietat riemanniana és plana sii la seva connexió de Levi-Civita és plana (és a dir, el seu tensor de curvatura és nul).

(2.5.4) *El tensor de Ricci*

El **tensor de curvatura de Ricci** és el camp tensorial $\text{Ric} \in \mathcal{T}_2(M)$ obtingut fent la contracció interior del primer índex covariant de R amb el seu índex contravariant:

$$\text{Ric} = c_1^1(R).$$

En una base de camps vectorials, $\text{Ric} = R_{jk}E^j \otimes E^k$, on $R_{jk} = R_{ijk}^i$.

Aquí també hi ha diversos convenis possibles en la definició, que poden produir canvis de signe.

(2.5.5) *La curvatura escalar*

La **curvatura escalar** és la funció $S \in C^\infty(M)$ obtinguda fent la traça del tensor de Ricci:

$$S = \text{tr}_g(\text{Ric}) = \text{tr}(\text{Ric}^\sharp).$$

En coordenades, $S = R_k^k = g^{kj} R_{jk}$.

(2.5.6) En el cas d'una superfície els tensors esmentats tenen un sol component independent que és, essencialment, la curvatura gaussiana de la superfície. De fet, el *theorem egregium* és conseqüència de la fórmula $K = \frac{\text{Rie}(X, Y, Y, X)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - (X|Y)^2}$ per a (X, Y) una base arbitrària de l'espai tangent.

2.6 Distància en una varietat riemanniana

- (2.6.1) Sigui M una varietat pseudoriemanniana, $\gamma: I \rightarrow M$ un camí de classe C^1 a trossos i tal que $(\gamma'|\gamma') \geq 0$. La **longitud** (o llargada) de γ és

$$\ell(\gamma) = \int_I \|\gamma'\|.$$

La longitud és invariant per reparametritzacions: si $\varphi: J \rightarrow I$ és un difeomorfisme entre intervals oberts de $\mathbf{R}$, $\ell(\gamma \circ \varphi) = \ell(\gamma)$.

- (2.6.2) Sigui M una varietat riemanniana connexa. Donats $p, q \in M$, sigui

$$d(p, q) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ camí } C^1 \text{ a trossos de } p \text{ a } q\}$$

Aleshores d és una distància que defineix la topologia de M .

- (2.6.3) Aquesta distància s'anomena la **distància riemanniana** de M .

- (2.6.4) Sigui M una varietat diferenciable (separada) connexa, però no necessàriament paracompacta. Les condicions següents són equivalents:

- M admet una mètrica riemanniana.
- M és metrizable.
- M té base numerable d'oberts.
- M és paracompacta.

- (2.6.5) Una varietat riemanniana connexa es diu **geodèsicament completa** si les seves geodèsiques estan definides en tot $\mathbf{R}$.

- (2.6.6) *Teorema de Hopf–Rinow*

Sigui M una varietat riemanniana connexa, d la seva distància riemanniana. Les condicions següents són equivalents:

- Els conjunts tancats i fitats (per d) són compactes.
- L'espai mètric M és complet.
- M és geodèsicament completa.

En aquestes condicions, donats $p, q \in M$ existeix una geodèsica que els uneix, de longitud $d(p, q)$.

3 Fibrats vectorials

Suposarem que totes les varietats i aplicacions són de classe C^∞ . Tanmateix, moltes de les operacions considerades es poden efectuar amb graus de diferenciabilitat finits. D'altra banda, les construccions dels tres primers apartats es poden adaptar a la categoria dels espais topològics.

3.1 Fibracions

(3.1.1) Una **fibració** o **espai fibrat** (de **fibra típica** F) és una terna $E \xrightarrow{\pi} B$, on

- E, B són varietats
- $\pi: E \rightarrow B$ és una aplicació suprajectiva
- se satisfà la **condició de trivialitat local**:

per a tot $b \in B$, existeixen un conjunt obert $U \ni b$ i un difeomorfisme

$$\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F \quad (\text{trivialització local})$$

tals que, per a tot $e \in \pi^{-1}(U)$, $\text{pr}_1(\varphi(e)) = \pi(e)$.

La darrera condició es pot expressar dient que el diagrama següent és commutatiu:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \text{pr}_1 & \\ & U & \end{array}$$

(3.1.2) A vegades el concepte que hem definit s'anomena *fibració localment trivial*, i s'utilitza el terme *fibració* o *varietat fibrada* per a un concepte més general, el de submersió suprajectiva.

(3.1.3) La varietat E es diu **espai** (o espai total) de la fibració, B és la **base** de la fibració, i π és la **projecció**.

Si $b \in B$, el conjunt $E_b = \pi^{-1}(b)$ s'anomena **fibra** de b .

(3.1.4) La projecció π és una submersió suprajectiva.

Les fibres $E_b \subset E$ són subvarietats regulars tancades, i són difeomorfes a la fibra típica.

(3.1.5) Sigui $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ una trivialització local de la fibració $E \xrightarrow{\pi} B$. Suposem que U és el domini d'una carta (U, ψ) de B , i sigui (W, χ) una carta de la varietat F . Llavors la composició $(\psi \times \chi) \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U \times W)}$ és una

carta de E , amb la qual l'expressió local de π és $\pi(x, y) = x$. S'anomena **carta fibrada** de la fibració.

- (3.1.6) Siguin $E \xrightarrow{\pi} B$ i $E' \xrightarrow{\pi'} B'$ dues fibracions. Un **morfisme de fibracions** és un parell d'aplicacions $(f_\circ, f)$ que fa commutatiu aquest diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{f_\circ} & B' \end{array}$$

f aplica fibres en fibres, i doncs determina $f_\circ$. També diem que f és un morfisme al damunt de $f_\circ$.

Un cas particular especialment important és el de $B = B'$ i $f_\circ = \text{Id}$; llavors parlem simplement de morfisme de E en E' .

- (3.1.7) La composició de morfismes és un morfisme.

- (3.1.8) Considerem trivialitzacions locals $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, $\varphi': \pi'^{-1}(U') \rightarrow U' \times F'$, de les dues fibracions, de manera que $f_\circ(U) \subset U'$. Llavors l'expressió del morfisme en les trivialitzacions és

$$\tilde{f} = \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}: (x, t) \mapsto (f_\circ(x), A(x, t)).$$

Convertint les trivialitzacions en cartes fibrades, l'expressió local de f té la mateixa forma.

- (3.1.9) Un **isomorfisme de fibracions** és un morfisme on f és un difeomorfisme. Equivalentment, és un morfisme on l'aplicació base $f_\circ$ és un difeomorfisme i les aplicacions en fibra $f_b: E_b \rightarrow E'_{f_\circ(b)}$ són totes elles difeomorfismes.

- (3.1.10) Una **fibració trivial** és de la forma $B \times F \xrightarrow{\text{pr}_1} B$.

- (3.1.11) Una **fibració trivialitzable** és la que és isomorfa a una fibració trivial. Qualsevol d'aquests isomorfismes s'anomena **trivialització global**:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & B \times F \\ \pi \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & B & \end{array}$$

(3.1.12) Una **secció global** d'una fibració $E \xrightarrow{\pi} B$ és una aplicació $s: B \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = \text{Id}_B$.

Si és diferenciable, llavors és una immersió difeomorfa tancada.

De manera anàloga es defineix el concepte de **secció local**, definida en un subconjunt obert $U \subset B$; també es poden considerar seccions definides en subconjunts qualssevol $S \subset B$.

(3.1.13) L'expressió d'una secció en una trivialització local és $x \mapsto (x, f(x))$.

(3.1.14) Sigui $E \xrightarrow{\pi} B$ una fibració. Sigui $f: C \rightarrow B$ una aplicació. La **fibració imatge recíproca** de $E \xrightarrow{\pi} B$ per f és una fibració que té com a espai base C , com a espai total el **producte fibrat**

$$f^*(E) = C \times_f E = \{(c, e) \in C \times E \mid f(c) = \pi(e)\},$$

i com a projecció $f^*(\pi) = \text{pr}_1$. Les seves fibres són les de E : $(f^*E)_c \cong E_{f(c)}$.

Hi ha una bijecció entre les seccions de $f^*(E)$ i les seccions de E al llarg de f .

Més particularment, si $C \hookrightarrow B$ és una subvarietat regular de B , llavors la imatge recíproca de $E \xrightarrow{\pi} B$ per la inclusió dóna un fibrat $E|_C \rightarrow C$ anomenat **restricció** de E a C .

(3.1.15) Sigui $\pi: E \rightarrow B$ una fibració. Sigui $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recobriment obert de B trivialitzant: $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times F$. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, l'aplicació $\psi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ s'anomena **difeomorfisme de transició**. Aquests compleixen

- $\psi_{\alpha\alpha} = \text{Id}$,
- $\psi_{\gamma\alpha} = \psi_{\gamma\beta} \circ \psi_{\beta\alpha}$ (suposant $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$)

Aquestes són les «condicions d'encolatge», i de fet permeten reconstruir la fibració.

(3.1.16) Siguin B, F varietats, E un conjunt, $\pi: E \rightarrow B$ una aplicació suprajectiva. Suposem que hi ha un recobriment obert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de B i bijeccions $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ tals que:

- per a tot $e \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, $\pi(e) = \text{pr}_1(\varphi_\alpha(e))$
- les aplicacions

$$\psi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$

són difeomorfismes

Llavors E té una única estructura de varietat amb la qual $\pi: E \rightarrow B$ és una fibració i les φ_α són trivialitzacions locals.

3.2 Fibrats vectorials

- (3.2.1) Un **fibrat vectorial** (real) és un espai fibrat $E \xrightarrow{\pi} B$ tal que les fibres E_b ($b \in B$) i la fibra típica són espais vectorials reals de dimensió finita, i es pot recobrir E amb trivialitzacions locals $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tals que les restriccions a les fibres $\varphi_b: E_b \rightarrow \{b\} \times F$ són isomorfismes d'espais vectorials.

Sempre que parlem de trivialització local en un fibrat vectorial sobreentendrem que es tracta de trivialitzacions d'aquest tipus, i no de trivialitzacions qualssevol com a espai fibrat.

Per abús de llenguatge, sovint parlarem del «fibrat vectorial E », si no hi ha ambigüitat sobre l'espai base i la projecció.

- (3.2.2) Prescindint de la definició d'espai fibrat, podem definir un fibrat vectorial (de fibra típica un espai vectorial real de dimensió finita F) com una terna $E \xrightarrow{\pi} B$ on E , B són varietats i π és una aplicació suprajectiva tals que:

- Cada fibra $E_b = \pi^{-1}(b)$ ($b \in B$) té una estructura d'espai vectorial real.
- Per a tot $b \in B$ existeix un veïnat obert U de b i un difeomorfisme (trivialització local) $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tal que $\pi = \text{pr}_1 \circ \varphi$, i tal que la seva restricció a cada fibra, $\varphi_b: E_b \rightarrow \{b\} \times F$, és un isomorfisme lineal.

- (3.2.3) El **rang** d'un fibrat vectorial és la dimensió de les seves fibres.

- (3.2.4) Una **referència local** (sobre un conjunt obert $U \subset B$) d'un fibrat vectorial $\pi: E \rightarrow B$ és una família de seccions $s_j: U \rightarrow E$ ($1 \leq j \leq k$) sobre U tals que, en cada $b \in U$, la família de vectors $s_j(b)$ és una base de E_b .

- (3.2.5) Donada una trivialització local $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, si (v_j) és una base de F llavors les aplicacions $s_j(b) = \varphi^{-1}(b, v_j)$ constitueixen una referència local de E sobre U .

Recíprocament, sigui (s_j) una referència local de E sobre U . Llavors l'aplicació

$$U \times \mathbf{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(U), \quad (b, \xi^j) \mapsto \xi^j s_j(b)$$

és la inversa d'una trivialització local.

- (3.2.6) Donar una base de la fibra típica F és equivalent a donar un isomorfisme $\chi: F \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^k$. Per tant, donada una trivialització local $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$,

sobre un obert coordinat amb carta (U, ψ) de B , s'obté una carta fibrada $(\psi \times \chi) \circ \varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow \tilde{U} \times \mathbf{R}^k$ de E .

- (3.2.7) Considerem dues trivialitzacions locals $\varphi, \bar{\varphi}$ de $\pi: E \rightarrow B$ sobre el mateix obert $U \subset B$. Llavors el difeomorfisme de transició $\psi = \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ és de la forma $\psi(x, t) = (x, \theta(x) \cdot t)$, on l'aplicació $\theta: U \rightarrow \text{GL}(F)$ és diferenciable.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ & \searrow \bar{\varphi} & \downarrow \psi \\ & & U \times F \end{array}$$

- (3.2.8) Denotem per $\text{Sec}(E)$ (o $\Gamma(E)$) el conjunt de les seccions de E (en cas d'ambigüitat escriurem $\text{Sec}(E \xrightarrow{\pi} B)$). És un $C^\infty(B)$ -mòdul amb les operacions

- $(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x)$,
- $(fs)(x) = f(x)s(x)$.

- (3.2.9) La **secció nul·la** és la secció $B \rightarrow E$ tal que $x \mapsto 0_x$.
La seva imatge és una subvarietat $0_E \subset E$ difeomorfa a B .

- (3.2.10) Un **morfisme de fibrats vectorials** entre $E \xrightarrow{\pi} B$ i $E' \xrightarrow{\pi'} B'$ és un morfisme de fibracions lineal en cada fibra. És a dir, una aplicació $f: E \rightarrow E'$ que envia cada fibra E_b a una fibra $E'_{f_\circ(b)}$, essent les restriccions $f_b: E_b \rightarrow E'_{f_\circ(b)}$ aplicacions lineals.

- (3.2.11) L'expressió d'un morfisme en termes de trivialitzacions locals és de la forma $(x, t) \mapsto (f_\circ(x), A(x) \cdot t)$, essent $A: U \rightarrow \text{Hom}(F, F')$.

- (3.2.12) Un isomorfisme és un morfisme on l'aplicació base $f_\circ$ és un difeomorfisme i les aplicacions en fibra f_b són isomorfismes lineals.

- (3.2.13) Un **fibrat vectorial trivial** és de la forma $B \times F \xrightarrow{\text{pr}_1} B$, amb F espai vectorial real de dimensió finita.

- (3.2.14) Les funcions definides en B s'identifiquen amb les seccions globals del fibrat escalar $B \times \mathbf{R} \xrightarrow{\text{pr}_1} B$.

Més generalment, les funcions amb valors vectorials s'identifiquen amb les seccions d'un fibrat vectorial trivial.

- (3.2.15) Un **fibrat vectorial trivialitzable** és isomorf a un fibrat vectorial trivial.

(3.2.16) Un fibrat vectorial és trivialitzable si i té una referència global si el seu mòdul de seccions és lliure.

(3.2.17) Hi ha una bijecció entre fibrats vectorials sobre B i $C^\infty(B)$ -mòduls projectius finitogenerats.

(3.2.18) Sigui B una varietat. Per a cada $b \in B$, sigui E_b un espai vectorial real de dimensió k . Sigui $E = \coprod_{b \in B} E_b$, i $\pi: E \rightarrow B$ la projecció $e_b \mapsto b$.

Suposem que hi ha un recobriment obert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de B tal que

- per a cada $\alpha \in A$ hi ha una bijecció $\Phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbf{R}^k$ tal que les restriccions $\Phi_\alpha|_{E_b}: E_b \rightarrow \mathbf{R}^k$ són isomorfismes lineals
- per a cada $\alpha, \beta \in A$ l'aplicació

$$\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{R}^k \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{R}^k$$

és de la forma $(b, v) \mapsto (b, \tau_{\beta\alpha}(b) \cdot v)$, amb $\tau_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}_k(\mathbf{R})$ diferenciable.

Llavors E té una única estructura de fibrat vectorial amb la qual les Φ_α són trivialitzacions locals.

(3.2.19) Reemplaçant arreu els espais vectorials reals per espais vectorials complexos es defineix la noció de **fibrat vectorial complex**. Les seves seccions constitueixen un mòdul sobre l'anell de les funcions complexes definides en l'espai base.

(3.2.20) El concepte de fibrat vectorial admet algunes generalitzacions òbvies. Per exemple, es poden considerar fibrats vectorials de classe C^r amb $0 \leq r \leq \omega$. Si treballem amb varietats no pures (que poden tenir dimensions diferents en components diferents) també podem considerar fibrats vectorials amb fibres típiques que varien en diferents components de B . També es poden considerar fibrats de dimensió infinita, on la fibra típica pot ser, per exemple, un espai de Banach. Si en lloc de varietats reals i funcions diferenciables es consideren varietats complexes, espais vectorials complexos i funcions holomorfes, s'obté la noció de fibrat vectorial holomorf.

3.3 Operacions amb fibrats vectorials

(3.3.1) Les operacions habituals amb espais vectorials, realitzades en cada fibra, donen lloc a les operacions corresponents amb fibrats vectorials sobre la mateixa base B . En particular:

- $E \oplus F$ suma directa (o suma de Whitney)

- $E \otimes F$ producte tensorial
- $E^{\otimes r}$
- $\wedge^r E$, $\wedge^\bullet E = \bigoplus_{r \in \mathbf{N}} \wedge^r E$; $S^r E$
- $\text{Hom}(E, F)$
- $E^* = \text{Hom}(E, B \times \mathbf{R})$ dual
- $\text{Tens}_s^r(E) = E^{\otimes r} \otimes (E^*)^{\otimes s}$

(3.3.2) Per exemple, per a la suma directa les fibres són $(E \oplus F)_b = E_b \oplus F_b$; en aquest cas això és el producte cartesià, de manera que $E \oplus F = E \times_B F$.

Anàlogament amb el producte tensorial, $(E \otimes F)_b = E_b \otimes F_b$.

(3.3.3) Les operacions amb morfismes d'espais vectorials també s'estenen als morfismes de fibrats vectorials sobre B .

En particular, es defineix el **morfisme transposat** ${}^t f: F^* \rightarrow E^*$ d'un morfisme $f: E \rightarrow F$.

(3.3.4) Sigui $\pi: E \rightarrow B$ un fibrat vectorial de fibra típica E_o . Un subconjunt $F \subset E$ es diu **subfibrat vectorial** si per a tot $b \in B$ existeix una trivialització local $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times E_o$ que indueix una bijecció $\pi^{-1}(U) \cap F \rightarrow U \times F_o$, essent $F_o \subset E_o$ un subespai vectorial.

(3.3.5) Si $F \subset E$ és un subfibrat vectorial, es pot definir el **fibrat quocient** E/F . Les seves fibres són $(E/F)_b = E_b/F_b$.

(3.3.6) Sigui $f: E \rightarrow F$ un morfisme de fibrats vectorials. Les condicions següents són equivalents:

- rang f és constant
- El nucli de f , $\text{Ker } f = \bigcup_{b \in B} \text{Ker } f_b$, és un subfibrat de E
- La imatge de f , $\text{Im } f = \bigcup_{b \in B} \text{Im } f_b$, és un subfibrat de F

Aleshores $E/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$.

(3.3.7) Els morfismes canònics entre diversos espais vectorials s'estenen als corresponents fibrats vectorials. Per exemple, $F \otimes E^* \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(E, F)$, $\wedge^r E^* \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(\wedge^r E, B \times \mathbf{R})$.

(3.3.8) Donat un fibrat vectorial E , n'existeix un altre E' tal que $E \oplus E'$ és trivialitzable.

3.4 El fibrat tangent d'una varietat

Si M és una varietat i $x \in M$, denotem per $T_x M$ l'espai tangent a M en x . Si $f: M \rightarrow N$ és una aplicació, denotem per $T_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ l'aplicació tangent de f en x .

Sigui $TM = \coprod_{x \in M} T_x M$, i $\tau_M: TM \rightarrow M$ la projecció $v_x \mapsto x$.

(3.4.1) TM té una única estructura de varietat amb la qual

- $\tau_M: TM \rightarrow M$ és un fibrat vectorial
- per a tota carta $\varphi: U \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbf{R}^m$ l'aplicació

$$\Phi: TU = \tau_M^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^m, \quad (p, u_p) \mapsto (p, d_p \varphi \cdot u_p)$$

és una trivialització local.

(3.4.2) La **carta natural** de TM associada a la carta $\varphi: U \rightarrow \tilde{U}$ és la carta fibrada obtinguda a partir de la trivialització local: $TU \xrightarrow{\Phi} U \times \mathbf{R}^m \xrightarrow{\varphi \times \text{Id}} \tilde{U} \times \mathbf{R}^m$.

(3.4.3) El fibrat vectorial $\tau_M: TM \rightarrow M$ s'anomena **fibrat tangent** de M .

Les seves seccions s'anomenen **camp vectorials** (o camps de vectors tangents). Escrivim $\mathfrak{X}(M) = \text{Sec}(TM)$.

(3.4.4) Sigui (e_i) la base canònica de $\mathbf{R}^m$. A partir d'una trivialització definida per una carta (U, φ) s'obté una referència local de TM sobre U , donada pels camps vectorials $E_i^\varphi(x) = (d_x \varphi)^{-1} \cdot e_i$. Normalment es denoten per $\partial/\partial x^i$, i s'anomenen **camp vectorials coordenats** associats a la carta.

(3.4.5) Sigui $f: M \rightarrow N$ una aplicació. L'**aplicació tangent** de f és l'aplicació $Tf: TM \rightarrow TN$ definida per l'aplicació tangent en cada fibra. És un morfisme de fibrats vectorials al damunt de f .

(3.4.6) El **fibrat cotangent** de M és el dual del fibrat tangent: $T^*M = (TM)^*$. Les seves seccions s'anomenen **1-formes diferencials**, o camps de vectors cotangents. El seu conjunt es representa per $\Omega^1(M)$, o $\mathfrak{X}^*(M)$.

(3.4.7) Un **camp tensorial** de tipus (r, s) és una secció del fibrat tensorial $\text{Tens}_s^r(TM)$. El mòdul d'aquestes seccions es representa per $\mathcal{T}_s^r(M)$. Una **k-forma diferencial** és una secció del fibrat $\Lambda^k T^*M$. El mòdul d'aquestes seccions es representa per $\Omega^k(M)$.

(3.4.8) Una varietat M es diu **parallelitzable** si el seu fibrat tangent TM és trivialitzable. Això és el mateix que afirmar que TM té una referència global, o que $\mathfrak{X}(M)$ és un $C^\infty(M)$ -mòdul lliure.

Són parallelitzables els oberts de $\mathbf{R}^m$, les esferes $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_7$, els grups de Lie ...

- (3.4.9) Una varietat M (de dimensió m) es diu **orientable** si el fibrat $\Lambda^m T^*M$ és trivialitzable. Això és el mateix que afirmar que M té una m -forma diferencial enlloc nul·la.

Si M és orientable llavors té un atlas tal que els canvis de coordenades tenen jacobians positius. El recíproc també és cert si M és paracompacta.

Són orientables els oberts de $\mathbf{R}^m$, les esferes, els grups de Lie, les varietats tangents TN , els espais projectius $\mathbf{P}_{2n-1}(\mathbf{R})$...

- (3.4.10) *El fibrat tangent d'un espai fibrat*

Si $\pi: E \rightarrow B$ és un fibrat, llavors $T\pi: TE \rightarrow TB$ és un fibrat.

Si $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ és una trivialització local de $E \xrightarrow{\pi} B$, llavors $T\varphi: (T\pi)^{-1}(TU) \rightarrow TU \times TF$ és una trivialització local de $TE \xrightarrow{T\pi} TB$.

- (3.4.11) Si $\pi: E \rightarrow B$ és un fibrat *vectorial*, llavors $T\pi: TE \rightarrow TB$ és un fibrat vectorial (de rang doble).

La trivialització local $T\varphi$ esmentada més amunt dóna una estructura d'espai vectorial a les fibres, que són isomorfes a $TF \cong F \times F$. Aquesta estructura és independent de la trivialització $T\varphi$ triada, ja que si $\varphi, \bar{\varphi}$ són dues trivialitzacions locals de E sobre el mateix obert, llavors la segona component de $T\bar{\varphi} \circ (T\varphi)^{-1}: TU \times (F \times F) \rightarrow TU \times (F \times F)$ és lineal en el segon argument.

Si $\mu: E \times_B E \rightarrow E$ és la suma de E , la seva aplicació tangent $T\mu: TE \times_{TB} TE \rightarrow TE$ és la suma de TE amb aquesta estructura. Anàlogament amb la multiplicació $m_c: E \rightarrow E$ per escalars.

- (3.4.12) La projecció composta $\tau_B \circ T\pi = \pi \circ \tau_E: TE \rightarrow B$ és un fibrat, però *no* és un fibrat vectorial.

- (3.4.13) Si E és un fibrat vectorial, la varietat TE té doncs dues estructures de fibrat vectorial, $\tau_E: TE \rightarrow E$ i $T\pi: TE \rightarrow TB$. Podem representar-les en un diagrama, juntament amb les seves expressions en una carta fibrada de E i les coordenades naturals que pertocuin:

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{T\pi} & TB \\ \tau_E \downarrow & & \downarrow \tau_B \\ E & \xrightarrow{\pi} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (b, y; v, w) & \longmapsto & (b, v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (b, y) & \longmapsto & (b) \end{array}$$

Aquest fet evidencia que la notació $\text{Sec}(TE)$ és ambigua, i potser és més apropiat escriure $\text{Sec}(\tau_E)$ o $\text{Sec}(T\pi)$, segons el cas.

- (3.4.14) En particular, fent $E = TB$ veiem que la varietat $T(TB)$ té *dues* estructures de fibrat vectorial *diferents* sobre la mateixa base TB .

3.5 Vectors tangents verticals

- (3.5.1) Sigui $\pi: E \rightarrow B$ un espai fibrat. Considerem un punt $e \in E$. L'aplicació $T_e\pi: T_eE \rightarrow T_{\pi(e)}B$ és lineal. El seu nucli és un subespai de T_eE

$$V_e(E) = \text{Ker } T_e\pi = \{v_e \in T_eE \mid T_e\pi \cdot v_e = 0\}.$$

Els seus elements s'anomenen **vectors tangents verticals**.

- (3.5.2) Si $b = \pi(e)$, l'espai tangent $T_e(E_b)$ a la fibra s'identifica a un subespai de $T_e(E)$; amb aquesta identificació $V_e(E) = T_e(E_b)$.

- (3.5.3) La unió de tots els espais de vectors verticals $V_eE \subset T_eE$, amb $e \in E$, dóna un subfibrat

$$VE = \text{Ker } T\pi \subset TE,$$

anomenat **subfibrat vertical** de TE .

- (3.5.4) Un camp vectorial en E es diu **vertical** si els seus valors són vectors tangents verticals.

- (3.5.5) Siguin x coordenades de B , (x, y) coordenades fibrades de E , i $(x, y; u, w)$ les coordenades naturals corresponents de TE .

L'expressió coordinada d'un vector tangent vertical és de la forma $(x, y; 0, w)$.

La d'un camp vectorial vertical és $X(x, y) = (x, y; 0, w(x, y))$, o també $X = w^k \partial/\partial y^k$.

- (3.5.6) Recordem que si E_o és un espai vectorial (real, de dimensió finita) i $p \in E_o$ tenim un isomorfisme canònic $\lambda_p: E_o \rightarrow T_p(E_o)$, donat per $v \mapsto [t \mapsto p + tv]$ (si considerem els vectors tangents com a classe de tangència de camins), o per $v \mapsto D_{p,v}$ (si considerem els vectors tangents com a derivacions de funcions).

- (3.5.7) *Aixecament vertical*

Sigui $\pi: E \rightarrow B$ un fibrat vectorial, $b \in B$. E_b és un espai vectorial, per tant fixat un punt $h_b \in E_b$ tenim un isomorfisme

$$E_b \longrightarrow T_{h_b}(E_b) = V_{h_b}(E) \subset T_{h_b}(E), \quad k_b \mapsto \lambda_{h_b}(k_b) =: \lambda_E(h_b, k_b).$$

El vector $\lambda_E(h_b, k_b)$ s'anomena **aixecament vertical** de k_b al damunt de h_b .

Enganxant aquests isomorfismes quan h_b recorre E obtenim globalment

$$E \times_B E \xrightarrow{\lambda_E} V(E) \subset T(E),$$

que és un isomorfisme de fibrats vectorials sobre E .

En aquest punt convé especificar que el primer fibrat és $E \times_B E \xrightarrow{\text{pr}_1} E$, amb $E \times_B E = \{(h, k) \in E \times E \mid \pi(h) = \pi(k)\}$ (producte fibrat).

També podem interpretar-lo com el fibrat imatge recíproca de $\pi: E \rightarrow B$ per l'aplicació π .

(3.5.8) Considerant una carta fibrada (x, h) de E , i les coordenades naturals corresponents de TE , l'expressió local d'aquest isomorfisme és $\lambda: (x, h, k) \mapsto (x, h; 0, k)$.

(3.5.9) *El camp de Liouville*

Sigui $\pi: E \rightarrow B$ un fibrat vectorial. El **camp vectorial de Liouville** (o de les dilatacions) de E és el camp vectorial vertical $\Delta_E \in \mathfrak{X}(E)$ definit per

$$\Delta_E(h) = \lambda_E(h, h).$$

(3.5.10) La seva expressió en coordenades fibrades és $(x, h) \mapsto (x, h; 0, h)$, o també $\Delta_E = h^j \partial / \partial h^j$.

(3.5.11) Una funció $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ es diu **homogènia** de grau k si $f(\lambda h) = \lambda^k f(h)$, per a qualssevol $h \in E$, $\lambda > 0$.

(3.5.12) *Teorema de les funcions homogènies d'Euler*

Una funció f de classe C^1 és homogènia de grau k si $\mathcal{L}_{\Delta} f = kf$.

Més generalment, f podria estar definida només en un conjunt obert «cònic» de E , per exemple el complementari de la secció nul·la.

(3.5.13) *Derivació fibrada*

Sigui $\pi: E \rightarrow B$ un fibrat vectorial, $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ una funció. Donat $b \in B$, considerem la restricció $f_b: E_b \rightarrow \mathbf{R}$. La seva derivada en un punt $v_b \in E_b$ és una forma lineal $Df_b(v_b) \in \text{Hom}(E_b, \mathbf{R}) = E_b^*$. Globalment això defineix una aplicació

$$E \xrightarrow{\mathcal{F}f} E^*, \quad v_b \mapsto Df_b(v_b).$$

S'anomena **derivada fibrada** (o derivada al llarg de la fibra) de f . És un morfisme de fibracions.

(3.5.14) En coordenades fibrades la seva expressió local és $\mathcal{F}f: (x, v) \mapsto \left(x, \frac{\partial f}{\partial v}(x, v)\right)$.

(3.5.15) Anàlogament es poden considerar derivades d'ordre superior. Per exemple es pot considerar $D^2 f_b(v_b): E_b \times E_b \rightarrow \mathbf{R}$ com una forma bilineal (simètrica), és a dir, $D^2 f_b(v_b) \in E_b^* \otimes E_b^*$. Globalment s'obté la ***hessiana fibrada***

$$E \xrightarrow{\mathcal{F}^2 f} E^* \otimes E^*, \quad v_b \mapsto D^2 f_b(v_b).$$

(3.5.16) La seva expressió local és $\mathcal{F}^2 f: (x, v) \mapsto \left(x, \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v}(x, v)\right)$.

4 Estructures canòniques dels fibrats tangent i cotangent

Designarem per $\tau_M: TM \rightarrow M$ i $\pi_M: T^*M \rightarrow M$ els fibrats tangent i cotangent d'una varietat M .

Totes les varietats i aplicacions se suposaran de classe C^∞ .

4.1 L'endomorfisme vertical de $T(TM)$

- (4.1.1) Sobre el fibrat vectorial $\tau_{TM}: T(TM) \rightarrow TM$ existeix un endomorfisme $J: T(TM) \rightarrow T(TM)$ definit de la manera següent: sobre cada fibra $T_u(TM)$ l'acció sobre un vector $w_u \in T_u(TM)$ s'obté projectant-lo per $T_u(\tau_M)$ i aixecant verticalment el resultat sobre u :

$$J(w_u) = \lambda(u, T_u(\tau_M) \cdot w_u) \in V_u(TM) \subset T_u(TM).$$

S'anomena **endomorfisme vertical** de $T(TM)$, i es denota usualment per J , o S .

- (4.1.2) Considerem una carta de M , i les cartes naturals corresponents de TM i $T(TM)$. En les coordenades d'aquesta, l'expressió local de J és

$$J(x, u; v, w) = (x, u; 0, v).$$

També es pot escriure $J \cdot (v^i \partial / \partial x^i + w^i \partial / \partial u^i) = v^i \partial / \partial u^i$.

- (4.1.3) J s'identifica a un camp tensorial de tipus $(1, 1)$ en la varietat TM , $J \in \mathcal{T}_1^1(TM)$.

En coordenades naturals és $J = \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes dx^i$.

- (4.1.4) Aquest camp tensorial també s'identifica a un endomorfisme de $T^*(TM)$, l'endomorfisme transposat ${}^tJ: T^*(TM) \rightarrow T^*(TM)$.

En coordenades naturals ${}^tJ \cdot (A_i dx^i + B_i du^i) = B_i dx^i$.

- (4.1.5) L'endomorfisme vertical compleix:

- $J^2 = 0$.
- $\text{Ker } J = \text{Im } J = V(TM)$.

4.2 La involució canònica de $T(TM)$

(4.2.1) Existeix una aplicació $\kappa_M: T(TM) \rightarrow T(TM)$ amb expressió local

$$\kappa(x, u; v, w) = (x, v; u, w)$$

en coordenades naturals qualssevol.

(4.2.2) Aquesta aplicació s'anomena **involució canònica** de $T(TM)$, i es denota usualment per κ_M , o s_M .

(4.2.3) La involució canònica és un difeomorfisme involutiu ($\kappa^2 = \text{Id}$). Satisfà

$$\tau_{TM} \circ \kappa_M = T(\tau_M), \quad T(\tau_M) \circ \kappa_M = \tau_{TM}.$$

És un isomorfisme entre els fibrats vectorials $\tau_{TM}: T(TM) \rightarrow TM$ i $T(\tau_M): T(TM) \rightarrow TM$.

(4.2.4) Sigui $\Gamma: I \times J \rightarrow M$, on $I, J \subset \mathbf{R}$ són intervals oberts. De manera anàloga a l'aixecament d'un camí de M a TM , podem aixecar Γ a TM derivant respecte a s o respecte a t , si denotem $(s, t) \in I \times J$ les variables:

$$\Gamma' = T(\Gamma) \circ \frac{\partial}{\partial s}, \quad \Gamma \cdot = T(\Gamma) \circ \frac{\partial}{\partial t}.$$

(4.2.5) La involució canònica de $T(TM)$ és l'única aplicació $\kappa: T(TM) \rightarrow T(TM)$ tal que, per a tot $\Gamma: I \times J \rightarrow M$, $(\Gamma \cdot)' = \kappa \circ (\Gamma') \cdot$.

4.3 Aixecament de camps vectorials al fibrat tangent

(4.3.1) Sigui X un camp vectorial en M , $F: \mathcal{D} \rightarrow M$ el seu flux. Per definició, compleix $F(0, p) = p$ i $F'(t, p) = X(F(t, p))$, i doncs permet reconstruir el camp vectorial com $X = F'(0, -)$. A més, defineix difeomorfismes $F^t: M_t \rightarrow M_{-t}$ que compleixen les «lleis de grup»: $F^0 = \text{Id}_M$, $F^t \circ F^s = F^{t+s}$ allà on té sentit.

(4.3.2) Considerem les aplicacions tangents d'aquests difeomorfismes. Són difeomorfismes $T(F^t): T(M_t) \rightarrow T(M_{-t})$ que compleixen

$$T(F^0) = \text{Id}_{TM}, \quad T(F^t) \circ T(F^s) = T(F^{t+s})$$

de manera que constitueixen un grup uniparamètric local de difeomorfismes de TM . El seu generador infinitesimal és un camp vectorial $X^T \in \mathfrak{X}(TM)$, definit per

$$X^T(u) = \left. \frac{d}{dt} T(F^t)(u) \right|_{t=0}.$$

X^T s'anomena **aixecament canònic** (o complet) de X a TM (o també **aixecament tangent** de X).

- (4.3.3) Considerem una carta de M , i les coordenades naturals (x^i, u^i) corresponents de TM . Si $X = f^i \partial / \partial x^i$, llavors

$$X^T = f^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} u^j \right) \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

- (4.3.4) X^T està τ_M -relacionat amb X .

- (4.3.5) $X^T = \kappa_M \circ TX$.

- (4.3.6) Sigui X un camp vectorial en M . Es pot definir un camp vectorial $X^V \in \mathfrak{X}(TM)$ aixecant verticalment els vectors $X(p)$:

$$X^V(u_p) = \lambda(u_p, X(p)) \in V_{u_p}(TM) \subset T_{u_p}(TM).$$

Aquest és un camp vectorial vertical, anomenat **aixecament vertical** de X a TM .

- (4.3.7) En coordenades naturals, si $X = f^i \partial / \partial x^i$ llavors

$$X^V = f^i \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

- (4.3.8) $X^V = J \circ X^T$.

4.4 Equacions diferencials de segon ordre

- (4.4.1) Sigui $\xi: I \rightarrow TM$ un camí en TM . ξ és l'aixecament canònic (velocitat) d'un camí en M sii $\xi = T(\tau_M) \circ \xi'$.

- (4.4.2) Sigui Y un camp vectorial en TM . Totes les corbes integrals de Y són aixecaments de camins en M sii

$$T(\tau_M) \circ Y = \text{Id}_{TM}.$$

És a dir, a més de ser secció de τ_{TM} , Y és secció de $T(\tau_M)$.

- (4.4.3) D'un camp vectorial $Y \in \mathfrak{X}(TM)$ que satisfà la condició anterior es diu que satisfà la **condició de segon ordre**. Si $\gamma: I \rightarrow M$ és un camí, Y defineix una **equació diferencial de segon ordre** en M :

$$\gamma'' = Y \circ \gamma'.$$

- (4.4.4) En coordenades naturals (x^i, u^i) de TM , l'expressió d'un d'aquests camps vectorials és

$$Y = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + a^i(x, u) \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

i l'expressió local de l'equació diferencial de segon ordre corresponent és $\ddot{x} = a(x, \dot{x})$.

- (4.4.5) Sigui $Y \in \mathfrak{X}(TM)$ que satisfà la condició de segon ordre, i $Z \in \mathfrak{X}(TM)$ qualsevol. Llavors $Y + Z$ satisfà la condició de segon ordre sii Z és vertical.

- (4.4.6) Sigui $u \in TM$. Es diu que un vector tangent $h_u \in T_u(TM)$ satisfà la condició de segon ordre quan $T_u(\tau_M) \cdot h_u = u$. El conjunt d'aquests vectors, $N_u(TM) \subset T_u(TM)$, és un subespai afí amb subespai director $V_u(TM)$.

La unió de tots ells és un subfibrat afí $N(TM) \subset T(TM)$ modelat en el subfibrat vectorial $V(TM)$. Un camp vectorial Y satisfà la condició de segon ordre sii és una secció de $N(TM)$.

- (4.4.7) *Esprais*

Sigui Z un camp vectorial en TM satisfent la condició de segon ordre. Les condicions següents són equivalents:

- i) Per a qualsevol $c \in \mathbf{R}^*$ i qualsevol solució $\xi: I \rightarrow M$ de l'equació diferencial de segon ordre definida per Z , el camí $\eta(t) = \xi(ct)$ n'és també solució.
- ii) Per a qualsevol $c \in \mathbf{R}$ i qualsevol $v_x \in TM$, $Z(cv_x) = cT(m_c) \cdot Z(v_x)$, on $m_c: TM \rightarrow TM$ és l'homotècia de raó c sobre les fibres.
- iii) $[\Delta, Z] = Z$.
- iv) En coordenades naturals (x^i, u^i) qualssevol de TM l'expressió de Z és

$$Z = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + a^i(x, u) \frac{\partial}{\partial u^i},$$

on les $a^i(x, u)$ són homogènies de grau 2 en u .

Un camp vectorial satisfent la condició de segon ordre i aquestes condicions equivalents es diu **esprai**.

Es pot provar que, si Z és de classe C^∞ en TM sencer, llavors la seva expressió en coordenades té la forma $Z(x, u) = u^k \frac{\partial}{\partial x^k} + h_{ij}^k(x) u^i u^j \frac{\partial}{\partial u^k}$, amb h_{ij}^k simètriques respecte als índexs inferiors.

- (4.4.8) *L'esprai geodèsic d'una connexió*

Sigui ∇ una connexió en M . Existeix un camp vectorial $S \in \mathfrak{X}(TM)$ caracteritzat per la relació següent: si $\gamma: I \rightarrow M$ és un camí,

$$S(\gamma'(t)) = \gamma''(t) - \lambda_{TM}(\gamma'(t), \nabla_t \gamma'(t)) \in T_{\gamma'(t)}(TM).$$

S satisfà la condició de segon ordre, i és un esprai; s'anomena l'**esprai geodèsic** de la connexió. Les corbes integrals de S són les velocitats de les geodèsiques de ∇ .

En coordenades naturals de TM s'expressa

$$S = u^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma_{ij}^k u^i u^j \frac{\partial}{\partial u^k}.$$

4.5 Les formes diferencials canòniques del fibrat cotangent

(4.5.1) Sobre T^*M existeix una 1-forma diferencial canònica θ_M , definida per

$$\theta_M(p) = {}^t(T_p\pi_M) \cdot p \quad (p \in T^*M).$$

La 2-forma diferencial

$$\omega_M = -d\theta_M$$

és no-degenerada.

(4.5.2) θ_M , ω_M són les **formes diferencials canòniques** (o **formes de Liouville**) de T^*M .

(4.5.3) Considerem una carta de M , i siguin (x^i, p_i) les coordenades naturals corresponents de T^*M . L'expressió de les formes diferencials canòniques en aquestes cartes és

$$\theta_M = p_i dx^i, \quad \omega_M = dx^i \wedge dp_i.$$

(4.5.4) La contracció amb ω_M defineix un isomorfisme entre els fibrats vectorials tangent i cotangent:

$$\widehat{\omega_M}: T(T^*M) \rightarrow T^*(T^*M), \quad \widehat{\omega_M}(w_p) = i_{w_p}\omega.$$

(4.5.5) En les corresponents coordenades naturals s'expressa $\widehat{\omega_M}(x, p; u, h) = (x, p; -h, u)$.

(4.5.6) L'aplicació

$$\mathfrak{X}(T^*M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(T^*M), \quad X \mapsto i_X\omega_M,$$

és un isomorfisme de $C^\infty(T^*M)$ -mòduls.

(4.5.7) Existeix un difeomorfisme canònic $T(T^*M) \cong T^*(T^*M)$.

També es pot provar que hi ha un difeomorfisme canònic $T(T^*M) \cong T^*(TM)$. Tanmateix, no existeix cap difeomorfisme *canònic* entre aquestes varietats i $T(TM)$.

(4.5.8) Sobre T^*M existeix una forma de volum canònica.

Es pot prendre per exemple $\Omega_M = (-1)^{m(m-1)/2} \frac{1}{m!} \omega_M \wedge \dots \wedge \omega_M$.

Llavors en coordenades naturals $\Omega_M = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dp_m$.

4.6 Aixecament de difeomorfismes i de camps vectorials al fibrat cotangent

(4.6.1) Sigui $\varphi: M \rightarrow N$ un *difeomorfisme*. $T\varphi: TM \rightarrow TN$ és un isomorfisme de fibrats vectorials al damunt de φ . Això permet definir un isomorfisme entre els fibrats duals:

$$T^*\varphi: T^*M \rightarrow T^*N, \quad (T^*\varphi)_x = {}^t(T_x\varphi)^{-1}.$$

L'anomenem **aixecament canònic** de φ als fibrats cotangents.

És un morfisme al damunt de φ . Si no haguéssim invertit la transposada, hauríem obtingut un morfisme al damunt de φ^{-1} .

Més generalment, la mateixa construcció serviria per a un difeomorfisme local φ .

(4.6.2) L'aixecament canònic de difeomorfismes als fibrats cotangents compleix les propietats següents:

- $T^*(\psi \circ \varphi) = T^*(\psi) \circ T^*(\varphi)$.
- Per a tota 1-forma diferencial β en N , $(T^*\varphi) \circ \varphi^*[\beta] = \beta \circ \varphi$.

(4.6.3) Les formes diferencials canòniques del fibrat cotangent són invariants pels aixecaments canònics de difeomorfismes:

$$(T^*\varphi)^*[\theta_N] = \theta_M, \quad (T^*\varphi)^*[\omega_N] = \omega_M.$$

(4.6.4) Considerem coordenades (x^i) de M i $(\bar{x}^j)$ de N , tals que l'expressió local del difeomorfisme φ és $x \mapsto \bar{x}$. En les coordenades naturals corresponents l'expressió local de $T\varphi$ és $(x, u) \mapsto (\bar{x}, \bar{u})$, on $\bar{u}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} u^i$, i l'expressió local de $T^*\varphi$ és

$$(x, p) \mapsto (\bar{x}, \bar{p}), \quad \bar{p}_j = p_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}.$$

(4.6.5) Sigui ara X un camp vectorial en M , El seu flux defineix difeomorfismes $F^t: M_t \rightarrow M_{-t}$, dels quals podem considerar els aixecaments al cotangent, $T^*(F^t): T^*(M_t) \rightarrow T^*(M_{-t})$. També compleixen les «lleis de grup», de manera que constitueixen un grup uniparamètric local de difeomorfismes de

T^*M . El seu generador infinitesimal és un camp vectorial $X^{T^*} \in \mathfrak{X}(T^*M)$, definit per

$$X^{T^*}(p) = \left. \frac{d}{dt} T^*(F^t)(p) \right|_{t=0}.$$

X^{T^*} s'anomena **aixecament canònic** de X a T^*M (o **aixecament co-tangent** de X).

(4.6.6) Considerem una carta de M , i les coordenades naturals (x^i, p_i) corresponents de T^*M . Si $X = f^i \partial / \partial x^i$, llavors

$$X^{T^*} = f^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \left(p_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

(4.6.7) Les formes diferencials canòniques θ_M , ω_M de T^*M són invariants pels aixecaments canònics X^{T^*} .

(4.6.8) X^{T^*} està π_M -relacionat amb X .

(4.6.9) Sigui $X: M \rightarrow TM$ un camp vectorial, $\hat{X}: T^*M \rightarrow \mathbf{R}$ la funció lineal associada a X . compleix:

- $\hat{X} = \langle \theta_M, X^{T^*} \rangle$.
- $i_{X^{T^*}} \omega_M = d\hat{X}$.

La segona relació significa que X^{T^*} és el camp hamiltonià de la funció $\hat{X}$ respecte a la forma simplèctic canònica de T^*M .

5 Varietats simplèctiques

Totes les varietats i aplicacions se suposaran de classe C^∞ .

5.1 Varietats simplèctiques. Teorema de Darboux

(5.1.1) Sigui M una varietat diferenciable. Una **forma simplèctica** en M és una 2-forma diferencial $\omega \in \Omega^2(M)$ tancada ($d\omega = 0$) i no-degenerada.

Per a cada $p \in M$, $\omega_p \in \Lambda^2 T_p^*M$ defineix una forma bilineal alternada en T_pM , $\omega_p: T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbf{R}$. Que sigui no-degenerada significa que l'aplicació lineal $\widehat{\omega}_p: T_pM \rightarrow T_p^*M$ deduïda, $\widehat{\omega}_p(u_p) = \omega_p(u_p, \cdot)$, és un isomorfisme

(5.1.2) Una **varietat simplèctica** és una varietat dotada d'una forma simplèctica.

(5.1.3) Una forma simplèctica ω és localment exacta. Quan ho és globalment, es diu que la varietat simplèctica és **exacta**. Si $\omega = d\theta$, es diu que θ és un **potencial simplèctic** de ω .

(5.1.4) Sigui (M, ω) una varietat simplèctica.

- $\dim M$ és parella, $m = 2n$.
- L'aplicació $\widehat{\omega}: TM \rightarrow T^*M$, $v \mapsto i_v\omega$, és un isomorfisme de fibrats vectorials.
- L'aplicació $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$, $X \mapsto i_X\omega = \widehat{\omega} \circ X$, és un isomorfisme de $C^\infty(M)$ -mòduls.
- M és orientable. Com a forma de volum es pot prendre $\Omega = \omega \wedge \dots \wedge \omega$.
 $\wedge \omega$, $\Omega = \frac{1}{n!} \omega^{\wedge n}$, o també $\Omega = (-1)^{[n/2]} \frac{1}{n!} \omega^{\wedge n}$.

(5.1.5) $\mathbf{R}^{2n}$ té una forma simplèctica canònica,

$$\omega = dx^1 \wedge dx^{n+1} + dx^2 \wedge dx^{n+2} + \dots + dx^n \wedge dx^{2n},$$

o també $\omega = dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 + \dots + dx^{2n-1} \wedge dx^{2n}$.

(5.1.6) Si N és una varietat diferenciable qualsevol, el seu fibrat cotangent T^*N està dotat d'una forma simplèctica canònica, $\omega_N = -d\theta_N$.

(5.1.7) Sigui (U, φ) una carta de M , amb funcions coordenades $\varphi = (z^1, \dots, z^m)$. Si $\omega_{ij} = \omega(\partial/\partial z^i, \partial/\partial z^j)$, llavors $\omega|_U = \frac{1}{2} \omega_{ij} dz^i \wedge dz^j$. La matriu (ω_{ij}) és en tot punt antisimètrica i no-degenerada.

Si $X = f^i \partial/\partial z^i$, $i_X\omega = f^i \omega_{ij} dz^j$

En les coordenades naturals corresponents dels fibrats tangent i cotangent, l'expressió local de $\widehat{\omega}$ és $\widehat{\omega}(z^i, u^i) = (z^i, u^i \omega_{ij})$.

(5.1.8) *Teorema de Darboux*

Signi (M, ω) una varietat simplèctica de dimensió $2n$. Per a tot punt $p \in M$ existeix una carta $(U, (x^i, y_i))$ en p tal que

$$\omega|_U = dx^i \wedge dy_i.$$

Una tal carta es diu **carta simplèctica**, i les coordenades es diuen **simplèctiques**, o **de Darboux**.

(5.1.9) Aquest teorema afirma que tota varietat simplèctica és localment isomorfa a $\mathbf{R}^{2n}$ amb la seva forma simplèctica canònica. Això implica que, a diferència de la geometria riemanniana, en la geometria simplèctica no hi ha invariants locals altres que la dimensió.

(5.1.10) No hi ha una caracterització simple de les varietats que admeten una estructura simplèctica. No tota varietat orientable de dimensió parella n'admet. Per exemple, si M és compacta, cal $H_{\text{dR}}^2(M) \neq 0$.

5.2 Camps vectorials hamiltonians

En aquest apartat (M, ω) és una varietat simplèctica.

(5.2.1) Considerem l'isomorfisme $\widehat{\omega}: TM \rightarrow T^*M$. Donada una funció $h: M \rightarrow \mathbf{R}$ es defineix el **camp hamiltonià** o **gradient simplèctic** de h com el camp vectorial

$$X_h = \widehat{\omega}^{-1} \circ dh.$$

En altres termes,

$$i_{X_h} \omega = dh.$$

(5.2.2) Es diu que h és la **funció hamiltoniana** de X_h . Està determinada per X_h llevat d'una funció localment constant.

(5.2.3) Un camp vectorial X en M es diu **hamiltonià** si és el camp hamiltonià d'una funció.

Un camp vectorial es diu **localment hamiltonià** si cada punt té un veïnat obert sobre el qual X és hamiltonià.

Denotem per $\mathfrak{X}_h(M) \subset \mathfrak{X}_{\text{lh}}(M) \subset \mathfrak{X}(M)$ els subespais vectorials dels camps vectorials hamiltonians i localment hamiltonians.

(5.2.4) Sigui $X \in \mathfrak{X}(M)$. Les tres afirmacions següents són equivalents:

- X és localment hamiltonià.
- $i_X\omega$ és una 1-forma diferencial tancada.
- $\mathcal{L}_X\omega = 0$.

(5.2.5) *Teorema de Liouville*

La forma de volum simplèctica Ω és invariant pels camps vectorials localment hamiltonians.

(5.2.6) Per a cada $p \in M$, els valors dels camps vectorials hamiltonians en el punt p recorren tot T_pM .

(5.2.7) Si α és una forma diferencial, $\mathcal{L}_fX\alpha = f\mathcal{L}_X\alpha + df \wedge i_X\alpha$.

(5.2.8) *Teorema de Li Hua Zhong*

Sigui (M, ω) una varietat simplèctica connexa, $\alpha \in \Omega^k(M)$ una forma diferencial invariant per tots els camps hamiltonians.

Si k és imparell, $\alpha = 0$. Si k és parell, $\alpha = c\omega^{\wedge \frac{k}{2}}$, on $c \in \mathbf{R}$.

(5.2.9) Si X, Y són camps vectorials localment hamiltonians, aleshores $[X, Y]$ és una camp vectorial hamiltonià, amb hamiltoniana $\omega(Y, X)$.

(5.2.10) *Expressió local en coordenades de Darboux*

Sigui (x^i, y_i) un sistema de coordenades de Darboux: $\omega = dx^i \wedge dy_i$. Llavors

$$\widehat{\omega} \left(A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + B_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) = A^i dy_i - B_i dx^i.$$

L'expressió del camp hamiltonià X_h és

$$X_h = \frac{\partial h}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

(5.2.11) Sigui N una varietat, $X \in \mathfrak{X}(N)$. La funció lineal $\widehat{X}: T^*N \rightarrow \mathbf{R}$, definida per $\widehat{X}(p_q) = \langle p_q, X(q) \rangle$, és la hamiltoniana del camp vectorial $X^{T^*} \in \mathfrak{X}(T^*N)$.

5.3 Claudàtor de Poisson

(5.3.1) Sigui M una varietat, i $\omega \in \Omega^2(M)$ una 2-forma diferencial no-degenerada, de la qual per ara *no* suposem que sigui tancada. Donada una funció f en M , podem definir-ne com abans el gradient respecte a ω per $X_f = \widehat{\omega}^{-1} \circ df$.

Donades dues funcions $f, g: M \rightarrow \mathbf{R}$, en definim el **parèntesi de Poisson** (o **claudàtor de Poisson**) com la funció

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = i_{X_g} i_{X_f} \omega = X_g \cdot f = -X_f \cdot g.$$

(5.3.2) Es compleix

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\}, \\ \{fg, h\} &= f\{g, h\} + g\{f, h\} \end{aligned}$$

(i anàlogament per la dreta).

$$(5.3.3) \quad i_{[X_f, X_g] + X_{\{f, g\}}} \omega = -i_{X_g} i_{X_f} d\omega.$$

(5.3.4) ω és tancada sii se satisfà

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f, g\}}.$$

$$(5.3.5) \quad d\omega(X_f, X_g, X_h) = \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}.$$

(5.3.6) ω és tancada sii el seu parèntesi de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ satisfà la identitat de Jacobi.

(5.3.7) Sigui (M, ω) una varietat simplèctica.

L'espai vectorial $C^\infty(M)$, amb el parèntesi de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$, és una $\mathbf{R}$ -àlgebra de Lie.

L'aplicació $C^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, $f \mapsto X_f$, és un antihomomorfisme d'àlgebres de Lie.

El nucli d'aquest morfisme són les funcions localment constants; la imatge, els camps vectorials hamiltonians.

(5.3.8) *Expressió local en coordenades de Darboux*

Sigui (x^i, y_i) un sistema de coordenades de Darboux per a ω . Llavors

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x^i}.$$

(5.3.9) Considerem coordenades (z^i) qualssevol en M . Llavors

$$\{f, g\} = \{z^i, z^j\} \frac{\partial f}{\partial z^i} \frac{\partial g}{\partial z^j}.$$

(5.3.10) Encara en coordenades qualssevol, escrivim $\omega = \frac{1}{2} a_{ij} dz^i \wedge dz^j$, on $a_{ij} = \omega(\partial/\partial z^i, \partial/\partial z^j)$; sigui $A = (a_{ij})$.

D'altra banda, escrivim $b^{ij} = \{z^i, z^j\}$; sigui $B = (b^{ij})$.

Ambdues matrius estan relacionades per $B = (A^\top)^{-1}$.

(5.3.11) Amb les mateixes notacions, les coordenades són de Darboux sii $A = J$, essent $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$.

(5.3.12) Sigui (M, ω) una varietat simplèctica.

Unes coordenades (x^i, y_i) són de Darboux sii satisfan

$$\{x^i, x^j\} = 0, \{y_i, y_j\} = 0, \{x^i, y_j\} = \delta_j^i$$

(«relacions de commutació canòniques»).

(5.3.13) *Teorema de Darboux generalitzat*

Sigui (M, ω) una varietat simplèctica de dimensió $2n$. Siguin $f_1, \dots, f_r$ ($r \leq n$) funcions definides en un veïnat obert de $p \in M$, amb diferencials linealment independents en p , i tals que

$$\{f_i, f_j\} = 0$$

(es diu que «estan en involució»). Llavors existeixen funcions $f_{r+1}, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ tals que, en un veïnat de p , $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ és una carta simplèctica de M ($\omega = \sum_i df_i \wedge dg_i$).

5.4 Simplectomorfismes i transformacions canòniques

(5.4.1) Siguin (M_1, ω_1) i (M_2, ω_2) varietats simplèctiques. Una aplicació $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ es diu **simplèctica** si

$$\varphi^*(\omega_2) = \omega_1.$$

(5.4.2) Un difeomorfisme simplèctic s'anomena **simplectomorfisme** (o isomorfisme de varietats simplèctiques).

La composició de simplectomorfismes, o l'invers d'un simplectomorfisme, són simplectomorfismes.

(5.4.3) Sigui $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ un difeomorfisme entre varietats simplèctiques. Les afirmacions següents són equivalents.

- φ és un simplectomorfisme
- Per a tota $h \in C^\infty(M_2)$, $\varphi^*(X_h) = X_{\varphi^*(h)}$.
- Per a totes $g, h \in C^\infty(M_2)$, $\varphi^*\{g, h\} = \{\varphi^*(g), \varphi^*(h)\}$.

La darrera afirmació significa que $\varphi^*: C^\infty(M_2) \rightarrow C^\infty(M_1)$ és un isomorfisme d'àlgebres de Lie.

(5.4.4) Si $f: N_1 \rightarrow N_2$ és un difeomorfisme, llavors $T^*f: T^*N_1 \rightarrow T^*N_2$ és un simplectomorfisme per a les estructures simplèctiques canòniques.

(5.4.5) Un symplectomorfisme o automorfisme d'una varietat simplèctica (M, ω) és un difeomorfisme $\varphi: M \rightarrow M$ tal que $\varphi^*(\omega) = \omega$.

Podem definir un **symplectomorfisme infinitesimal** de M com un camp vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que el seu flux deixa ω invariant, és a dir, que ω és invariant per X : $\mathcal{L}_X \omega = 0$. Això significa, doncs, que X és un camp vectorial localment hamiltonià.

(5.4.6) Siguin (M_1, ω_1) i (M_2, ω_2) varietats simplèctiques. Un difeomorfisme $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ es diu **transformació canònica** si aplica camps vectorials localment hamiltonians en camps vectorials localment hamiltonians.

(5.4.7) Sigui $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ un difeomorfisme entre varietats simplèctiques connexes. φ és una transformació canònica si i existeix un $c \in \mathbf{R}^*$ tal que

$$\varphi^*(\omega_2) = c\omega_1.$$

A més, si $X_1 \in \mathfrak{X}_{\text{lh}}(M_1)$ té hamiltoniana local h_1 i $\varphi_*(X_1) = X_2 \in \mathfrak{X}_{\text{lh}}(M_2)$ té hamiltoniana local h_2 , existeix un $k \in \mathbf{R}$ tal que, localment, $ch_1 = \varphi^*(h_2) + k$.

(5.4.8) Es compleix també que $\varphi^*\{g, h\} = \frac{1}{c}\{\varphi^*(g), \varphi^*(h)\}$.

(5.4.9) Es diu que c és la **valència** de la transformació canònica. Un symplectomorfisme és, doncs, una transformació canònica univalent.

(5.4.10) Sigui $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ una transformació canònica de valència c entre varietats simplèctiques exactes, amb formes simplèctiques $\omega_i = -d\theta_i$. Existeix localment una funció $F_1 \in C^\infty(M_1)$ tal que

$$\varphi^*(\theta_2) - c\theta_1 = dF_1.$$

(5.4.11) Es diu que F_1 és la **funció generatriu** de la transformació canònica.

5.5 Varietats de Poisson

(5.5.1) Sigui M una varietat, $C^\infty(M)$ la seva àlgebra de funcions diferenciables. Una **estructura de Poisson** en M és un producte (dit **parèntesi de Poisson**)

$$C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad (f, g) \mapsto \{f, g\}$$

R-bilineal que satisfà les propietats següents:

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (antisimetria)
- $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (identitat de Jacobi)

- $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ (regla de Leibniz)

M , dotada d'aquest producte, s'anomena **varietat de Poisson**.

- (5.5.2) L'espai vectorial real $C^\infty(M)$ està dotat, doncs, de dues estructures: és una àlgebra associativa commutativa amb el producte ordinari de funcions i una àlgebra de Lie amb el parèntesi de Poisson. Ambdues estructures estan relacionades per la regla de Leibniz, que significa que, per a tota f , $\{f, -\}$ és una derivació respecte al producte associatiu.

També ho és $\{-, f\}$, en virtut de l'antisimetria.

Una àlgebra associativa i commutativa dotada d'un producte de Lie que satisfà la regla de Leibniz es diu *àlgebra de Poisson*.

- (5.5.3) Com que $\{-, h\}$ és una derivació de $C^\infty(M)$, es correspon amb un camp vectorial diferenciable X_h , anomenat **camp vectorial hamiltonià**³ de h . Per definició,

$$\{f, h\} = X_h \cdot f.$$

L'aplicació

$$C^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad h \mapsto X_h$$

és un antihomomorfisme d'àlgebres de Lie:

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f, g\}}.$$

- (5.5.4) El centre de $C^\infty(M)$ respecte al parèntesi de Lie està format per les funcions f tals que $\{f, g\} = 0$ per a tota g ; equivalentment, són les funcions f tals que $X_f = 0$. A vegades s'anomenen *funcions de Casimir*.

- (5.5.5) Donat un parèntesi de Poisson existeix un camp de bivectors diferenciable $\Lambda \in \text{Sec}(\Lambda^2 TM)$ tal que

$$\{f, g\} = \Lambda(df, dg).$$

Λ és el **tensor de Poisson** de la varietat de Poisson.

- (5.5.6) Recíprocament, donada una secció diferenciable Λ de $\Lambda^2 TM$, la fórmula anterior permet definir un parèntesi de funcions antisimètric i satisfent la regla de Leibniz; però la identitat de Jacobi se satisfà sii Λ satisfà una condició d'integrabilitat que es pot expressar com

$$[\Lambda, \Lambda] = 0,$$

on $[-, -]$ denota el *parèntesi de Schouten* de camps de multivectors.

³Un altre conveni s'obtindria definint X_h com $\{h, -\}$.

(5.5.7) A partir del tensor de Poisson Λ es defineix un morfisme de fibrats vectorials

$$\widehat{\Lambda}: T^*M \rightarrow TM, \quad \alpha_x \mapsto \Lambda(\alpha_x, -).$$

Notem que $\widehat{\Lambda} \circ dh = X_h$.

(5.5.8) Si $U \subset M$ és un subconjunt obert d'una varietat de Poisson la restricció del tensor de Poisson la dota d'una estructura de varietat de Poisson.

(5.5.9) En particular, siguin (x^i) coordenades locals de M en un conjunt obert U . Es pot expressar $\Lambda|_U = \frac{1}{2} \Lambda^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$. Donades $f, g \in C^\infty(U)$, el seu parèntesi de Poisson és $\{f, g\} = \Lambda^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}$. En particular, $\{x^i, x^j\} = \Lambda^{ij}$.

(5.5.10) El rang de l'estructura de Poisson en un punt $x \in M$ és el rang del seu tensor de Poisson en aquell punt, és a dir, $\text{rang } \widehat{\Lambda}_x = \dim \text{Im } \widehat{\Lambda}_x$, que és un nombre parell $\leq \dim M$.

(5.5.11) En qualsevol varietat el tensor de Poisson nul defineix una estructura de Poisson de rang 0.

(5.5.12) Una varietat simplèctica, dotada amb el seu parèntesi de Poisson, és una varietat de Poisson de rang màxim ($= \dim M$). La relació entre les dues estructures ve donada pel fet que $\widehat{\Lambda} = {}^t\widehat{\omega}^{-1}$.
Recíprocament, una varietat de Poisson correspon a una varietat simplèctica si i té rang màxim.

(5.5.13) *Estructura de Lie–Poisson en una àlgebra de Lie*

Sigui $\mathfrak{g}$ una $\mathbf{R}$ -àlgebra de Lie de dimensió finita, $\mathfrak{g}^*$ el seu espai dual dotat de la seva estructura diferenciable canònica, $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ la seva àlgebra de funcions diferenciables. Si $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, la seva derivada $Df(x)$ en un punt $x \in \mathfrak{g}^*$ és una forma lineal en $\mathfrak{g}^*$, o sigui, un element de $\mathfrak{g}^{**} \cong \mathfrak{g}$. D'aquesta manera es defineix un producte de funcions

$$\{f, g\}(x) = \langle x, [Df(x), Dg(x)] \rangle,$$

anomenat **parèntesi de Lie–Poisson** de $\mathfrak{g}^*$.

(5.5.14) *Morfismes de varietats de Poisson*

Siguin M, N varietats de Poisson. Un **morfisme de Poisson** és una aplicació diferenciable $\varphi: M \rightarrow N$ tal que preserva els parèntesis de Poisson respectius:

$$\varphi^* \{g_1, g_2\}_N = \{\varphi^*(g_1), \varphi^*(g_2)\}_M.$$

(5.5.15) *Teorema de descomposició de Weinstein*

Sigui (M, Λ) una varietat de Poisson de dimensió m , $p \in M$ un punt, $2r$ el rang de Λ_p . Existeix una carta local de M centrada en p , amb coordenades $(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_{m-2r})$, tal que, en un veïnat de p ,

$$\Lambda = \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{j < k} f_{jk}(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \wedge \frac{\partial}{\partial z_k},$$

amb f_{jk} funcions tals que $f(0) = 0$.

El primer sumand defineix una estructura simplèctica sobre la subvarietat $z = 0$, mentre que el segon és l'anomenada *estructura de Poisson transversa*.

(5.5.16) *Foliació simplèctica d'una varietat de Poisson*

Sigui (M, Λ) una varietat de Poisson. La distribució tangent $\text{Im } \widehat{\Lambda} \subset TM$ està generada pels camps vectorials hamiltonians i doncs és diferenciable. És integrable, de manera que les seves varietats integrals maximals defineixen una foliació, anomenada **foliació simplèctica** de M . Cada fulla d'aquesta foliació té una estructura simplèctica natural. Dos punts pertanyen a la mateixa fulla sii es poden unir per la juxtaposició d'un nombre finit de corbes integrals de camps vectorials hamiltonians.

6 Càlcul variacional

Llevat de l'última secció, l'objecte d'estudi d'aquest tema són les aplicacions $\gamma: I \rightarrow Q$ que satisfan una condició de punt crític. La variable independent t pren valors en un interval $I \subset \mathbf{R}$, mentre que la variable dependent q els pren en un conjunt obert $Q \subset \mathbf{R}^n$ (o, més generalment, en una varietat diferenciable).

Si l'interval I no és obert, afirmar que $\gamma: I \rightarrow Q$ és de classe C^r significa simplement que és la restricció d'una aplicació de classe C^r definida en un interval obert més gran.

Escriurem $j^r \gamma: I \rightarrow I \times Q \times \mathbf{R}^n \times \dots \times \mathbf{R}^n$ l'aplicació definida per

$$j^r \gamma(t) = (t, \gamma(t), D\gamma(t), \dots, D^r \gamma(t))$$

(*jet* d'ordre r , o r -jet, de γ).

6.1 Functionals i variacions

(6.1.1) Sigui $Q \subset \mathbf{R}^n$ un conjunt obert no buit.

Sigui $W_1 \subset \mathbf{R} \times Q \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times TQ$ un conjunt obert no buit; denotem-ne les variables per (t, q, v) .

Sigui $F: W_1 \rightarrow \mathbf{R}$ una funció de classe C^1 ; s'anomena **funció de Lagrange** o **lagrangiana**.

(6.1.2) Sigui $I = [t_1, t_2] \subset \mathbf{R}$ un interval compacte fixat.

Sigui $\gamma: I \rightarrow Q$ un camí de classe C^1 .

Si, per a tot $t \in I$, $j^1 \gamma(t) = (t, \gamma(t), D\gamma(t)) \in W_1$, llavors està definida la integral

$$\int_I F(t, \gamma(t), D\gamma(t)) dt.$$

(6.1.3) Escrivim

$$\Omega = \{\gamma: I \rightarrow Q \mid \gamma \in C^1, (\forall t \in I) j^1 \gamma(t) \in W_1\}.$$

Definim el **funcional** $S_F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$

$$S_F[\gamma] = \int_I F(t, \gamma(t), D\gamma(t)) dt$$

El conjunt Ω es pot identificar amb un conjunt obert d'un espai de Banach de dimensió infinita.

El terme *funcional* s'usa per a referir-se a una funció definida en un espai de dimensió infinita, usualment format per funcions.

- (6.1.4) Fixem punts $q_1, q_2 \in Q$. Considerem el subconjunt de Ω format pels camins amb origen q_1 i final q_2 :

$$\begin{aligned}\Omega_o &\equiv \Omega(t_1, q_1; t_2, q_2) = \\ &= \{\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow Q \mid \gamma \in C^1, (\forall t) j^1\gamma(t) \in W_1, \gamma(t_1) = q_1, \gamma(t_2) = q_2\}.\end{aligned}$$

El nostre objectiu és estudiar la restricció S_F° de S_F al subespai Ω_o .

- (6.1.5) Per simplicitat, a partir d'ara suposarem que F , i els camins $\gamma \in \Omega$, són de classe C^2 .

- (6.1.6) Sigui $\gamma \in \Omega_o$. Una **variació** (amb extrems fixos) de γ és una aplicació de classe C^2

$$\Gamma: J \times I \rightarrow Q,$$

on J és un interval que conté 0 al seu interior, que compleix les propietats següents:

- $(\forall t \in I) \Gamma(0, t) = \gamma(t),$
- $(\forall \varepsilon \in J) \Gamma(\varepsilon, t_1) = q_1, \Gamma(\varepsilon, t_2) = q_2.$

Posant $\Gamma_\varepsilon(t) = \Gamma(\varepsilon, t)$, aquestes propietats s'escriuen

- $\Gamma_0 = \gamma,$
- $(\forall \varepsilon \in J) \Gamma_\varepsilon \in \Omega_o.$

Podríem dir que $\Gamma_\varepsilon = \Gamma(\varepsilon, \cdot)$ és una família uniparamètrica de camins que deforma γ amb els mateixos extrems fixats.

- (6.1.7) La **variació infinitesimal** definida per Γ és l'aplicació $\mathbf{w}: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ definida per

$$\mathbf{w}(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Gamma(\varepsilon, t).$$

Que Γ tingui els extrems fixats significa que

$$\mathbf{w}(t_1) = 0, \quad \mathbf{w}(t_2) = 0.$$

Geomètricament, $\mathbf{w}$ és un camp vectorial al llarg de γ .

- (6.1.8) Si Γ és una variació de γ , podem interpretar que Γ és un camí $J \rightarrow \Omega_o$, $\varepsilon \mapsto \Gamma_\varepsilon$, que passa pel punt $\gamma \in \Omega_o$ a $\varepsilon = 0$. La seva variació infinitesimal $\mathbf{w}$ s'interpreta com el vector tangent d'aquest camí, $\mathbf{w} \in T_\gamma \Omega_o$.

Anem a veure que la derivada de la funció $J \rightarrow \mathbf{R}$, $\varepsilon \mapsto S_F[\Gamma_\varepsilon]$, a $\varepsilon = 0$, no

depèn més que de la variació infinitesimal $\mathbf{w}$: es pot interpretar com una derivada direccional de S_F° segons el vector $\mathbf{w}$.

6.2 Equació d'Euler–Lagrange

Q , W_1 , F , I , Ω , Ω_o , $\dots$, són com en la secció precedent.

- (6.2.1) Sigui $\gamma: I \rightarrow Q$ un camí de Ω . Sigui $\Gamma: J \times I \rightarrow Q$ una variació de γ , amb extrems no necessàriament fixats, i sigui $\mathbf{w}$ la seva variació infinitesimal. Llavors

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} S_F[\Gamma_\varepsilon] &= \\ &= \int_I \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} (j^1 \gamma(t)) \mathbf{w}^i(t) + \frac{\partial F}{\partial v^i} (j^1 \gamma(t)) D\mathbf{w}^i(t) \right) dt \\ &= \int_I \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} (j^1 \gamma(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial v^i} (j^1 \gamma(t)) \right) \right) \mathbf{w}^i(t) dt + \\ &\quad + \left[\frac{\partial F}{\partial v^i} (j^1 \gamma(t)) \mathbf{w}^i(t) \right]_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}$$

- (6.2.2) Atès que aquesta derivada només depèn de la variació infinitesimal de Γ , és habitual designar-la amb una notació com ara

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} S_F[\Gamma_\varepsilon] = \delta S_F[\gamma; \mathbf{w}].$$

A vegades s'anomena **primera variació** del funcional.

- (6.2.3) Sigui Γ una variació de γ (amb extrems fixats), i sigui $\mathbf{w}$ la seva variació infinitesimal. Llavors

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} S_F[\Gamma_\varepsilon] = \int_I \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial v^i} \right) \right) \mathbf{w}^i dt.$$

on les derivades parcials de l'integrand s'avaluen al llarg de $j^1 \gamma(t)$.

- (6.2.4) Un camí $\gamma \in \Omega_o$ és un **camí crític** de S_F° si, per a tota variació Γ de γ ,

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} S_F[\Gamma_\varepsilon] = 0.$$

- (6.2.5) Sigui $\mathbf{w}: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe C^2 amb $\mathbf{w}(t_1) = 0$ i $\mathbf{w}(t_2) = 0$. Existeix una variació de classe C^2 Γ de γ tal que $\mathbf{w}$ n'és la variació infinitesimal.

Per exemple, $\Gamma(\varepsilon, t) = \gamma(t) + \varepsilon \mathbf{w}(t)$.

(6.2.6) *Lema fonamental del càlcul variacional*

Sigui $\alpha: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ una funció contínua. Suposem que, per a tota aplicació $\mathbf{w}: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe C^∞ i tal que $\mathbf{w}(t_1) = 0$ i $\mathbf{w}(t_2) = 0$, es compleix que $\int_I \alpha(t) \cdot \mathbf{w}(t) dt = 0$. Llavors $\alpha = 0$.

(6.2.7) *Teorema d'Euler*

$\gamma \in \Omega_o$ és un camí crític de S_F° sii satisfà l'**equació d'Euler–Lagrange**

$$\frac{\partial F}{\partial q^i}(t, \gamma(t), D\gamma(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial v^i}(t, \gamma(t), D\gamma(t)) \right) = 0 \quad (i = 1 \dots n).$$

(6.2.8) És remarcable que la condició necessària i suficient per a ser un camí crític de S_F° és la satisfacció d'una equació diferencial on, ni l'interval, ni els extrems del camí, no tenen cap paper. Les solucions de l'equació d'Euler–Lagrange són doncs els camins crítics del funcional S_F restringit a *qualsevol* subespai $\Omega(t_1, q_1; t_2, q_2)$, suposant, és clar, que satisfacin les condicions de contorn que pertoquein.

(6.2.9) Calculant la derivada total amb la regla de la cadena, s'obté que l'expressió detallada de l'equació d'Euler–Lagrange és el sistema de n equacions diferencials de segon ordre

$$\frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial v^i \partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial v^i \partial q^j} D\gamma^j - \frac{\partial^2 F}{\partial v^i \partial v^j} D^2\gamma^j = 0 \quad (i = 1 \dots n),$$

on totes les derivades parcials estan avaluades en $(t, \gamma(t), D\gamma(t))$.

(6.2.10) Sigui $W_2 = W_1 \times \mathbf{R}^n \subset \mathbf{R} \times Q \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, amb coordenades (t, q, v, a) . Considerem la funció vectorial $[F]: W_2 \rightarrow (\mathbf{R}^n)^*$ definida per

$$[F]_i(t, q, v, a) = \frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial v^i} - v^j \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial v^i} - a^j \frac{\partial^2 F}{\partial v^j \partial v^i}.$$

Geomètricament, podem considerar $[F]$ com una 1-forma diferencial al llarg de la projecció $W_2 \rightarrow Q$; s'anomena **operador d'Euler–Lagrange** de F .

(6.2.11) Amb la notació anterior, l'equació d'Euler–Lagrange per a un camí γ es pot expressar

$$[F]_i \circ j^2\gamma = 0 \quad (i = 1 \dots n),$$

on $j^2\gamma(t) = (t, \gamma(t), D\gamma(t), D^2\gamma(t))$.

Geomètricament, $[F] \circ j^2\gamma$ correspon a una 1-forma diferencial al llarg de γ ,

(6.2.12) L'equació d'Euler–Lagrange es pot escriure en forma normal

$$D^2\gamma = Y(t, \gamma, D\gamma)$$

sii la matriu hessiana

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial v^i \partial v^j} \right)$$

és invertible.

En tal cas, fixada una condició inicial (t_o, q_o, v_o) , hi ha una única solució maximal γ tal que $j^1\gamma(t_o) = (t_o, q_o, v_o)$.

Observi's que, tanmateix, el problema de contorn donat per l'equació d'Euler-Lagrange amb les condicions de contorn $\gamma(t_1) = q_1$, $\gamma(t_2) = q_2$ (condicions de contorn de Dirichlet) pot no tenir cap solució, tenir-ne una o diverses, o tenir-ne infinites.

- (6.2.13) Encara que hem suposat diferenciabilitat suficient per a la nostra comoditat, convé notar que hi pot haver mínims γ de S_F° que siguin només de classe C^1 a trossos, o de classe C^2 a trossos. Això està relacionat amb que la hessiana $\partial^2 F / \partial v^i \partial v^j$ no sigui invertible en alguns punts.

6.3 Propietats i exemples

En aquesta secció L denota una funció de Lagrange.

- (6.3.1) Sigui γ un camí de classe C^2 qualsevol. Se satisfà la identitat

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} v^i - L \right) = -[L]_i v^i - \frac{\partial L}{\partial t},$$

on tots els termes s'avaluen al llarg de $j^2\gamma$.

- (6.3.2) Si $\partial L / \partial t = 0$, llavors la funció

$$E = \frac{\partial L}{\partial v^i} v^i - L$$

és constant al llarg de les solucions de l'equació d'Euler-Lagrange de L .

És a dir, si una lagrangiana és autònoma llavors la funció energia E és una constant del moviment.

- (6.3.3) Sigui γ un camí de classe C^2 qualsevol. Se satisfà la identitat

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) = -[L]_i + \frac{\partial L}{\partial q^i},$$

on tots els termes s'avaluen al llarg de $j^2\gamma$.

- (6.3.4) Si $\partial L / \partial q^i = 0$, llavors la funció

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$$

és constant al llarg de les solucions de l'equació d'Euler–Lagrange de L .

És a dir, si una coordenada q^i és cíclica llavors el moment corresponent p_i és una constant del moviment.

6.4 Aplicació: geodèsiques en varietats pseudoriemannianes

En aquesta secció (Q, g) és una varietat pseudoriemanniana.

- (6.4.1) Anomenem **energia cinètica** la funció $T: TQ \rightarrow \mathbf{R}$ definida per

$$T(v) = \frac{1}{2}g(v, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2.$$

Si $I \subset \mathbf{R}$ és un interval compacte, anomenem **funcional energia** el funcional

$$\mathcal{E}[\gamma] = \int_I T \circ \gamma' dt = \frac{1}{2} \int_I \|\gamma'\|^2 dt$$

definit en el conjunt dels camins de classe C^2 $I \rightarrow Q$ amb extrems fixats.

- (6.4.2) Sigui $\gamma: I \rightarrow Q$ un camí de classe C^2 . En una carta natural (q, v) de TQ tenim

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^j} \circ \gamma' \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} \circ \gamma' = g \left(\nabla_t \gamma', \frac{\partial}{\partial q^j} \right).$$

- (6.4.3) Les geodèsiques d'una varietat pseudoriemanniana són els camins crítics del funcional energia.

- (6.4.4) A partir d'ara, per simplicitat, suposem que la mètrica és riemanniana. Considerem la funció

$$L(v) = g(v, v)^{1/2} = \|v\|$$

que és diferenciable en el complementari de la secció nul·la, $TQ - \mathbf{0}_{TQ}$. El **funcional longitud** és doncs

$$\mathcal{L}[\gamma] = \int_I L \circ \gamma' dt = \int_I \|\gamma'\| dt.$$

- (6.4.5) Sigui $\gamma: I \rightarrow Q$ un camí sense punts crítics, $\mathbf{t} = \gamma'/\|\gamma'\|$ el seu vector tangent unitari. Es compleix

$$[L]_i \circ \gamma'' = -g \left(\nabla_t \mathbf{t}, \frac{\partial}{\partial q^i} \right).$$

- (6.4.6) Els camins crítics del funcional longitud són les reparametritzacions de les geodèsiques de g .

6.5 La segona variació

Es reprenen les mateixes dades que a la secció 2: Q , W_1 , F , I , Ω , $\Omega_\circ$, $S: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, ... Suposarem un grau de diferenciabilitat suficient per als càlculs que ho requereixin.

(6.5.1) Sigui $\gamma: I \rightarrow Q$ un camí de Ω . Sigui $\Gamma: J \times I \rightarrow Q$ una variació de γ , amb extrems no necessàriament fixats. Sigui $\mathbf{w}(\cdot) = \partial/\partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}\Gamma(\varepsilon, \cdot)$ la seva variació infinitesimal. Escrivim també $\mathbf{h}(\cdot) = \partial^2/\partial\varepsilon^2|_{\varepsilon=0}\Gamma(\varepsilon, \cdot)$.

(6.5.2) La segona derivada de S al llarg de la variació es pot calcular com

$$\left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} S[\Gamma_\varepsilon] = \mathcal{H}_\gamma[\mathbf{w}] + \delta S[\gamma; \mathbf{h}],$$

on

$$\mathcal{H}_\gamma[\mathbf{w}] = \int_I \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q^j} \Big|_{j^1 \gamma} \mathbf{w}^i \mathbf{w}^j + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial v^j} \Big|_{j^1 \gamma} \mathbf{w}^i D\mathbf{w}^j + \frac{\partial^2 F}{\partial v^i \partial v^j} \Big|_{j^1 \gamma} D\mathbf{w}^i D\mathbf{w}^j \right) dt$$

i, recordem,

$$\delta S[\gamma; \mathbf{h}] = \int_I \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \Big|_{j^1 \gamma} \mathbf{h}^i + \frac{\partial F}{\partial v^i} \Big|_{j^1 \gamma} D\mathbf{h}^i \right) dt.$$

(6.5.3) Si γ és un camí crític de S i la variació té els extrems fixats llavors el darrer terme és nul, de manera que

$$\left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} S[\Gamma_\varepsilon] = \mathcal{H}_\gamma[\mathbf{w}].$$

En aquesta situació la **segona variació** de S en γ només depèn de la variació infinitesimal, i s'escriu $\delta^2 S[\gamma; \mathbf{w}]$.

(6.5.4) Podem considerar $\mathcal{H}_\gamma[\mathbf{w}]$ com un funcional quadràtic definit en l'espai vectorial $\{\mathbf{w}: I \rightarrow \mathbf{R}^n \mid \mathbf{w} \text{ és } C^1, \mathbf{w}(t_1) = 0, \mathbf{w}(t_2) = 0\}$.

La funció de Lagrange corresponent és

$$G_\gamma(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q^j} (j^1 \gamma(t)) \mathbf{y}^i \mathbf{y}^j + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial v^j} (j^1 \gamma(t)) \mathbf{y}^i \mathbf{z}^j + \frac{\partial^2 F}{\partial v^i \partial v^j} (j^1 \gamma(t)) \mathbf{z}^i \mathbf{z}^j.$$

Els punts crítics $\mathbf{w}$ de $\mathcal{H}_\gamma$ s'anomenen **camp de Jacobi** de γ , i són doncs les solucions de l'equació d'Euler–Lagrange definida per G_γ , dita **equació de Jacobi**:

$$[G_\gamma] \circ j^2 \mathbf{w} = 0.$$

Aquesta és una equació diferencial de segon ordre lineal i homogènia per a $\mathbf{w}$.

L'estudi del funcional $\mathcal{H}_\gamma$ és útil a l'hora de determinar si els punts crítics de S són extrems de S .

- (6.5.5) Suposem, per exemple, que S assoleix un mínim en γ . Llavors $\mathcal{H}_\gamma$ ha de ser semidefinit positiu, és a dir, $\mathcal{H}_\gamma[\mathbf{w}] \geq 0$ per a tot $\mathbf{w}$, de manera que $\mathbf{w} = 0$ és un mínim de $\mathcal{H}_\gamma$.

Si $\mathbf{w} = 0$ ha de ser un mínim de $\mathcal{H}_\gamma$, es demostra que la hessiana $\partial^2 F / \partial v \partial v$ ha de ser semidefinida positiva al llarg de γ (condició de Legendre).

Es poden trobar altres condicions necessàries per a tenir un mínim.

- (6.5.6) Dos punts $t_3, t_4 \in [t_1, t_2]$ (o $(t_3, \gamma(t_3)), (t_4, \gamma(t_4))$) es diuen **conjugats** quan hi ha un camp de Jacobi *no idènticament nul* que s'anul·la en ambdós punts.

- (6.5.7) *Teorema de Jacobi*

Suposem F de classe C^3 , γ un camí crític de S de classe C^2 , definit en $[t_1, t_2]$, amb la hessiana $\partial^2 F / \partial v \partial v$ definida positiva al llarg de γ .

Si existeix $t^* < t_2$ punt conjugat de t_1 , llavors γ no pot ser un mínim local de S .

En altres paraules, una solució de l'equació d'Euler–Lagrange no pot ser minimitzant més enllà del primer punt conjugat.

- (6.5.8) Recíprocament, si el funcional $\mathcal{H}_\gamma[\mathbf{w}]$ és definit positiu, llavors S assoleix un mínim local estricte en γ . Hi ha criteris que permeten assegurar que tal condició es compleix, encara que són relativament complicats.

6.6 Altres problemes variacionals

Funcionals amb derivades d'ordre superior

- (6.6.1) Considerem una funció de Lagrange $L: W_k \rightarrow \mathbf{R}$ definida en un conjunt obert $W_k \subset \mathbf{R} \times Q \times \mathbf{R}^d \times \dots \times \mathbf{R}^d$, amb variables $(t, q, q_1, \dots, q_k)$.

Segui $\gamma: I = [t_1, t_2] \rightarrow Q$ un camí de classe C^k tal que, per a tot $t \in I$, $j^k \gamma(t) = (t, \gamma(t), D\gamma(t), \dots, D^k \gamma(t)) \in W_k$. Llavors està definida la integral

$$S[\gamma] = \int_I L(j^k \gamma(t)) dt.$$

- (6.6.2) Es poden considerar variacions

$$\Gamma: J \times I \rightarrow Q$$

de γ :

$$\Gamma_0 = \gamma$$

amb les condicions de contorn següents fixades:

$$\begin{aligned} j^{k-1}\Gamma_\varepsilon(t_1) &= j^{k-1}\gamma(t_1) \equiv (t_1, q^1, q_1^1, \dots, q_{k-1}^1), \\ j^{k-1}\Gamma_\varepsilon(t_2) &= j^{k-1}\gamma(t_2) \equiv (t_2, q^2, q_1^2, \dots, q_{k-1}^2). \end{aligned}$$

(6.6.3) La variació infinitesimal corresponent $\mathbf{w}: I \rightarrow \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{w}(\cdot) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Gamma(\varepsilon, \cdot),$$

satisfà

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t_1) &= 0, \dots, D^{k-1}\mathbf{w}(t_1) = 0, \\ \mathbf{w}(t_2) &= 0, \dots, D^{k-1}\mathbf{w}(t_2) = 0. \end{aligned}$$

(6.6.4) Amb condicions de diferenciabilitat apropiades, es compleix

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} S[\Gamma_\varepsilon] = \int_I [L]_i \mathbf{w}^i dt,$$

on

$$[L]_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1^i} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_2^i} \right) - \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k^i} \right)$$

per a $i = 1 \dots n$, i totes les derivades parcials estan avaluades al llarg de $j^k\gamma$.

(6.6.5) γ és un camí crític del funcional S amb condicions de contorn fixades sii satisfà l'**equació d'Euler-Lagrange**

$$[L]_i \circ j^{2k}\gamma = 0 \quad (i = 1 \dots n).$$

(6.6.6) L'equació anterior és un sistema de n equacions diferencials d'ordre $2k$. Es pot escriure en forma normal sii la matriu hessiana

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_k^i \partial q_k^j} \right)$$

de L respecte a les derivades d'ordre més alt és invertible.

Functionals amb diverses variables independents

(6.6.7) Siguin $U \subset \mathbf{R}^m$ un conjunt obert, $V \subset \mathbf{R}^n$ un altre conjunt obert, i $W_1 = U \times V \times \mathbf{R}^{mn}$, amb coordenades (x^μ, u^i, u_μ^i) . Considerem una funció de Lagrange $L: W_1 \rightarrow \mathbf{R}$ contínua.

Per a una aplicació $\gamma: I \rightarrow V$ de classe C^1 , definida en un subconjunt compacte $I \subset U$, està definida la integral

$$S[\gamma] = \int_I L(j^1\gamma(x)) \, dx^1 \dots dx^m,$$

on $j^1\gamma(x) = (x^\mu, \gamma^i(x), D_\mu \gamma^i(x))$.

(6.6.8) Suposem que I és un rectangle, $I = [x_1^1, x_2^1] \times \dots \times [x_1^m, x_2^m]$. Considerem una variació $\Gamma: J \times I \rightarrow V$ de γ : escrivint com abans $\Gamma_\varepsilon = \Gamma(\varepsilon, \cdot)$, tenim $\Gamma_0 = \gamma$. Se suposa que la variació és amb valors fixats sobre la frontera $\text{Fr}(I)$:

$$\Gamma_\varepsilon|_{\text{Fr}(I)} = \gamma|_{\text{Fr}(I)}.$$

(6.6.9) La variació infinitesimal corresponent $\mathbf{w}: I \rightarrow \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{w}(\cdot) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Gamma(\varepsilon, \cdot),$$

satisfà

$$\mathbf{w}|_{\text{Fr}(I)} = 0.$$

(6.6.10) Amb condicions de diferenciabilitat apropiades, es compleix

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} S[\Gamma_\varepsilon] = \int_I [L]_i \mathbf{w}^i \, dx^1 \dots dx^m,$$

on

$$[L]_i = \frac{\partial L}{\partial u^i} - \sum_\mu \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial u_\mu^i} \right)$$

per a $i = 1 \dots n$, i totes les derivades parcials estan avaluades al llarg de $j^1\gamma$.

L'expressió $\frac{d}{dx^\mu} f(x, \gamma(x), D\gamma(x))$ («derivada total») significa la derivada parcial de la funció composta:

$$\frac{d}{dx^\mu} f(x, \gamma(x), D\gamma(x)) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{\partial f}{\partial u^j} D_\mu \gamma^j + \frac{\partial f}{\partial u_\nu^j} D_\mu D_\nu \gamma^j.$$

(6.6.11) γ és una funció crítica del funcional S amb condicions de contorn fixades sii satisfà l'**equació d'Euler-Lagrange**

$$[L]_i \circ j^2\gamma = 0 \quad (i = 1 \dots n),$$

que és un sistema de n equacions en derivades parcials de segon ordre.

Altres

(6.6.12) Hi ha nombrosos altres problemes de tipus variacional, com ara:

- les variables q poden estar sotmeses a lligams
- les variables (q, v) poden estar sotmeses a lligams
- els lligams anteriors poden ser dependents de la variable independent (o de les diverses variables independents)
- les funcions γ poden estar sotmeses a lligams no locals (per exemple, de tipus integral)
- els valors a la frontera poden no estar fixats, sinó lliures, o podent variar en una subvarietat
- hi pot haver lligams unilaterals (definites per desigualtats $\leq$)
- hi pot haver derivades d'ordre superior respecte a diverses variables independents

7 Fonaments de la mecànica

El llibre de la natura està escrit en llenguatge matemàtic.

Usem models matemàtics per a descriure fenòmens físics. Com que les afirmacions matemàtiques són exactes i el nostre coneixement no ho pot ser, descrivim la natura amb formulacions matemàtiques axiomàtiques, les quals caldrà corregir quan la descripció que donin de la física no sigui prou acurada. Al seu torn, quan parlem de física el llenguatge és forçosament imprecís; rarament farem ús d'aquest llenguatge, però és gairebé indispensable per a situar el nostre objecte d'estudi.

7.1 Principis bàsics

- (7.1.1) Hi ha el *temps*, unidimensional, homogeni; la mesura que en donen dos rellotges difereix en una afinitat. També hi ha l'*espai*, tridimensional, homogeni, isotrop. Plegats formen l'*espaitemps*.

Un *sistema de referència* permet etiquetar els punts de l'espaitemps mitjançant coordenades $(t, \mathbf{r}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$. El *moviment* d'un *punt material* o *partícula* es descriu en un sistema de referència mitjançant funcions de la forma $t \mapsto \mathbf{r}(t)$.

- (7.1.2) *Principi de relativitat de Galileu* (Galileo Galilei, 1632)

Existeixen *sistemes de referència inercials*. Es caracteritzen per les propietats següents:

- Totes les *lleis de la natura* s'expressen igualment en qualsevol sistema de referència inercial.
- Un sistema de referència en *moviment rectilini uniforme* respecte a un sistema de referència inercial també és inercial.

- (7.1.3) *Principi de determinació de Newton* (Isaac Newton, 1687)

El moviment d'un *sistema mecànic* ve determinat per la posició i la velocitat de les seves partícules en un determinat instant de temps.

7.2 L'espaitemps galileà

- (7.2.1) Un *espaitemps galileà* és una terna (A, τ, g) on:

- A és un espai afí de dimensió 4, l'*espaitemps*.

- $\tau: \vec{A} \rightarrow \mathbf{R}$ és una forma lineal no nul·la, l'**interval de temps**, definida en l'espai vectorial $\vec{A}$ de les translacions de A .
- g és un producte escalar en l'espai vectorial $\text{Ker } \tau \subset \vec{A}$.

(7.2.2) Els punts de A es diuen **esdeveniments**.

Si $a, b \in A$ són dos esdeveniments, el seu interval de temps és el nombre $\tau(b - a) \in \mathbf{R}$. Dos esdeveniments es diuen **simultanis** quan el seu interval de temps és zero.

(7.2.3) $\text{Ker } \tau \subset \vec{A}$ és un hiperplà vectorial, els elements del qual s'anomenen **translacions espacials**. Amb el producte escalar g és un espai euclidià, i està dotat de la norma euclidiana corresponent. La distància entre dos esdeveniments **simultanis** a, b és el nombre $\|b - a\| = g(b - a, b - a)^{1/2}$.

Notem que *no té sentit parlar* de distància entre dos esdeveniments no simultanis, ni tampoc de dos esdeveniments que ocorren en el mateix lloc a temps diferents.

(7.2.4) La relació de simultaneïtat és una relació d'equivalència en A . Les classes d'equivalència són els hiperplans afins $a + \text{Ker } \tau \subset A$ (conjunt d'esdeveniments simultanis amb a).

El conjunt quocient per la relació de simultaneïtat és un espai afí T de dimensió 1, dit espai dels **instants**. T està modelat en $\vec{A}/\text{Ker } \tau \cong \mathbf{R}$.

L'espai dels instants té doncs una orientació canònica (cap al futur): un instant s *precedeix* un instant t si $t - s > 0$. De manera semblant, un esdeveniment a precedeix un esdeveniment b si $\tau(b - a) > 0$.

(7.2.5) Tal com l'hem definida, l'estructura d'espai temps galileà inclou una unitat de mesura del temps i una unitat de mesura de la llargada. Es poden fer formulacions axiomàtiques més complicades que no fixin aquestes unitats.

7.3 El grup de Galileu

(7.3.1) De la manera habitual es pot definir el concepte de **morfisme** d'espai temps galileans com una aplicació que en preserva l'estructura: una aplicació afí que preserva l'interval de temps i la distància entre esdeveniments simultanis. Anàlogament es defineix el concepte d'**ismorfisme** d'espai temps galileans.

(7.3.2) El **grup de Galileu** d'un espaitemps galileà (A, τ, g) és el conjunt dels seus automorfismes.

(7.3.3) L'**espai coordinat galileà** és la terna (A, τ, g) donada per

- $A = \mathbf{R}^4 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$,
- $\tau = \text{pr}_1$, o sigui $\tau(u^0, \mathbf{u}) = u^0$,
- g és el producte escalar estàndard de $\mathbf{R}^3 \cong \{0\} \times \mathbf{R}^3 = \text{Ker } \tau$.

(7.3.4) Tota transformació de Galileu de $\mathbf{R}^4$ s'escriu de forma única com a composició de:

- una rotació espacial (incloent reflexions)
 $(x^0, \mathbf{x}) \mapsto (x^0, U\mathbf{x})$, on $U \in \text{O}(3, \mathbf{R})$;
- una **empenta galileana**⁴
 $(x^0, \mathbf{x}) \mapsto (x^0, \mathbf{x} + x^0 \mathbf{u})$, on $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$;
- una translació espaciotemporal
 $(x^0, \mathbf{x}) \mapsto (x^0 + a^0, \mathbf{x} + \mathbf{a})$, on $(a^0, \mathbf{a}) \in \mathbf{R}^4$.

Expressem la transformació resultant com

$$g(a^0, \mathbf{a}, \mathbf{u}, U)(x^0, \mathbf{x}) = (x^0 + a^0, U\mathbf{x} + x^0 \mathbf{u} + \mathbf{a}).$$

(7.3.5) L'estructura axiomàtica de l'espaitemps podria ser lleugerament diferent, i això comportaria un grup de simetria diferent. Per exemple, si demanem que l'espai de les translacions espacials sigui orientat, llavors en lloc de $\text{O}(3, \mathbf{R})$ apareix el grup ortogonal especial $\text{SO}(3, \mathbf{R})$.

(7.3.6) El grup de Galileu Gal_4 de $\mathbf{R}^4$ és un grup de Lie de dimensió 10 difeomorf a $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^3 \times \text{O}(3, \mathbf{R})$.

Amb aquesta identificació les operacions de grup són

$$\begin{aligned} (a^0, \mathbf{a}, \mathbf{u}, U) \cdot (b^0, \mathbf{b}, \mathbf{v}, V) &= (a^0 + b^0, \mathbf{a} + \mathbf{u}b^0 + U\mathbf{b}, \mathbf{u} + U\mathbf{v}, UV), \\ (b^0, \mathbf{b}, \mathbf{v}, V)^{-1} &= (-b^0, V^{-1}\mathbf{v}b^0 - V^{-1}\mathbf{b}, -V^{-1}\mathbf{v}, V^{-1}). \end{aligned}$$

(7.3.7) Tots els espaitemps galileans són isomorfs.

I doncs tots els grups de Galileu (en dimensió 4) són isomorfs.

⁴*Empenta* és una possible traducció per a *boost* (terme manllevat al seu torn de la relativitat einsteiniana). Les *empentes galileanes* també s'anomenen *transformacions especials de Galileu*. Geomètricament, una d'aquestes transformacions és una *transvecció* de l'espaitemps. Físicament, és un *moviment uniforme* del sistema de referència.

- (7.3.8) Un isomorfisme $A \cong \mathbf{R}^4$ s'anomena **sistema coordinat galileà**, o també **sistema de referència galileà**.

El canvi de coordenades entre dos tals sistemes és precisament una transformació de Galileu.

7.4 Cinemàtica

- (7.4.1) Sigui A un espai temps galileà, $C \subset A$ una corba connexa de classe C^1 . C es diu **línia d'univers** si en tot punt $x \in C$ l'espai tangent $T_x C \subset T_x A \cong \vec{A}$ és transversal a l'espai de translacions espacials.

Intuïtivament, una línia d'univers pot representar el conjunt d'esdeveniments que constitueixen la història d'una partícula o punt material.

- (7.4.2) C és una línia d'univers sii, en algun sistema coordinat galileà, C és el graf d'un camí $\gamma: J \rightarrow \mathbf{R}^3$.

Aquesta propietat no depèn del sistema coordinat galileà triat.

- (7.4.3) Una línia d'univers té una orientació canònica, cap al futur.

- (7.4.4) A partir d'ara abandonem la formulació geomètrica de l'espai temps galileà i treballarem en sistemes coordinats galileans, en el benentès que per a cada noció considerada caldria analitzar com es transforma sota un canvi de sistema coordinat galileà.

- (7.4.5) Considerem una partícula descrita per una línia d'univers C . En un sistema coordinat galileà és el graf d'un camí $\gamma: J \rightarrow \mathbf{R}^3$, a vegades anomenat *moviment* o *trajectòria dinàmica*. La **velocitat** de la partícula a l'instant t és la derivada $\dot{\gamma}(t) \equiv D\gamma(t) \in \mathbf{R}^3$.

- (7.4.6) Sota una transformació de Galileu de la forma $(x^0, \mathbf{x}) \mapsto (x^0, \mathbf{x} + x^0 \mathbf{u} + \mathbf{a})$ la velocitat d'una partícula es transforma com

$$\mathbf{v}' = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

(*lleis d'addició de les velocitats*).

- (7.4.7) De manera similar es defineix l'**acceleració** d'una partícula (respecte a un sistema coordinat galileà) com $\ddot{\gamma}(t) \equiv D^2\gamma(t) \in \mathbf{R}^3$.

- (7.4.8) Un **sistema de N partícules** ve donat per N línies d'univers en l'espai temps. En un sistema coordinat galileà s'expressa doncs com el graf d'una

aplicació $\mathbf{x}: I \rightarrow \mathbf{R}^n$, amb $n = 3N$.

Es diu que el sistema té n graus de llibertat.

7.5 Dinàmica

- (7.5.1) Segons el principi de determinació de Newton el moviment $\mathbf{x}(t)$ d'un sistema de partícules, i en particular la seva acceleració en qualsevol instant, vénen determinats pels valors de la posició i velocitat en un instant donat arbitrari, $(t_o, \mathbf{x}(t_o), \dot{\mathbf{x}}(t_o))$. Per tant, existeix una aplicació $\mathbf{f}: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ tal que $\mathbf{x}(t)$ satisfà l'*equació de Newton*

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}).$$

Aquesta funció $\mathbf{f}$ representa les «forces» que actuen sobre el sistema, en absència de les quals aquest romandria en repòs o en moviment rectilini uniforme (respecte a un sistema coordinat galileà).

- (7.5.2) Recíprocament, coneguda la funció $\mathbf{f}$ i donades unes condicions inicials $(t_o, \mathbf{x}_o, \dot{\mathbf{x}}_o)$, el teorema d'existència i unicitat de les solucions d'una equació diferencial permet determinar el moviment $\mathbf{x}(t)$ (basta $\mathbf{f}$ contínua, i contínuament diferenciable respecte a $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, en un conjunt obert de $\mathbf{R}^{1+2n}$).

- (7.5.3) El principi de relativitat de Galileu significa que, si s'aplica una transformació de Galileu a les línies d'univers determinades *per una llei de la natura*, les corbes resultants també són línies d'univers del sistema. En termes de l'equació de Newton, això significa que les transformacions de Galileu apliquen solucions en solucions, i això imposa restriccions sobre la forma que pot tenir $\mathbf{f}$.

Aquesta invariància implica que $\mathbf{f}$ no pot dependre de t , només depèn de les diferències de posicions i de velocitats, $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ i $\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j$, de les partícules del sistema, i a més ha de ser invariant per rotacions, en el sentit que $\mathbf{f}(U\mathbf{x}, U\dot{\mathbf{x}}) = U\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ per a $U \in O(3, \mathbf{R})$; aquí escrivim $U\mathbf{x} = (U\mathbf{x}_1, \dots, U\mathbf{x}_N)$.

- (7.5.4) *Primera llei de Newton*

Una partícula lliure es mou a velocitat constant en qualsevol sistema de referència inercial (o sigui, la seva línia d'univers és una recta).

- (7.5.5) Cada partícula té associat un nombre $m > 0$ anomenat *massa*. En un sistema de N partícules sotmeses a forces «de la mateixa naturalesa», la

component i -èsima $\mathbf{f}_i$ de $\mathbf{f}$ és inversament proporcional a la massa m_i de la partícula. La funció $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{f}_i$ és la **força** que actua sobre la partícula i -èsima.

(7.5.6) *Segona llei de Newton*

Amb aquestes notacions, l'equació de Newton s'escriu així:

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i \quad (i = 1 \dots N).$$

El producte de la massa per la velocitat s'anomena **moment lineal**:

$$\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{x}}_i.$$

Així, l'equació de Newton també s'escriu $\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i$ ($i = 1 \dots N$).

7.6 Sistema de partícules a l'espai

En aquest apartat es considera un sistema de N partícules de masses m_i , amb posicions $\mathbf{r}_i \in \mathbf{R}^3$, movent-se d'acord amb l'equació de Newton $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N)$.

(7.6.1) Supposem que les forces es poden descompondre en

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{K}_i,$$

on hi ha les **forces d'interacció** $\mathbf{F}_{ij}$ (força que exerceix la partícula j -èsima sobre la partícula i -èsima) i les **forces externes** $\mathbf{K}_i$.

Si les forces externes són nul·les el sistema es diu **tancat**.

(7.6.2) *Tercera llei de Newton*

El **principi d'acció i reacció** en versió *feble* és la hipòtesi que les forces d'interacció satisfan

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}.$$

La versió *forta* del principi exigeix, a més, que $\mathbf{F}_{ij} \propto \mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$.

(7.6.3) Per a un sistema de N partícules es defineixen les funcions següents:

- **centre de massa**: $\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$;
- **moment lineal total**: $\mathbf{P} = \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i$;
- **moment angular total**: $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times (m_i \dot{\mathbf{r}}_i)$.

Es compleix $\mathbf{P} = M \dot{\mathbf{R}}$, essent $M = \sum m_i$ la **massa total**.

- (7.6.4) Suposem que les forces d'interacció satisfan el principi d'acció i reacció feble. Llavors, al llarg d'una trajectòria dinàmica,

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{K}_i.$$

Si el sistema és tancat, el centre de massa es mou en moviment rectilini uniforme, i el moment lineal total és una constant del moviment⁵.

- (7.6.5) Suposem que les forces d'interacció satisfan el principi d'acció i reacció fort. Llavors, al llarg d'una trajectòria dinàmica,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{K}_i.$$

Si el sistema és tancat, el moment angular total és una constant del moviment.

- (7.6.6) L'*energia cinètica* és la quantitat

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2.$$

- (7.6.7) Es diu que $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ és una *força conservativa*⁶ si és de la forma

$$\mathbf{F} = -\nabla U,$$

per a certa funció $U(\mathbf{r})$ anomenada *energia potencial*.

Si el domini de U és connex, U està determinada llevat d'una constant additiva.

En aquesta expressió ∇ denota l'operador gradient en l'espai euclidià $\mathbf{R}^n$.

Per a un sistema de N partícules en $\mathbf{R}^3$ podem escriure $\nabla = (\nabla_1, \dots, \nabla_N)$, essent ∇_i l'operador gradient en la i -èsima còpia de $\mathbf{R}^3$, de manera que $\mathbf{F}_i = -\nabla_i U$.

- (7.6.8) El *treball* realitzat per la força $\mathbf{F}$ al llarg d'un camí $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ és la integral de línia $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$.

- (7.6.9) Considerem una força de la forma $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Llavors $\mathbf{F}$ és conservativa sii el treball realitzat per la força al llarg de qualsevol camí només depèn dels punts inicial i final del camí.

- (7.6.10) Un sistema es diu *conservatiu* quan la força és conservativa. En tal cas s'anomena *energia total* la suma de les energies cinètica i potencial,

$$E = T + U.$$

⁵És a dir, és constant al llarg de les trajectòries dinàmiques; vegeu apèndix.

⁶Probablement seria més correcte dir-ne *força conservadora*.

(7.6.11) Al llarg d'una trajectòria dinàmica es compleix

$$\frac{dT}{dt} = (\mathbf{F}|\dot{\mathbf{r}}).$$

Si la força és conservativa l'energia total és una constant del moviment.

(7.6.12) Una força es diu **força central** si és de la forma

$$\mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

on $r = \|\mathbf{r}\|$ és la distància a l'origen i $\mathbf{r}/r$ és el vector radial unitari.

(7.6.13) Una força central és conservativa, amb energia potencial només dependent de r .

L'energia potencial corresponent a $\mathbf{F}$ és $U(r) = - \int_{r_0}^r f(\rho) d\rho$.

(7.6.14) Considerem un sistema de partícules amb forces d'interacció centrals: $\mathbf{F}_{ij} = f_{ij}(r_{ij})\mathbf{e}_{ij}$, on $r_{ij} = \|\mathbf{r}_{ij}\|$ i $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{r}_{ij}/r_{ij}$. Suposem també que aquestes forces satisfan el principi d'acció i reacció, la qual cosa equival a afirmar que les funcions f_{ij} satisfan la condició de simetria $f_{ij} = f_{ji}$.

(7.6.15) Amb les hipòtesis citades, les forces d'interacció són conservatives: $\mathbf{F}_{ij} = -\nabla_i U_{ij}$, i l'energia potencial del sistema té la forma $U = \sum_{i>j} U_{ij}(r_{ij})$.

(7.6.16) Si el sistema és tancat i les forces d'interacció són conservatives i satisfan el principi d'acció i reacció aleshores hi ha 10 quantitats conservades:

- $\mathbf{P}$,
- $\mathbf{R} - \frac{\mathbf{P}t}{M} = \mathbf{R}(0)$,
- $E = T + U = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + T_{\text{rel}} + U$,
- $\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \boldsymbol{\ell}_{\text{rel}}$.

Aquestes quantitats es corresponen amb els 10 generadors infinitesimals del grup de Galileu (translacions espacials, empentes, translació temporal i rotacions, respectivament) via el *teorema de Noether*.

L'existència d'un gran nombre de quantitats conservades facilita la integració de les equacions del moviment.

7.7 El problema dels dos cossos

(7.7.1) Considerem dues partícules de masses m_1, m_2 movent-se a $\mathbf{R}^3$ amb posicions $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ i sotmeses a forces d'interacció $m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12}, m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21}$,

tals que $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ (lleis d'acció i reacció), i de la forma $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, on $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ és la **posició relativa**.

(7.7.2) Denotant també per $\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$ la posició del centre de massa tenim un canvi de coordenades $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mapsto (\mathbf{R}, \mathbf{r})$, amb

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}.$$

En aquestes coordenades les equacions de Newton s'escriuen

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0, \quad \mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}),$$

on μ és la **massa reduïda**, $\mu = 1/(1/m_1 + 1/m_2)$.

Notem que si $m_1 \ll m_2$ llavors $\mu = m_1 \left(1 + O\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\right)$, $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 + O\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$.

(7.7.3) La hipòtesi sobre les forces remet la integració del problema inicial de sis graus de llibertat a un problema de tres graus de llibertat. Amb hipòtesis addicionals es reduirà aquest problema a un problema amb menys graus de llibertat.

(7.7.4) Si la força d'interacció és central $\mathbf{F} = -\nabla U(r)$, on U és una funció energia potencial i $r = \|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|$. D'aquesta manera l'evolució de la posició relativa és equivalent a la de l'evolució d'una partícula de massa μ sotmesa a una força central de potencial U , $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(r)$.

(7.7.5) Per a aquest problema el «moment lineal» $\mathbf{p} = \mu\dot{\mathbf{r}}$ no es conserva, però sí que ho fan el «moment angular» $\boldsymbol{\ell}_{\text{rel}} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ i l'«energia total» $E_{\text{rel}} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + U$.

A partir d'ara eliminem el subíndex «rel».

El moviment té lloc en el pla ortogonal a $\boldsymbol{\ell}$. Introduint-hi coordenades polars

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

s'obté $\ell = \|\boldsymbol{\ell}\| = \mu r^2 \dot{\phi}$, $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U(r)$.

Fixat el valor de ℓ , tenim l'**energia potencial efectiva** $U_{\text{ef}}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U(r)$.

Obtenim

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{ef}}(r))}, \quad \dot{\phi} = \frac{\ell}{\mu r^2}.$$

(7.7.6) El moviment radial d'una partícula en un camp central d'energia potencial U , amb energia total E i moment angular ℓ , és el moviment corresponent

a un problema unidimensional amb energia potencial U_{ef} i energia total E .

(7.7.7) L'equació de les òrbites en coordenades polars és

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{r^2 \sqrt{2\mu(E - U_{\text{ef}}(r))}}{\ell}.$$

(7.7.8) *Teorema de Bertrand*

Els únics camps centrals a $\mathbf{R}^3$ que posseeixen òrbites fitades i aquestes són «tancades» són:

- l'oscil·lador harmònic, $U = \frac{1}{2}kr^2$ ($k > 0$);
- el problema de Kepler atractiu, $U = -\frac{k}{r}$ ($k > 0$).

8 Mecànica en una varietat riemanniana

Totes les aplicacions considerades són diferenciables. La variable $t \in \mathbf{R}$ s'anomena *temps* ja que s'identifica al temps físic.

8.1 L'equació de Newton

En aquest apartat (M, g) és una varietat riemanniana, dotada de la seva connexió de Levi-Civita i la corresponent derivació covariant ∇ . La mètrica g defineix l'isomorfisme musical $\hat{g}: TM \rightarrow T^*M$.

(8.1.1) Un **sistema dinàmic newtonià** és una terna $(M, g, \mathcal{F})$ on

- M és una varietat diferenciable, dita **espai de configuracions**;
- g és una mètrica riemanniana en M , la **mètrica de l'energia cinètica**;
- $\mathcal{F}: M \rightarrow T^*M$ és 1-forma diferencial en M , anomenada **força**.

Mitjançant l'isomorfisme musical la força es pot descriure equivalentment per un camp vectorial F en M tal que

$$\mathcal{F} = \hat{g} \circ F.$$

(8.1.2) Sigui $\gamma: I \rightarrow M$ un camí en M . La seva velocitat $\gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$ és un camp vectorial al llarg de γ , per tant és equivalent a una 1-forma diferencial al llarg de γ que denotarem per $p_\gamma \in \Omega^1(\gamma)$:

$$p_\gamma = (\gamma')^\flat = \hat{g} \circ \gamma'.$$

És el **moment** associat a γ .

(8.1.3) L'**equació de Newton** per a un camí γ és

$$\nabla_t p_\gamma = \mathcal{F} \circ \gamma,$$

o, equivalentment,

$$\nabla_t \gamma' = F \circ \gamma.$$

Anomenem **trajectòries dinàmiques** les seves solucions.

(8.1.4) Si la força és nul·la llavors les trajectòries dinàmiques són les geodèsiques de g , i el moment es trasllada paral·lelament al llarg de γ .

(8.1.5) *Expressió coordinada*

Considerem coordenades (x^i) en M , i expressem $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$; siguin Γ_{ij}^k els corresponents símbols de Christoffel.

Si γ s'expressa $x^i(t)$, llavors γ' té components $\dot{x}^i(t)$ i p_γ té components $g_{ij}(x)\dot{x}^j$. Expressem també $\mathcal{F} = F_i dx^i$, de manera que $F = F^i \partial/\partial x^i$, amb $F_i = g_{ij}F^j$.

Llavors l'equació de Newton s'expressa

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k(x)\dot{x}^i\dot{x}^j = F^k(x)$$

o també

$$\dot{p}_j - \Gamma_{ij}^k(x)\dot{x}^i p_k = F_j(x).$$

- (8.1.6) El **treball** de la força $\mathcal{F}$ al llarg d'un desplaçament arbitrari $\gamma: I \rightarrow M$ és la integral de línia de $\mathcal{F}$ al llarg de γ :

$$\int_I \gamma^*(\mathcal{F}) = \int_I \langle \mathcal{F} \circ \gamma, \gamma' \rangle dt.$$

- (8.1.7) L'**energia cinètica** és la funció $T: TM \rightarrow \mathbf{R}$ definida per

$$T(v) = \frac{1}{2}g(v, v).$$

- (8.1.8) La variació de l'energia cinètica al llarg d'una trajectòria dinàmica és el treball efectuat per la força al llarg de la mateixa.

8.2 Forces conservatives

En aquest apartat $(M, g, \mathcal{F})$ és un sistema dinàmic newtonià.

- (8.2.1) Un sistema dinàmic newtonià és **conservatiu** si la força és una 1-forma diferencial exacta:

$$\mathcal{F} = -dV,$$

on $V: M \rightarrow \mathbf{R}$ és una funció anomenada **energia potencial**. En una varietat connexa V està determinada llevat d'una constant.

La relació corresponent entre F i V és doncs

$$F = -\text{grad } V.$$

- (8.2.2) Una condició necessària perquè la força sigui conservativa és que $\mathcal{F}$ sigui tancada, $d\mathcal{F} = 0$. Aquesta condició és suficient quan $H_{\text{dR}}^1(M) = 0$ (per exemple, si M és simplement connexa).

- (8.2.3) Si el sistema és conservatiu amb energia potencial V , es defineix la funció **energia** (total, o mecànica) $E: TM \rightarrow \mathbf{R}$ per

$$E = T + V;$$

en aquesta expressió s'interpreta, fent un abús de notació, V com una funció en TM .

(8.2.4) Sigui γ un camí qualsevol.

$$\frac{d}{dt}(E \circ \gamma') = g(\nabla_t \gamma' - F \circ \gamma, \gamma').$$

(8.2.5) *Teorema de conservació de l'energia*

En un sistema conservatiu l'energia és una quantitat conservada⁷.

(8.2.6) Un punt $p \in M$ es diu **punt d'equilibri** del sistema newtonià quan el camí constant igual a p és una solució de l'equació de Newton. Això equival a afirmar que p és un punt crític del camp vectorial F , i, en el cas conservatiu, que p és un punt crític de la funció V .

8.3 Forces dependents de la velocitat i del temps

(8.3.1) La definició de sistema dinàmic newtonià es pot generalitzar fàcilment per a considerar forces dependents de la velocitat, del temps, o d'ambdós. Només cal incloure aquesta dependència addicional dins la força.

(8.3.2) Sigui $\tau: TM \rightarrow M$ la projecció natural.

La dependència en la velocitat s'obté considerant que la força, en lloc de ser una 1-forma diferencial o camp vectorial en M , és una 1-forma diferencial o camp vectorial al llarg de τ : $\mathcal{F} \in \Omega^1(\tau)$ o $F \in \mathfrak{X}(\tau)$.

D'aquesta manera l'equació de Newton es pot escriure $\nabla_t p_\gamma = \mathcal{F} \circ \gamma'$ o $\nabla_t \gamma' = F \circ \gamma'$.

(8.3.3) La dependència en el temps s'obté considerant que la força és una 1-forma diferencial o camp vectorial al llarg de la projecció $\mathbf{R} \times M \rightarrow M$.

(8.3.4) La dependència en la velocitat i el temps s'obté considerant que la força és una 1-forma diferencial o camp vectorial al llarg de la projecció $\mathbf{R} \times TM \rightarrow M$.

En aquest cas l'equació de Newton es pot escriure $\nabla_t p_\gamma = \mathcal{F}(t, \gamma'(t))$ o $\nabla_t \gamma' = F(t, \gamma'(t))$.

⁷És a dir, és constant al llarg de les trajectòries dinàmiques; vegeu apèndix.

8.4 Sistemes amb lligams. Principi de d'Alembert

(8.4.1) Sigui $(M, g, \mathcal{F})$ un sistema dinàmic newtonià. Sovint es planteja la situació de que hi ha una força suplementària $\mathcal{R}$, que depèn de l'estat del sistema, i que fa que aquest evolucioni dins una subvarietat $S \subset M$. Una hipòtesi simple sobre $\mathcal{R}$ permet determinar fàcilment el moviment.

(8.4.2) Un *sistema dinàmic newtonià amb lligams holònoms* està definit per

- un sistema dinàmic newtonià $(M, g, \mathcal{F})$;
- una subvarietat $S \xrightarrow{j} M$: **subvarietat de lligams** (holònoms);
- l'assignació, a cada camí $\gamma: I \rightarrow M$ contingut en S , d'una 1-forma diferencial $\mathcal{R} \in \Omega^1(\gamma)$: **força de lligam**.

La força de lligam es pot definir equivalentment per $R \in \mathfrak{X}(\gamma)$, amb $\mathcal{R} = \hat{g} \circ R$.

La força a què és sotmès el sistema és doncs $\mathcal{F} \circ \gamma + \mathcal{R}$.

(8.4.3) La força de lligam es diu **ideal** quan satisfà el **principi de d'Alembert**: la força de lligam és ortogonal a la subvarietat:

$$j^*(\mathcal{R}) = 0,$$

on usem la projecció ${}^tT_p j: T_{j(p)}^* M \rightarrow T_p^* S$ per a definir una mena de pull-back $j^*(\mathcal{R}) \in \Omega^1(\gamma_\circ)$:

$$j^*(\mathcal{R})(t) = {}^tT_{\gamma_\circ(t)} j \cdot \mathcal{R}(\gamma(t)),$$

amb $\gamma = j \circ \gamma_\circ$.

Que el lligam sigui ideal també s'expressa dient que el treball realitzat per $\mathcal{R}$ al llarg de qualsevol camí en S és nul.

També equival a afirmar que, per a tota t , $R(\gamma(t))$ és ortogonal a S (o sigui, a $T_{\gamma_\circ(t)} S$), ja que $j^*(\mathcal{R})(t) = g(R(t), \cdot)$, on els dos membres s'apliquen a vectors de $T_{\gamma_\circ(t)} S$.

(8.4.4) La dinàmica d'un sistema newtonià amb lligams ideals ve regida pels principis següents:

- γ és dins S ,
- $\nabla_t \gamma' = F \circ \gamma + R$,
- la força de lligam és ideal.

Les incògnites són les trajectòries dinàmiques γ i les forces de lligam corresponents $\mathcal{R}$.

- (8.4.5) La formulació donada pot generalitzar-se. D'una banda, la força $\mathcal{F}$ pot dependre del temps i la velocitat. D'altra banda, els lligams poden dependre del temps (**lligams reònoms**), o dependre de la velocitat (**lligams no holònoms**); en aquest cas hi ha un principi similar al de d'Alembert que regeix el moviment.
- (8.4.6) Sigui $(M, g, \mathcal{F})$ un sistema dinàmic newtonià, $S \subset M$ una subvarietat. El pull-back per la inclusió $j: S \hookrightarrow M$ defineix una mètrica riemanniana $g^S = j^*(g)$ i una 1-forma diferencial $\mathcal{F}^S = j^*(\mathcal{F})$ en S . S'obté així el **sistema dinàmic newtonià induït** sobre S : $(S, g^S, \mathcal{F}^S)$.
Si el sistema original és conservatiu amb $\mathcal{F} = -dV$ llavors el sistema induït també ho és, amb $\mathcal{F}^S = -dV^S$, essent l'energia potencial $V^S = j^*(V)$ (restricció de V a S).
- (8.4.7) La dinàmica obtinguda d'un sistema newtonià $(M, g, \mathcal{F})$ pel principi de d'Alembert sobre una subvarietat de lligams holònoms $S \subset M$ coincideix amb la dinàmica del sistema newtonià induït $(S, g^S, \mathcal{F}^S)$.
La força de lligam és el component normal de $\nabla_t \gamma' - F \circ \gamma$ respecte a S .

8.5 Sistemes de partícules a l'espai amb lligams ideals

- (8.5.1) Considerem un sistema de N partícules a l'espai $\mathbf{R}^3$ (per exemple), amb masses $m_1, \dots, m_N$ i posicions $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$, sotmeses a la segona llei de Newton

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}),$$

amb $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$.

- (8.5.2) Podem descriure-ho com un sistema dinàmic newtonià amb les dades següents:

- $M = \mathbf{R}^{3N}$,
- $g = \sum m_\alpha g_\alpha$, amb g_α la mètrica euclidiana de la α -èsima còpia de $\mathbf{R}^3$:
 $g_\alpha = d\mathbf{x}_\alpha \cdot d\mathbf{x}_\alpha = dx_\alpha^1 \otimes dx_\alpha^1 + dx_\alpha^2 \otimes dx_\alpha^2 + dx_\alpha^3 \otimes dx_\alpha^3$,
- $\mathcal{F} = \sum \mathbf{F}_\alpha \cdot d\mathbf{x}_\alpha$.

- (8.5.3) Donat un camí $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ en M identifiquem la seva velocitat $\mathbf{x}'$ amb la funció vectorial $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N)$, i el seu moment $p_{\mathbf{x}} = \sum m_\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot d\mathbf{x}_\alpha$ amb la funció vectorial $\mathbf{p} = (m_1 \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, m_N \dot{\mathbf{x}}_N)$.

Llavors l'equació de Newton $\nabla_t p_{\mathbf{x}} = \mathcal{F}$ del sistema newtonià coincideix amb la segona llei de Newton.

- (8.5.4) Suposem donades $3N - s$ relacions entre les posicions (**l·ligams**)

$$\phi_\mu(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = 0$$

(les suposem independents del temps per simplicitat). Sigui $S \subset \mathbf{R}^{3N}$ el subconjunt que defineixen. Si les $d\phi_\mu$ són linealment independents en cada punt de S i S no és buit, llavors S és una subvarietat de dimensió s .

Suposem que hi ha unes forces de lligam $\mathbf{R}_\alpha$, $m_\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha$, que obliguen el sistema a romandre dins la subvarietat de lligams S , $\mathbf{x} \in S$. Si aquestes forces de lligam són ideals, el moviment és el del sistema newtonià induït $(S, g^S, \mathcal{F}^S)$.

Aquesta hipòtesi se satisfà en molts sistemes mecànics.

8.6 Equacions de Lagrange

- (8.6.1) Sigui $(M, g, \mathcal{F})$ un sistema dinàmic newtonià, amb energia cinètica T . Considerem coordenades (x^i) de M i les coordenades naturals corresponents (x^i, v^i) de TM , i escrivim $\mathcal{F} = \mathcal{F}_j dx^j$.

Un camí $\gamma: I \rightarrow M$ és solució de l'equació de Newton sii se satisfà l'**equació de Lagrange de segona espècie**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^j} \circ \gamma' \right) - \frac{\partial T}{\partial x^j} \circ \gamma' = \mathcal{F}_j \circ \gamma \quad (j = 1 \dots m).$$

(Una expressió similar val si la força $\mathcal{F}$ depèn de la velocitat.)

- (8.6.2) Sigui $(M, g, \mathcal{F})$ un sistema dinàmic newtonià conservatiu, amb energia potencial $V: M \rightarrow \mathbf{R}$: $\mathcal{F} = -dV$. La funció **lagrangiana** del sistema és

$$L = T - V$$

(on es considera V com una funció en TV).

- (8.6.3) Considerem un sistema newtonià conservatiu amb lagrangiana L .

Un camí $\gamma: I \rightarrow M$ és solució de l'equació de Newton sii se satisfà l'**equació de Lagrange de primera espècie** (o simplement **equació de Lagrange**)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^j} \circ \gamma' \right) - \frac{\partial L}{\partial x^j} \circ \gamma' = 0 \quad (j = 1 \dots m).$$

- (8.6.4) Considerem encara un sistema newtonià $(M, g, \mathcal{F})$ i una subvarietat $j: S \hookrightarrow M$ amb forces de lligam ideals. La dinàmica corresponent en S és la donada

pel sistema newtonià induït $(S, g^S, \mathcal{F}^S)$, i equival a l'equació de Lagrange de segona espècie amb energia cinètica $T^S = (\mathrm{T}j)^*(T)$.

Si el sistema és conservatiu llavors $\mathcal{F}^S = -\mathrm{d}V^S$ on $V^S = j^*(V)$, de manera que la dinàmica induïda està definida per l'equació de Lagrange de primera espècie donada per la lagrangiana $L^S = T^S - V^S = (\mathrm{T}j)^*(L)$.

9 Formalisme lagrangià

9.1 L'equació d'Euler–Lagrange

(9.1.1) Un *sistema dinàmic lagrangià* és un parell (Q, L) on

- Q és una varietat diferenciable, dita *espai de configuracions*,
- $L: TQ \rightarrow \mathbf{R}$ és una funció diferenciable, anomenada *funció lagrangiana*, o simplement *lagrangiana*.

(9.1.2) La definició anterior correspon a una lagrangiana autònoma de primer ordre. El formalisme es pot adaptar per a considerar lagrangianes no autònomes i lagrangianes d'ordre superior. En lloc d'una variable independent, se'n poden considerar diverses; llavors obtenim una descripció lagrangiana d'una teoria de camps.

(9.1.3) Si $I \subset \mathbf{R}$ és un interval compacte, es pot considerar el conjunt dels camins $\gamma: I \rightarrow Q$ de diferenciabilitat apropiada, i el funcional *acció* de L (sobre I)

$$S[\gamma] = \int_I L(\gamma'(t)) dt.$$

(9.1.4) La variable independent $t \in \mathbf{R}$ s'acostuma a anomenar *temps*, ja que usualment es correspon amb el temps físic en els problemes estudiats amb el formalisme lagrangià. El camí γ pot representar així una possible evolució temporal de l'estat d'un sistema físic. Anomenarem *trajectòries dinàmiques* els camins γ que efectivament siguin possibles evolucions temporals del sistema d'acord amb els principis físics.

(9.1.5) *Principi de Hamilton* (William R. Hamilton, 1834)

Les trajectòries dinàmiques d'un sistema dinàmic lagrangià són els camins crítics del funcional acció.

El principi de Hamilton també es coneix com a *principi de l'acció estacionària* (o *principi de la mínima acció*, ja que sovint les trajectòries dinàmiques són mínims del funcional). El nom de *principi de l'acció estacionària*, de fet, s'aplica a tota una família de principis variacionals, dels quals el principi de Hamilton és la instància més important.

(9.1.6) De forma més precisa: un camí $\gamma: I \rightarrow Q$ de classe C^2 és una trajectòria dinàmica del sistema sii, per a qualsevol interval compacte $J \subset I$, $\gamma|_J$ és un camí crític del funcional acció definit per L integrant sobre J al llarg de camins amb els valors fixats sobre ∂J .

- (9.1.7) D'acord amb els resultats bàsics de la teoria del càlcul de variacions, si $(q^i)_{i=1\dots n}$ és un sistema de coordenades de Q , i (q^i, v^i) són les corresponents coordenades naturals de TQ , llavors un camí γ és una trajectòria dinàmica del sistema si satisfà l'**equació d'Euler–Lagrange**:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}(\gamma'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(\gamma'(t)) \right) = 0 \quad (i = 1 \dots n).$$

9.2 Formulació geomètrica de l'equació d'Euler–Lagrange

L'equació d'Euler–Lagrange admet diverses descripcions geomètriques. Tot seguit en donarem una de tipus «hamiltonià».

- (9.2.1) Sigui $L: TQ \rightarrow \mathbf{R}$ una lagrangiana. Anomenem **energia lagrangiana** de L (o simplement *energia*) la funció $E_L: TQ \rightarrow \mathbf{R}$ definida per

$$E_L = \Delta_{TQ} \cdot L - L,$$

on Δ_{TQ} és el camp de Liouville de TQ .

També es pot expressar

$$E_L(v) = \langle \mathcal{F}L(v), v \rangle - L(v),$$

on $\mathcal{F}L$ és la derivada fibrada de L .

- (9.2.2) La **1-forma de Lagrange** de L és la 1-forma diferencial $\theta_L \in \Omega^1(TQ)$ definida per

$$\theta_L = {}^tJ \circ dL,$$

on J és l'endomorfisme vertical de $T(TQ)$ i tJ és el corresponent endomorfisme transposat de $T^*(TQ)$.

- (9.2.3) La **2-forma de Lagrange** de L és la 2-forma diferencial $\omega_L \in \Omega^2(TQ)$ definida per

$$\omega_L = -d\theta_L.$$

Defineix un morfisme de fibrats vectorials

$$\widehat{\omega}_L: T(TQ) \rightarrow T^*(TQ), \quad \widehat{\omega}_L \cdot a_v = i_{a_v} \omega_L(v).$$

- (9.2.4) *Expressions locals*

Considerem coordenades naturals (q^i, v^i) de TQ . Laxament, anomenarem **moments** les funcions

$$\widehat{p}_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}.$$

Llavors, sobre l'obert coordenat,

$$E_L = \widehat{p}_i v^i - L,$$

$$\theta_L = \widehat{p}_i dq^i,$$

$$\omega_L = dq^i \wedge d\widehat{p}_i = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} dq^i \wedge dv^j.$$

- (9.2.5) Sigui $\xi: I \rightarrow TQ$ un camí. Les aplicacions $\widehat{\omega}_L \circ \xi' \equiv i_{\xi'} \omega_L$ i $dE_L \circ \xi$ són 1-formes diferencials al llarg de ξ . Suposem que en coordenades s'expressa $\xi(t) = (q^i(t), v^i(t))$, de manera que $\xi'(t) = (q^i(t), v^i(t); \dot{q}^i(t), \dot{v}^i(t))$. Llavors

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}_L \circ \xi' - dE_L \circ \xi &= \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \circ \xi - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \circ \xi \right) \right) dq^i \circ \xi + (\dot{q}^i - v^i) d\widehat{p}_i \circ \xi. \end{aligned}$$

- (9.2.6) El darrer terme s'anulla si ξ és l'aixecament canònic d'un camí en Q , $\xi = \gamma'$. D'aquí es dedueix que un camí $\gamma: I \rightarrow Q$ satisfà l'equació d'Euler-Lagrange sii satisfà l'equació diferencial

$$i_{\gamma'} \omega_L = dE_L \circ \gamma'.$$

Aquesta és una de les diverses maneres d'escriure geomètricament l'equació d'Euler-Lagrange.

- (9.2.7) En alguns casos, i més particularment quan la lagrangiana és regular, les solucions de l'equació d'Euler-Lagrange es poden descriure com a corbes integrals d'un cert camp vectorial. Des d'un punt de vista teòric, això ja permet descriure totes les solucions de l'equació. Anem a detallar quines condicions han de satisfer tals camps vectorials.

Usem la notació $f \stackrel{V}{=} g$ per a indicar que els dos membres coincideixen en el subconjunt V .

- (9.2.8) Sigui $V \subset TQ$ una subvarietat, $Y \in \mathfrak{X}(TQ)$ un camp vectorial. Les corbes integrals de Y contingudes en V són aixecaments tangents de solucions de l'equació d'Euler-Lagrange sii Y satisfà les equacions

$$i_Y \omega_L \stackrel{V}{=} dE_L,$$

$$T\tau_Q \circ Y \stackrel{V}{=} \text{Id}_{TQ}.$$

Notem que la segona no és més que la condició de segon ordre, que assegura que, sobre V , les corbes integrals de Y són aixecaments de camins en Q .

Direm que Y és un **camp lagrangià** sobre V .

9.3 Lagrangianes regulars

En aquesta secció $L: TQ \rightarrow \mathbf{R}$ és una lagrangiana.

- (9.3.1) S'anomena **aplicació de Legendre** de L la derivada fibrada de L :

$$\mathcal{F}L: TQ \rightarrow T^*Q,$$

definida per $\mathcal{F}L(v_q) = DL_q(v_q)$, amb $L_q = L|_{T_qQ}$.

També s'anomena *transformació de Legendre*, tot i que en propietat només s'hauria d'usar quan sigui un difeomorfisme. D'altra banda, l'expressió *transformació de Legendre* també s'usa per a denotar la transformació que assigna a la funció lagrangiana $L \in C^\infty(TQ)$ la funció hamiltoniana $H \in C^\infty(T^*Q)$, com es veurà en el tema següent.

- (9.3.2) Una altra aplicació rellevant és la *hessiana fibrada* de L , que en aquest cas és

$$\mathcal{F}^2L: TQ \rightarrow \text{Hom}(TQ, T^*Q) \cong T^*Q \otimes T^*Q,$$

definida indistintament per $\mathcal{F}^2L(v_q) = D(\mathcal{F}L)_q(v_q) = D^2L_q(v_q)$.

- (9.3.3) En coordenades naturals (q^i, v^i) aquestes aplicacions s'escriuen

$$\mathcal{F}L(q, v) = (q, \hat{p}) \quad \text{amb} \quad \hat{p}_i = \frac{\partial L}{\partial v^i},$$

$$\mathcal{F}^2L(q, v) = (q, W) \quad \text{amb} \quad W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}.$$

- (9.3.4) Les condicions següents són equivalents:

- i) $\mathcal{F}L$ és un difeomorfisme local.
- ii) Per a cada $v \in TQ$ la forma bilineal $\mathcal{F}^2L(v)$ és no-degenerada.
- iii) La 2-forma de Lagrange ω_L és no-degenerada, és a dir, $\hat{\omega}_L: T(TQ) \rightarrow T^*(TQ)$ és un isomorfisme.

- (9.3.5) Expressant-ho en coordenades, qualsevol de les afirmacions anteriors es compleix si $\det W \neq 0$ arreu.

- (9.3.6) Una lagrangiana que satisfà qualsevol d'aquestes condicions equivalents s'anomena **lagrangiana regular**.

- (9.3.7) Si L és una lagrangiana regular llavors existeix un únic camp vectorial Y_L que satisfà l'equació

$$i_{Y_L} \omega_L = dE_L.$$

Aquest camp vectorial satisfà la condició de segon ordre.

(9.3.8) En coordenades naturals, el camp lagrangià s'expressa

$$Y_L = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + W^{ik} \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{\partial^2 L}{\partial v^k \partial q^j} v^j \right) \frac{\partial}{\partial v^i},$$

on (W^{ik}) és la matriu inversa de la hessiana (W_{kj}) .

(9.3.9) Si L és regular, les solucions de l'equació d'Euler–Lagrange es corresponen amb les corbes integrals de Y_L . Per tant, per a cada $v \in TQ$ hi ha una única solució maximal amb condició inicial v .

9.4 Simetries i constants del moviment

Un dels avantatges de les formulacions lagrangiana i hamiltoniana de la mecànica és que faciliten l'estudi de les simetries⁸ i les constants del moviment, la qual cosa és molt beneficiosa, ja que ajuden a integrar les equacions del moviment.

(9.4.1) L'energia E_L és una constant del moviment.

De fet, en el context dels sistemes lagrangians *no-autònoms*, E_L és constant del moviment sii $\partial L / \partial t = 0$.

(9.4.2) Sigui $\Phi: TQ \rightarrow TQ$ un morfisme d'espais fibrats. Les propietats següents són equivalents:

- Existeix una aplicació $\varphi: Q \rightarrow Q$ tal que $\Phi = T\varphi$.
- Per a cada camí $\xi: I \rightarrow TQ$ aixecament tangent d'un camí en Q , el camí $\Phi \circ \xi$ també ho és.

(9.4.3) Si $\Phi = T\varphi: TQ \rightarrow TQ$, es compleix:

- $\Phi_*(\Delta) = \Delta$, on Δ és el camp de Liouville de TQ .
- $T\Phi \circ J = J \circ T\Phi$, on J és l'endomorfisme vertical de $T(TQ)$.
- Si $Y \in \mathfrak{X}(TQ)$ satisfà la condició de segon ordre, $\Phi_*(Y)$ també.

(9.4.4) Sigui $\varphi: Q \rightarrow Q$ un difeomorfisme, i sigui $\Phi = T\varphi$ el seu aixecament al fibrat tangent. Si $L: TQ \rightarrow \mathbf{R}$ és una lagrangiana llavors es compleix:

$$\Phi^*(\theta_L) = \theta_{\Phi^*(L)}, \quad \Phi^*(\omega_L) = \omega_{\Phi^*(L)}, \quad \Phi^*(E_L) = E_{\Phi^*(L)}.$$

A més, si L és regular,

$$\Phi^*(Y_L) = Y_{\Phi^*(L)}.$$

⁸Vegeu apèndix.

- (9.4.5) Sigui $\varphi: Q \rightarrow Q$ un difeomorfisme tal que L és invariant per $T\varphi$. Llavors:
- si γ és una solució de l'equació d'Euler–Lagrange, $\varphi \circ \gamma$ també n'és solució;
 - $T\varphi$ deixa invariants les formes de Lagrange i l'energia;
 - si L és regular $T\varphi$ deixa invariant el camp lagrangia Y_L .

- (9.4.6) Sigui $X \in \mathfrak{X}(Q)$ tal que $X^T L = 0$. Llavors el flux F^s de X aplica solucions de l'equació d'Euler–Lagrange en solucions.

- (9.4.7) Sigui $L: TQ \rightarrow \mathbf{R}$ una lagrangiana. Una **simetria de Noether** de L és un camp vectorial X en Q tal que deixa L «quasiinvariant», és a dir, existeix una funció $F: Q \rightarrow \mathbf{R}$ tal que

$$X^T \cdot L = \widehat{dF};$$

aquí $\widehat{dF}: TQ \rightarrow \mathbf{R}$ és la funció lineal definida per la diferencial de F , $\widehat{dF}(v_q) = \langle dF(q), v_q \rangle$.

- (9.4.8) *Teorema de Noether*

Sigui X una simetria de Noether de L , amb $X^T \cdot L = \widehat{dF}$. Llavors la funció

$$G = \langle \theta_L, X^T \rangle - F \circ \tau_Q,$$

que també s'expressa $G(v_q) = \langle \mathcal{F}L(v_q), X(q) \rangle - F(q)$, és una constant del moviment.

- (9.4.9) L'enunciat del teorema de Noether és molt més general. Observem tan sols que és vàlid en el cas de lagrangianes dependents del temps, amb $X = a^i \partial / \partial q^i$ i F també dependents del temps, ja que, per a qualsevol camí en TQ , es compleix la identitat $\frac{dG}{dt} = -[L]_i a^i + X^T \cdot L - \frac{dF}{dt}$.

- (9.4.10) Sigui (q^i) una carta de Q . Es diu que la coordenada q^k és una **coordenada cíclica** si $\partial L / \partial q^k = 0$. Llavors el moment associat corresponent, $\widehat{p}_k = \partial L / \partial v^k$, és una constant del moviment.

9.5 Lagrangianes mecàniques

- (9.5.1) Sigui (Q, g) una varietat pseudoriemanniana. Anomenem **energia cinètica** la funció quadràtica $T: TQ \rightarrow \mathbf{R}$ definida per la mètrica:

$$T(v_q) = \frac{1}{2} g_q(v_q, v_q).$$

(9.5.2) Una **lagrangiana mecànica** en Q és de la forma

$$L = T - V,$$

on $V: Q \rightarrow \mathbf{R}$ és una funció en Q (considerada com a funció en TQ) anomenada **energia potencial**.

Hi ha altres notacions possibles freqüents, com ara $L = K - U$.

(9.5.3) Si $L = T - V$ és una lagrangiana mecànica llavors:

- La transformació de Legendre de L coincideix amb l'isomorfisme musical definit per la mètrica (i doncs és un difeomorfisme):

$$\mathcal{F}L = \widehat{g}: TQ \rightarrow T^*Q.$$

- La hessiana fibrada en cada punt coincideix amb la mètrica, $\mathcal{F}^2L(v_q) = g_q \in T_q^*Q \otimes T_q^*Q$:

$$\mathcal{F}^2L = g \circ \tau_q.$$

(9.5.4) Si L és homogènia de grau k , $E_L = (k - 1)L$.

(9.5.5) Per a una lagrangiana mecànica $L = T - V$ l'energia lagrangiana coincideix amb l'**energia mecànica**

$$E_L = T + V.$$

(9.5.6) Per a una lagrangiana mecànica sense energia potencial, $L = T$, el camp lagrangà és l'esprai geodèsic de la mètrica:

$$Y_L = S_g.$$

Les solucions de l'equació d'Euler–Lagrange de L són les geodèsiques de g .

(9.5.7) Per a una lagrangiana mecànica $L = T - V$ el camp lagrangà és

$$Y_L = S_g - (\text{grad } V)^\vee,$$

on el darrer terme és l'aixecament vertical de $\text{grad } V \in \mathfrak{X}(Q)$.

Les solucions de l'equació d'Euler–Lagrange de L són les solucions de l'equació $\nabla_t \gamma' = -(\text{grad } V) \circ \gamma$.

(9.5.8) *Sistemes amb lligams holònoms*

Signi (Q, L) un sistema dinàmic lagrangà, i sigui $j: Q_\circ \hookrightarrow Q$ una subvarietat. Mitjançant la inclusió $Tj: TQ_\circ \hookrightarrow TQ$ podem definir $L_\circ = (Tj)^*(L)$, de manera que obtenim un nou sistema dinàmic lagrangà, $(Q_\circ, L_\circ)$.

Si $L = T - V$ és una lagrangiana mecànica, llavors $L_\circ$ també ho és: $L_\circ = T_\circ - V_\circ$, on $T_\circ$ és l'energia cinètica de la mètrica $g_\circ = j^*(g)$ (suposat

que efectivament sigui no-degenerada, cosa que sempre es complirà si g és riemanniana) i $V_o = j^*(V)$.

- (9.5.9) El sistema induït (Q_o, L_o) de fet correspon a l'aplicació del *principi de d'Alembert* al sistema original i a la subvarietat donada (les forces de lligam són *ideals*). Molts sistemes físics compleixen aquest principi. La seva validesa s'estén als sistemes dependents del temps, i també se'n pot fer una adaptació per als sistemes amb lligams no-holònoms.

Observi's també que les trajectòries de (Q_o, L_o) són els camins crítics del funcional acció de L quan se'n fan variacions contingudes en la subvarietat Q_o .

9.6 Generalitzacions de les lagrangianes mecàniques

Potencials dependents de la velocitat

- (9.6.1) Sigui $L_o: TQ \rightarrow \mathbf{R}$ una lagrangiana. Sigui $\alpha \in \Omega^1(q)$, la qual cosa equival a donar una funció lineal $\hat{\alpha}: TQ \rightarrow \mathbf{R}$. Podem considerar la lagrangiana

$$L = L_o + \hat{\alpha}.$$

Llavors tenim

$$\mathcal{F}L = \mathcal{F}L_o + \alpha \circ \tau_Q,$$

$$\mathcal{F}^2 L = \mathcal{F}^2 L_o,$$

$$\theta_L = \theta_{L_o} + \tau_Q^*(\alpha),$$

$$\omega_L = \omega_{L_o} - \tau_Q^*(d\alpha),$$

$$E_L = E_{L_o}.$$

Si L_o és regular llavors L també ho és. El camp lagrangia Y de L es pot escriure doncs de la forma

$$Y = Y_o + Z,$$

on Y_o és el camp lagrangia de L_o i Z és un camp vectorial vertical en TQ que es pot determinar a partir de les dades.

- (9.6.2) La descripció anterior s'utilitza en la formulació lagrangiana de la partícula carregada en un camp electromagnètic.

Forces no conservatives

- (9.6.3) Sigui L una lagrangiana regular en Q , amb camp lagrangianà Y_L . Es pot considerar un nou camp vectorial dinàmic

$$Y = Y_L + Z,$$

on Z és un camp vectorial vertical que representa forces addicionals sobre el sistema. Així, Y defineix encara una equació diferencial de segon ordre. El camp vectorial Z recull les forces que no es poden incorporar dins la lagrangiana.

Hi ha una correspondència entre camps vectorials verticals Z en TQ i camps vectorials $Z_\circ$ al llarg de τ_Q : $Z(v) = \lambda(v, Z_\circ(v))$, on λ és l'aixecament vertical de TQ .

En el cas d'una lagrangiana mecànica $L = T - V$ l'equació de segon ordre definida per Y s'escriu $\nabla_t \gamma' = -\text{grad } V \circ \gamma + Z_\circ \circ \gamma'$.

- (9.6.4) Un *sistema dissipatiu* és el definit a partir d'una lagrangiana mecànica $L = T - V$ per l'addició al camp lagrangianà Y_L d'un camp vertical Z tal que $\mathcal{L}_Z T \leq 0$. Si ξ és una corba integral de $Y = Y_L + Z$, i $E = T + V$ és l'energia mecànica, llavors $d(E \circ \xi)/dt \leq 0$.

9.7 Lagrangianes singulars

En física teòrica, i més específicament en les teories relativistes, les lagrangianes singulars són indispensables. Considerem per exemple la descripció d'una partícula en l'espai-temps de Minkowski M (o en qualsevol espai-temps lorentzià). La seva línia-món és una corba C de gènere temporal dins M , i, atès que no hi ha un temps absolut, qualsevol paràmetre és vàlid per a parametritzar-la. Si es vol preservar aquesta llibertat, hom es troba empès a considerar lagrangianes invariants per reparametritzacions, que són necessàriament singulars.

- (9.7.1) Una lagrangiana es diu *singular* quan no és regular.

Això significa que la hessiana fibrada $\mathcal{F}^2 L$ de L és degenerada en alguns punts; en coordenades, $\det W = 0$ en alguns punts.

Normalment hom es refereix a lagrangianes que són singulars en tot punt. En l'estudi de les lagrangianes singulars sovint se suposa que el rang de la hessiana és constant.

- (9.7.2) Una lagrangiana és *invariant per reparametritzacions* quan l'acció S és invariant per reparametritzacions, és a dir, si per a tot difeomorfisme

creixent $\varphi: J \rightarrow I$ es compleix $S[\gamma \circ \varphi] = S[\gamma]$. Necessàriament L ha de ser autònoma. També es veu fàcilment que L ha de ser singular.

(9.7.3) Sigui $L: TQ \rightarrow \mathbf{R}$. Són equivalents:

- L és invariant per reparametrizacions.
- L és homogènia de grau 1.
- $E_L = 0$.

(9.7.4) Per a una lagrangiana qualsevol $\mathcal{F}E_L(v) = \mathcal{F}^2 L(v) \cdot v$.

(9.7.5) Si L és homogènia de grau 1 llavors $v \in \text{Ker } \mathcal{F}^2 L(v)$, de manera que L és singular.

(9.7.6) En general, si L és una lagrangiana singular interessa determinar:

- el conjunt de punts $V \subset TQ$ per on passen solucions de l'equació d'Euler–Lagrange;
- la multiplicitat de les solucions que passen per un punt donat $v \in V$.

En situacions prou «regulars» es troba una subvarietat V i una família afí de camps vectorials en V de la forma

$$Y = Y_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i \Gamma_i,$$

amb λ_i funcions arbitràries, tal que les solucions de l'equació d'Euler–Lagrange són precisament les corbes integrals d'aquests camps vectorials.

10 Formalisme hamiltonià

10.1 Sistemes dinàmics hamiltonians

(10.1.1) Un **sistema dinàmic hamiltonià** és una terna (M, ω, H) on

- M és una varietat diferenciable, anomenada **espai de fases**;
- ω és una forma simplèctica en M ;
- $H: M \rightarrow \mathbf{R}$ és una funció diferenciable, anomenada **funció hamiltoniana**, o simplement **hamiltoniana**.

(10.1.2) La hamiltoniana té un gradient simplèctic

$$Z_H = \widehat{\omega} \circ dH.$$

La dinàmica del sistema hamiltonià està definida per aquest camp vectorial. Per a un camí $\xi: I \rightarrow M$, l'equació diferencial corresponent

$$\xi' = Z_H \circ \xi$$

s'anomena **equació de Hamilton**. També s'escriu

$$i_{\xi'} \omega = dH \circ \xi.$$

Com en el formalisme lagrangià, anomenem *temps* la variable independent, ja que sovint s'identifica amb el temps físic.

(10.1.3) Si ξ és una solució de l'equació de Hamilton i $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ és una funció, llavors

$$\frac{d(f \circ \xi)}{dt} = \{f, H\} \circ \xi.$$

(10.1.4) *Expressió en coordenades*

Suposem que (x^i, y_i) són coordenades de Darboux per a ω (és a dir, $\omega = dx^i \wedge dy_i$). Llavors, si ξ s'hi expressa com $(x(t), y(t))$, l'expressió coordenada de l'equació de Hamilton és

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \{x^i, H\} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= \{y_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

(10.1.5) Una funció $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ és una constant del moviment sii $\{f, H\} = 0$.

Les constants del moviment formen una $\mathbf{R}$ -àlgebra de Lie.

H és una constant del moviment.

- (10.1.6) Més generalment, es podria considerar una hamiltoniana dependent del temps, així com funcions dependents del temps. En tal cas es té

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \right),$$

de manera que H és una constant del moviment sii $\partial H / \partial t = 0$.

10.2 Simetries dels sistemes dinàmics hamiltonians

- (10.2.1) Siguin (M_i, ω_i, H_i) , $i = 1, 2$, sistemes dinàmics hamiltonians. Un difeomorfisme $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ es diu **isomorfisme** si

- $\varphi^*(\omega_2) = \omega_1$,
- $\varphi^*(H_2) = H_1$.

- (10.2.2) Sigui $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ un isomorfisme de sistemes dinàmics hamiltonians. Llavors:

- $\varphi_*(Z_{H_1}) = Z_{H_2}$.
- L'aplicació $\xi_1 \mapsto \varphi \circ \xi_1$ és una bijecció entre els conjunts de solucions de les respectives equacions de Hamilton.

- (10.2.3) Sigui (M, ω, H) un sistema dinàmic hamiltonià. Un isomorfisme amb ell mateix s'anomena automorfisme, o **simetria**. És doncs un difeomorfisme $\varphi: M \rightarrow M$ que deixa invariants ω i H .

Anàlogament, anomenem **simetria infinitesimal** del sistema un camp vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ el flux del qual està format per simetries finites, és a dir, tal que

$$\mathcal{L}_X \omega = 0, \quad \mathcal{L}_X H = 0.$$

- (10.2.4) Sigui (M, ω, H) un sistema dinàmic hamiltonià.

Si X n'és una simetria infinitesimal llavors X és un camp vectorial localment hamiltonià.

Perquè un camp vectorial hamiltonià $X = Z_f$ sigui una simetria infinitesimal cal i basta que f sigui una constant del moviment.

En particular, suposem que $\omega = -d\theta$. Si $\mathcal{L}_X \theta = 0$, llavors X és un camp hamiltonià amb hamiltoniana $f = \langle \theta, Y \rangle$.

10.3 Formulació hamiltoniana de la mecànica

- (10.3.1) Sigui $L: TQ \rightarrow \mathbf{R}$ una lagrangiana, amb aplicació de Legendre $\mathcal{F}L: TQ \rightarrow T^*Q$. Es té:

$$\theta_L = \mathcal{F}L^*(\theta_Q), \quad \omega_L = \mathcal{F}L^*(\omega_Q).$$

- (10.3.2) Sigui $L: TQ \rightarrow \mathbf{R}$ una lagrangiana regular. La 2-forma ω_L és simplèctica i la dinàmica lagrangiana és equivalent a la del sistema dinàmic hamiltonià (TQ, ω_L, E_L) .

- (10.3.3) Una lagrangiana $L: TQ \rightarrow \mathbf{R}$ es diu **hiperregular** quan la seva aplicació de Legendre $\mathcal{F}L: TQ \rightarrow T^*Q$ és un difeomorfisme. Evidentment L és regular. Aleshores L defineix una **hamiltoniana** $H: T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$ per

$$H = \mathcal{F}L_*(E_L).$$

S'obté així un sistema dinàmic hamiltonià (T^*Q, ω_Q, H) , l'equació del moviment del qual és l'equació de Hamilton.

- (10.3.4) Sigui $L: TQ \rightarrow \mathbf{R}$ una lagrangiana hiperregular.

- La transformació de Legendre $\mathcal{F}L: TQ \rightarrow T^*Q$ és un isomorfisme entre els sistemes dinàmics hamiltonians (TQ, ω_L, E_L) i (T^*Q, ω_Q, H) .
- El camp lagrangianà Y_L i el camp hamiltonià Z_H estan $\mathcal{F}L$ -relacionats.
- Si $\gamma: I \rightarrow Q$ és solució de l'equació d'Euler–Lagrange, $\eta = \mathcal{F}L \circ \gamma'$ és solució de l'equació de Hamilton.
- Si $\eta: I \rightarrow T^*Q$ és solució de l'equació de Hamilton, $\gamma = \tau_Q^* \circ \eta$ és solució de l'equació d'Euler–Lagrange.

- (10.3.5) Si L és només regular, es poden fer algunes coses localment. Si L és singular, sota certes condicions es pot fer una formulació hamiltoniana més complicada (formalisme de Bergmann–Dirac).

- (10.3.6) *Formulació hamiltoniana de les lagrangianes mecàniques*

Una lagrangiana mecànica $L = T - V$ és hiperregular, ja que la seva transformació de Legendre és l'isomorfisme musical definit per la mètrica, $\mathcal{F}L = \hat{g}: TQ \rightarrow T^*Q$.

Sigui $T^* = \mathcal{F}L_*(T)$ l'energia cinètica expressada en termes dels moments; també s'expressa $T^*(p) = \frac{1}{2}g^*(p, p)$, on g^* és la mètrica actuant sobre co-vectors. Obtenim així la hamiltoniana:

$$H = T^* + V.$$

10.4 Sistemes completament integrables

(10.4.1) El model estàndard de sistema hamiltonià admetent *variables acció-angle* és (M, ω, H) amb

- $M = \mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$, amb coordenades angle i acció $(\phi^1, \dots, \phi^n, I_1, \dots, I_n)$;
- $\omega = d\phi^i \wedge dI_i$;
- $H(I_1, \dots, I_n)$ (independent de les coordenades angle).

(10.4.2) El camp hamiltonià és $Z = f^i(I) \partial/\partial\phi^i$, i la corresponent equació de Hamilton s'expressa

$$\begin{aligned} \frac{d\phi^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial I_i} \equiv f^i(I), \\ \frac{dI_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \phi^i} \equiv 0. \end{aligned}$$

Les seves solucions són

$$\phi^i(t) = f^i(I_o)t + \phi_o^i, \quad I_i(t) = I_{o_i},$$

per a $(\phi_o, I_o) \in \mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$; aquí s'evidencia que les funcions I_i són constants del moviment.

La subvarietat $N_{I_o} \equiv I^{-1}(I_o) \subset M$ és un tor n -dimensional invariant. En ell el moviment és quasiperiòdic, amb freqüències $f^i(I_o)$.

(10.4.3) Sigui (M, ω, H) un sistema dinàmic hamiltonià, amb $\dim M = 2n$. Suposem que té n constants del moviment I_α , linealment independents en cada punt, i en involució:

$$\begin{aligned} \{I_\alpha, H\} &= 0, \\ dI_1 \wedge \dots \wedge dI_n &\neq 0 \text{ arreu,} \\ \{I_\alpha, I_\beta\} &= 0. \end{aligned}$$

(Una d'elles pot ser H .)

Posem $I = (I_1, \dots, I_n): M \rightarrow \mathbf{R}^n$. Per a cada $\sigma \in \mathbf{R}^n$, sigui

$$\Sigma_\sigma = I^{-1}(\sigma),$$

que és una subvarietat tancada de dimensió n de M , invariant pel flux de H . Se suposa que cada Σ_σ és compacta i connexa.

Sota aquestes hipòtesis, es diu que el sistema hamiltonià (M, ω, H) és *completament integrable*.

(10.4.4) *Teorema de Liouville–Arnol’d*

En aquestes condicions, cada Σ_σ és un tor, hi ha coordenades canòniques (ϕ, J) tals que les diferents J etiqueten diferents tors, i el sistema és integrable per quadratures.

A Apèndixs

A.1 Fluxos dependents del temps

La formulació geomètrica més simple d'una equació diferencial en una varietat ve donada per un camp vectorial, que modelitza una equació diferencial ordinària, de primer ordre, autònoma, en forma explícita. La formulació geomètrica de casos més generals requereix l'ús d'estructures més complicades. En aquesta secció considerarem el cas d'una equació no autònoma, o dependent del temps, de la forma $x' = f(t, x)$. La situació més simple s'obté treballant en la varietat producte $\mathbf{R} \times M$.

(A.1.1) Un ***camp vectorial dependent del temps*** en M és una aplicació $X: W \rightarrow TM$, definida en un subconjunt obert $W \subset \mathbf{R} \times M$, tal que, per a tot $(t, p) \in W$, $X(t, p) \in T_p M$.

És a dir, X és un camp vectorial al llarg de la projecció $W \rightarrow M$.

(A.1.2) Aquest camp vectorial defineix una equació diferencial

$$x' = X(t, x);$$

una solució d'aquesta equació és un camí $\gamma: I \rightarrow M$ tal que, per a tota t ,

$$(t, \gamma(t)) \in W \quad \text{i} \quad \gamma'(t) = X(t, \gamma(t)).$$

Si $\gamma(t_0) = p_0$, es diu que γ satisfà la condició inicial (t_0, p_0) .

(A.1.3) Si X és de classe C^1 , el teorema d'existència i unicitat permet demostrar l'existència de solucions maximals i del flux. Una manera d'obtenir aquests resultats és convertir l'equació diferencial en una equació autònoma equivalent.

(A.1.4) A partir de X es pot construir un camp vectorial $\tilde{X}$ en W , a vegades anomenat la ***suspensió*** de X :

$$\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial t} + X,$$

on estem utilitzant el camp vectorial unitat de $\mathbf{R}$, $\partial/\partial t$, i que l'espai tangent d'un producte és la suma directa dels espais tangents dels factors: $T_{(t,p)} W = T_{(t,p)}(\mathbf{R} \times M) = T_t \mathbf{R} \oplus T_p M$.

(A.1.5) Una corba integral de $\tilde{X}$ és un camí $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1): I \rightarrow W$ tal que

$$D\tilde{\gamma}_0 = 1, \quad \tilde{\gamma}'_1 = X \circ \tilde{\gamma}.$$

Observem que $\tilde{\gamma}_0(t) = t + \text{const}$, de manera que només quan $\text{const} = 0$ (cosa que es pot aconseguir aplicant una translació al paràmetre d'evolució) el camí γ_1 és solució de l'equació dependent del temps.

(A.1.6) El nou camp vectorial $\tilde{X}$ té solucions maximals $\tilde{\gamma}_{t_o,p}(t)$ i un flux maximal $\tilde{F}: \tilde{D} \rightarrow W$, amb domini $\tilde{D} \subset \mathbf{R} \times W \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times M$, i amb $\tilde{\gamma}_{t_o,p}(t) = \tilde{F}(t, t_o, p)$. Observem que $\tilde{\gamma}_{t_o,p}(0) = (t_o, p)$.

(A.1.7) Donat $(t_o, p) \in W$, sigui $t \mapsto \gamma_{t_o,p}(t)$ la solució maximal de $x' = X(t, x)$ amb condició inicial $\gamma_{t_o,p}(t_o) = p$. Siguí $F: D \rightarrow M$ l'aplicació, definida en un subconjunt $D \subset \mathbf{R} \times W$, per

$$F(t, t_o, p) = \gamma_{t_o,p}(t).$$

És el **flux dependent del temps** de X .

(A.1.8) El subconjunt $D \subset \mathbf{R} \times W$ és obert, i, si X és de classe C^k ($k \geq 1$), el flux $F: D \rightarrow M$ és de classe C^k .

Usant la suspensió de X es pot bastir una demostració senzilla a partir de la teoria independent del temps. Només cal notar que es pot definir F a partir del flux $\tilde{F}$ de $\tilde{X}$ i una translació: $\tilde{F}(t - t_o, t_o, p) = (t, F(t, t_o, p))$. Així doncs el domini D és el transformat de $\tilde{D}$ pel difeomorfisme $(s, t_o, p) \mapsto (s + t_o, t_o, p)$, i el grau de diferenciabilitat de F és el de $\tilde{F}$.

(A.1.9) Siguí F' la velocitat de F respecte a la primera variable real: $F' = \text{TF} \circ \frac{\partial}{\partial t}$. Aleshores

$$F'(t, t_o, p) = X(t, F(t, t_o, p)).$$

(A.1.10) Siguí

$$F^{ts} = F(t, s, \cdot): M_{ts} \rightarrow M.$$

El seu domini és el conjunt obert $M_{ts} \subset M$ obtingut tallant D amb $\{t\} \times \{s\} \times M$.

Les aplicacions F^{ts} satisfan la *lleï de grup*

$$\begin{aligned} F^{tt} &= \text{Id}_M, \\ F^{t''t'} \circ F^{t't} &= F^{t''t} \end{aligned}$$

(allà on es pugui calcular la composició).

$F^{ts}: M_{ts} \rightarrow M_{st}$ és un difeomorfisme, amb invers F^{st} .

(A.1.11) Si X és un camp vectorial *independent del temps* amb flux F , aleshores el seu flux dependent del temps ve donat per $F^{t't} = F^{t'-t}$.

Derivada de Lie

(A.1.12) Considerem una funció dependent del temps $f: W \rightarrow \mathbf{R}$, de classe C^1 . Volem avaluar el canvi del valor de f al llarg de les corbes integrals de X , $f(t, F^{tt_0}(p))$. Podem escriure aquesta expressió com $(F^{tt_0})^*(f_t)(p)$; aquí, per a cada t , $f_t \equiv f(t, \cdot)$ és una funció definida en un conjunt obert de M .

(A.1.13) Es compleix que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} f(t, F^{tt_0}(p)) = (F^{t_1 t_0})^* \left(\left. \frac{\partial f_t}{\partial t} \right|_{t=t_1} + \mathcal{L}_{X_{t_1}} f_{t_1} \right) (p),$$

on hem utilitzat una notació similar per a $X_t \equiv X(t, \cdot)$; en particular,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} f(t, F^{tt_0}(p)) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{L}_X f \right) (t_0, p),$$

on s'entén que $\mathcal{L}_X f(t, p) = (\mathcal{L}_{X_t} f_t)(p)$.

(A.1.14) Amb hipòtesis i notacions similars, es poden obtenir expressions anàlogues per a la derivada de Lie d'un ***camp tensorial dependent del temps*** R :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} (F^{tt_0})^*(R_t) = (F^{t_1 t_0})^* \left(\left. \frac{\partial R}{\partial t} + \mathcal{L}_X R \right) \right|_{t=t_1},$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (F^{tt_0})^*(R_t) = \left(\left. \frac{\partial R}{\partial t} + \mathcal{L}_X R \right) \right|_{t=t_1}.$$

A.2 Transformacions i simetries, finites i infinitesimals

Una *simetria* de qualsevol estructura matemàtica és qualsevol *transformació* que deixa invariant (en un sentit que cal precisar) els elements que defineixen l'estructura, o bé altres elements definits a partir de l'estructura inicial. En aquest sentit, el terme no és gaire llunyà d'*automorfisme*.

Centrem-nos en el cas d'un sistema dinàmic (en un sentit ampli del terme). Podem anomenar *simetria dinàmica* qualsevol transformació que deixi invariant el conjunt de trajectòries dinàmiques del sistema, és a dir, que transformi trajectòries dinàmiques en trajectòries dinàmiques. Per contrast, podríem anomenar *simetria geomètrica* qualsevol transformació que deixi invariant les dades que defineixin el sistema (per exemple, l'equació diferencial, si està definit d'aquesta manera).

Particularitzant més, considerem un sistema dinàmic (M, X) definit per un camp vectorial X en una varietat diferenciable M . Podem considerar

transformacions «puntuals» del sistema, és a dir, difeomorfismes $\varphi: M \rightarrow M$; entre aquestes, algunes són simetries del camp vectorial, en el sentit que el deixen invariant:

$$\varphi_*(X) = X.$$

Les transformacions $\varphi: M \rightarrow M$ defineixen també transformacions del conjunt dels camins en M : $\gamma \mapsto \varphi \circ \gamma$. Si φ és una simetria de X llavors aquesta transformació envia corbes integrals de X a corbes integrals, i doncs també és una simetria dinàmica en el sentit anterior. Tanmateix, el concepte de simetria dinàmica pot ser més general, ja que una d'aquestes simetries no té per què estar definida a partir d'una transformació dels punts de la varietat, sinó dels camins en ella. Aquest és el cas, per exemple, de la simetria de translació temporal que posseeixen les corbes integrals de X .

En el cas d'una estructura matemàtica basada en varietats diferenciables, al costat del concepte de transformació podem considerar el concepte de *transformació infinitesimal*: es tracta d'un camp vectorial (dit *generador infinitesimal*) que, un cop integrat, dóna lloc a un grup uniparamètric local de transformacions. Observi's que, si el camp vectorial no és complet, aquestes transformacions no són globals, sinó parcials.

Quan les transformacions generades per una transformació infinitesimal són simetries de l'estructura, llavors parlem de *simetria infinitesimal*.

En el cas d'un sistema dinàmic (M, X) definit per un camp vectorial, el concepte de simetria infinitesimal anàleg al de simetria «finita» que hem presentat abans és el d'un camp vectorial Z en M el flux del qual deixa invariant X , és a dir, que X és invariant per Z :

$$\mathcal{L}_Z X = 0,$$

o, dit altrament, $[Z, X] = 0$.

És important destacar que el conjunt de les simetries de qualsevol estructura és un *grup*. Molt sovint aquest grup es pot dotar de manera natural d'una estructura diferenciable, la qual cosa ha fet que la teoria dels *grups de Lie*, i la seva versió infinitesimal, la teoria de les *àlgebres de Lie*, hagin adquirit una posició fonamental en nombroses branques de les matemàtiques i de la física.

A.3 Constants del moviment

Donat un sistema dinàmic, una *constant del moviment* o *quantitat conservada* és una funció que es manté constant al llarg de qualsevol trajectòria dinàmica.

Òbviament, si g és una constant del moviment llavors també ho és $g + c$, per a qualsevol nombre c .

En el cas d'un sistema dinàmic (M, X) definit per un camp vectorial, una funció $g: M \rightarrow \mathbf{R}$ és una constant del moviment si

$$\mathcal{L}_X g = 0$$

(una tal funció també s'anomena *integral primera* del sistema).

L'existència de constants del moviment facilita la integració de l'equació diferencial i la descripció de les seves solucions.

Índex terminològic

- 1-forma de Lagrange (9.2.2)
- 2-forma de Lagrange (9.2.3)
- acceleració en un sistema coordinat galileà (7.4.7)
- acció (9.1.3)
- aixecament canònic d'un camp vectorial al fibrat cotangent (4.6.5)
- aixecament canònic d'un camp vectorial al fibrat tangent (4.3.2)
- aixecament canònic d'un difeomorfisme al fibrat cotangent (4.6.1)
- aixecament cotangent d'un camp vectorial (4.6.5)
- aixecament tangent d'un camp vectorial (4.3.2)
- aixecament vertical d'un camp vectorial (4.3.6)
- aixecament vertical d'un vector (3.5.7)
- aplicació de Legendre (9.3.1)
- aplicació simplèctica (5.4.1)
- aplicació tangent (3.4.5)
- base d'una fibració (3.1.3)
- camí crític (6.2.4)
- camp de Jacobi (6.5.4)
- camp de Killing (2.1.11)
- camp lagrangia (9.2.8)
- camps vectorials coordinats (3.4.4)
- camp tensorial (3.4.7)
- camp tensorial al llarg d'una aplicació (1.3.6)
- camp tensorial paral·lel (1.4.11)
- camp vectorial (3.4.3)
- camp vectorial al llarg d'una aplicació (1.3.1)
- camp vectorial de Liouville (3.5.9)
- camp vectorial hamiltonià en una varietat de Poisson (5.5.3)
- camp vectorial hamiltonià en una varietat simplèctica (5.2.1)
- camp vectorial localment hamiltonià (5.2.3)
- camp vectorial paral·lel (1.4.10)
- camp vectorial paral·lel al llarg d'un camí (1.4.1)
- camp vectorial vertical (3.5.4)
- carta fibrada (3.1.5)
- carta natural del fibrat tangent (3.4.2)
- carta simplèctica (5.1.8)
- centre de massa (7.6.3)
- claudàtor de Poisson (5.3.1)
- condició de segon ordre (4.4.3)
- condició de trivialitat local (3.1.1)
- connexió (1.1.1)
- connexió afí (1.1.1)
- connexió de Levi-Civita (2.3.4)
- connexió de Levi-Civita d'una subvarietat (2.4.4)
- connexió estàndard de $\mathbf{R}^n$ (1.1.6)
- connexió plana (1.5.8)
- connexió riemanniana (2.3.1)
- connexió simètrica (1.5.2)
- coordinada cíclica (9.4.10)
- coordinades de Darboux (5.1.8)
- coordinades simplèctiques (5.1.8)
- curvatura d'una connexió (1.5.5)
- curvatura escalar (2.5.5)
- derivació covariant (1.1.1)
- derivació covariant de camps tensorials (1.2.2)
- derivada covariant d'un camp tensorial al llarg d'un camí (1.3.7)
- derivada covariant d'un camp vectorial (1.1.1)
- derivada covariant d'un camp vectorial al llarg d'un camí (1.3.4)
- derivada fibrada (3.5.13)
- difeomorfisme de transició (3.1.15)
- diferencial covariant (1.2.6)
- distància riemanniana (2.6.3)

- dual d'un fibrat vectorial (3.3.1)
- empenta galileana (7.3.4)
- endomorfisme vertical (4.1.1)
- energia (8.2.3)
- energia cinètica (6.4.1)
- energia cinètica (7.6.6)
- energia cinètica (8.1.7)
- energia cinètica (9.5.1)
- energia lagrangiana (9.2.1)
- energia mecànica (9.5.5)
- energia potencial (7.6.7)
- energia potencial (8.2.1)
- energia potencial (9.5.2)
- energia potencial efectiva (7.7.5)
- energia total (7.6.10)
- equació de Hamilton (10.1.2)
- equació de Jacobi (6.5.4)
- equació de Lagrange (8.6.3)
- equació de Lagrange de primera espècie (8.6.3)
- equació de Lagrange de segona espècie (8.6.1)
- equació de Newton (7.5.1)
- equació de Newton (8.1.3)
- equació d'Euler–Lagrange (6.2.7)
- equació d'Euler–Lagrange (9.1.7)
- equació d'Euler–Lagrange d'ordre superior (6.6.5)
- equació d'Euler–Lagrange en teoria de camps (6.6.11)
- equació diferencial de segon ordre (4.4.3)
- esdeveniment (7.2.2)
- esdeveniments simultanis (7.2.2)
- espai (7.1.1)
- espai coordinat galileà (7.3.3)
- espai de configuracions (8.1.1)
- espai de configuracions (9.1.1)
- espai de fases (10.1.1)
- espai de Minkowski (2.1.8)
- espai fibrat (3.1.1)
- espaitemps (7.1.1)
- espaitemps (7.2.1)
- espaitemps galileà (7.2.1)
- espai total d'una fibració (3.1.3)
- esprai (4.4.7)
- esprai geodèsic d'una connexió (4.4.8)
- estructura de Lie–Poisson (5.5.13)
- estructura de Poisson (5.5.1)
- fibració (3.1.1)
- fibració imatge recíproca (3.1.14)
- fibració trivial (3.1.10)
- fibració trivialitzable (3.1.11)
- fibra d'una fibració (3.1.3)
- fibrat cotangent (3.4.6)
- fibra típica (3.1.1)
- fibrat tangent (3.4.3)
- fibrat tangent d'un fibrat vectorial (3.4.11)
- fibrat vectorial (3.2.1)
- fibrat vectorial complex (3.2.19)
- fibrat vectorial quocient (3.3.5)
- fibrat vectorial trivial (3.2.13)
- fibrat vectorial trivialitzable (3.2.15)
- foliació simplèctica d'una varietat de Poisson (5.5.16)
- força (7.5.5)
- força (8.1.1)
- força central (7.6.12)
- força conservativa (7.6.7)
- força de lligam (8.4.2)
- força de lligam ideal (8.4.3)
- força d'interacció (7.6.1)
- força externa (7.6.1)
- forma de volum riemanniana (2.2.6)
- forma diferencial de grau 1 (3.4.6)
- forma diferencial de grau k (3.4.7)
- forma simplèctica (5.1.1)
- formes de Liouville (4.5.2)
- formes diferencials canòniques del fibrat cotangent (4.5.2)
- fórmula de Koszul (2.3.3)
- funció de Lagrange (6.1.1)
- funció generatriu (5.4.11)
- funció hamiltoniana (10.1.1)
- funció hamiltoniana (5.2.2)

- funció homogènia (3.5.11)
- funció lagrangiana (8.6.2)
- funció lagrangiana (9.1.1)
- funcional (6.1.3)
- funcional acció (9.1.3)
- funcional energia (6.4.1)
- funcional longitud (6.4.4)
- geodèsica d'una connexió (1.4.6)
- gradient (2.2.4)
- gradient simplèctic (5.2.1)
- grup de Galileu (7.3.2)
- hamiltoniana (10.1.1)
- hamiltoniana definida per una lagrangiana (10.3.3)
- hessiana fibrada (3.5.15)
- instant (7.2.4)
- interval de temps (7.2.1)
- involució canònica (4.2.2)
- isomorfisme d'espais temps galileans (7.3.1)
- isometria (2.1.10)
- isometria infinitesimal (2.1.11)
- isometria local (2.1.10)
- isomorfisme de fibracions (3.1.9)
- isomorfisme de sistemes dinàmics hamiltonians (10.2.1)
- lagrangiana (6.1.1)
- lagrangiana (8.6.2)
- lagrangiana (9.1.1)
- lagrangiana hiperregular (10.3.3)
- lagrangiana invariant per reparametrizacions (9.7.2)
- lagrangiana mecànica (9.5.2)
- lagrangiana regular (9.3.6)
- lagrangiana singular (9.7.1)
- lagrangianes d'ordre superior (6.6.1)
- lagrangianes en teoria de camps (6.6.7)
- línia d'univers (7.4.1)
- lleï d'addició de les velocitats (7.4.6)
- l·ligam (8.5.4)
- l·ligam ideal (8.4.3)
- l·ligam no holònom (8.4.5)
- l·ligam reònom (8.4.5)
- longitud d'un camí (2.6.1)
- massa (7.5.5)
- massa reduïda de dues partícules (7.7.2)
- massa total (7.6.3)
- mètrica de l'energia cinètica (8.1.1)
- mètrica de Minkowski (2.1.8)
- mètrica lorentziana (2.1.3)
- mètrica pseudoriemanniana (2.1.1)
- mètrica riemanniana (2.1.2)
- mètrica riemanniana estàndard de $\mathbf{R}^n$ (2.1.7)
- moment (8.1.2)
- moment (9.2.4)
- moment angular total (7.6.3)
- moment lineal (7.5.6)
- moment lineal total (7.6.3)
- morfisme de fibracions (3.1.6)
- morfisme de fibrats vectorials (3.2.10)
- morfisme de Poisson (5.5.14)
- morfisme d'espais temps galileans (7.3.1)
- operador d'Euler–Lagrange (6.2.10)
- parèntesi de Lie–Poisson (5.5.13)
- parèntesi de Poisson (5.3.1)
- parèntesi de Poisson (5.5.1)
- partícula (7.1.1)
- posició relativa de dues partícules (7.7.1)
- potencial simplèctic (5.1.3)
- primera lleï de Newton (7.5.4)
- primera variació (6.2.2)
- principi d'acció i reacció (7.6.2)
- principi de d'Alembert (8.4.3)
- principi de determinació de Newton (7.1.3)
- principi de Hamilton (9.1.5)
- principi de l'acció estacionària (9.1.5)
- principi de relativitat de Galileu (7.1.2)
- producte fibrat (3.1.14)

- producte tensorial de fibrats vectorials (3.3.1)
- projectió d'una fibració (3.1.3)
- punt d'equilibri (8.2.6)
- punt material (7.1.1)
- punts conjugats (6.5.6)
- rang d'un fibrat vectorial (3.2.3)
- referència de Frenet (2.4.7)
- referència local (3.2.4)
- restricció d'un fibrat a una subvarietat (3.1.14)
- secció global (3.1.12)
- secció local (3.1.12)
- secció nul·la (3.2.9)
- segona forma fonamental escalar (2.4.6)
- segona forma fonamental vectorial (2.4.5)
- segona variació (6.5.3)
- segon llei de Newton (7.5.6)
- símbols de Christoffel (1.1.4)
- símbols de Christoffel de primera espècie (2.3.5)
- simetria de Noether (9.4.7)
- simetria d'un sistema dinàmic hamiltonià (10.2.3)
- simetria infinitesimal d'un sistema dinàmic hamiltonià (10.2.3)
- simplectomorfisme (5.4.2)
- simplectomorfisme infinitesimal (5.4.5)
- sistema conservatiu (7.6.10)
- sistema conservatiu (8.2.1)
- sistema coordinat galileà (7.3.8)
- sistema de partícules (7.4.8)
- sistema de partícules (7.6.1)
- sistema de partícules tancat (7.6.1)
- sistema de referència (7.1.1)
- sistema de referència galileà (7.3.8)
- sistema de referència inercial (7.1.2)
- sistema dinàmic hamiltonià (10.1.1)
- sistema dinàmic lagrangiana (9.1.1)
- sistema dinàmic newtonià (8.1.1)
- sistema dinàmic newtonià amb lligams holònoms (8.4.2)
- sistema dinàmic newtonià induït sobre una subvarietat (8.4.6)
- sistema hamiltonià completament integrable (10.4.3)
- subfibrat vectorial (3.3.4)
- subfibrat vertical (3.5.3)
- subvarietat de lligams (8.4.2)
- suma directa de fibrats vectorials (3.3.1)
- temps (7.1.1)
- tensor de curvatura de Ricci (2.5.4)
- tensor de curvatura de Riemann (2.5.1)
- tensor de curvatura d'una connexió (1.5.5)
- tensor de Poisson (5.5.5)
- tensor de torsió d'una connexió (1.5.1)
- teorema de Bertrand (7.7.8)
- teorema de Darboux (5.1.8)
- teorema de Darboux generalitzat (5.3.13)
- teorema de descomposició de Weinstein (5.5.15)
- teorema de Hopf–Rinow (2.6.6)
- teorema de Jacobi (6.5.7)
- teorema de Li Hua Zhong (5.2.8)
- teorema de Liouville (5.2.5)
- teorema de Liouville–Arnol'd (10.4.4)
- teorema d'embedding de Nash (2.4.8)
- teorema de Noether (9.4.8)
- teorema d'Euler (6.2.7)
- tercera llei de Newton (7.6.2)
- torsió d'una connexió (1.5.1)
- trajectòria dinàmica (8.1.3)
- trajectòria dinàmica (9.1.4)
- transformació canònica (5.4.6)
- transformació de Legendre (9.3.1)
- translació espacial (7.2.3)
- transport paral·lel d'un vector al llarg d'un camí (1.4.3)

transposat d'un morfisme de fibrats vectorials (3.3.3)	(2.6.5)
treball realitzat per una força (7.6.8)	varietat lorentziana (2.1.4)
treball realitzat per una força (8.1.6)	varietat orientable (3.4.9)
trivialització global (3.1.11)	varietat paralelitzable (3.4.8)
trivialització local (3.1.1)	varietat pseudoriemanniana (2.1.4)
valència d'una transformació canònica (5.4.9)	varietat riemanniana (2.1.4)
variables acció–angle (10.4.1)	varietat riemanniana plana (2.5.2)
variació (6.1.6)	varietat simplèctica (5.1.2)
variació infinitesimal (6.1.7)	varietat simplèctica exacta (5.1.3)
varietat de Poisson (5.5.1)	vector tangent vertical (3.5.1)
varietat geodèsicament completa	velocitat en un sistema coordinat galileà (7.4.5)
	volum riemannià (2.2.5)