

Grafos, formas modulares e integración de distribuciones p -ádicas

Segundas Jornadas de Teoría de Números
19 de Julio de 2007

Luis García, Víctor Rotger
Universitat Politècnica de Catalunya

Curvas de Shimura $X_0(D, N)$

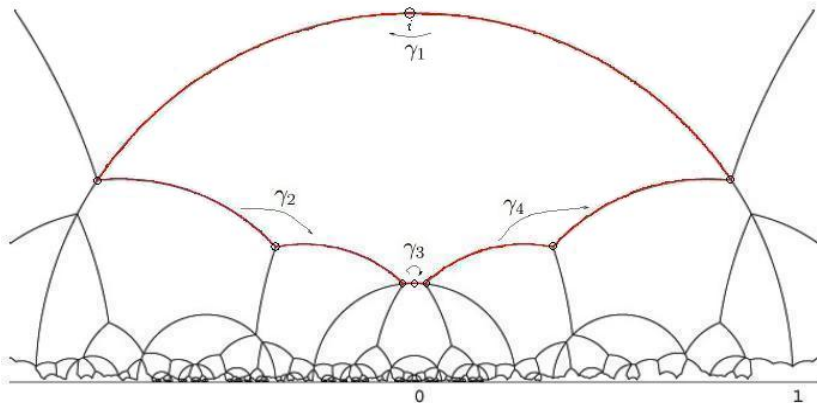
Sea $D = p_1 \cdots p_{2r}$ y $N \geq 1$, $(D, N) = 1$, $\square \nmid N$.

- ▶ $B_D = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i + \mathbb{Q}j + \mathbb{Q}ij$, $i^2, j^2 \in \mathbb{Q}^*$, $ij = -ji$,
álgebra de cuaterniones de discriminante D .
- ▶ $B_D \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} M_2(\mathbb{R})$
- ▶ $\mathcal{O}$ = orden de Eichler de nivel N en B_D .
- ▶ $\Gamma_{D,N} := \{\gamma \in \mathcal{O} \mid \det(\gamma) = 1\} \subseteq SL_2(\mathbb{R})$
- ▶ Actúa en el hiperplano de Poincaré $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$
de manera discreta y discontinua.

Curvas de Shimura $X_0(D, N)$

- ▶ Si $D = 1$, $Y_0(N) := \Gamma_{1,N} \backslash \mathcal{H}$ no es compacto.
Se compactifica añadiendo *puntos cuspidales*: la curva modular clásica $X_0(N)$.
- ▶ Si $D > 1$, $X_0(D, N) := \Gamma_{D,N} \backslash \mathcal{H}$ es compacto: La curva de Shimura de discriminante D y nivel N .
- ▶ (Shimura) $X_0(D, N)$ admite un modelo canónico sobre $\mathbb{Q}$.
- ▶ Si $D = 1$, $z \mapsto z + 1 \in \Gamma_{D,N}$ y los coeficientes de Fourier de las formas modulares en los puntos cuspidales nos dan información aritmética y geométrica.
- ▶ Si $D > 1$, no hay puntos cuspidales, las formas no son periódicas.

Ejemplo: Dominio fundamental de $X_0(6, 1)$



(M. Alsina, D. Kohel, H. Verril, ...)

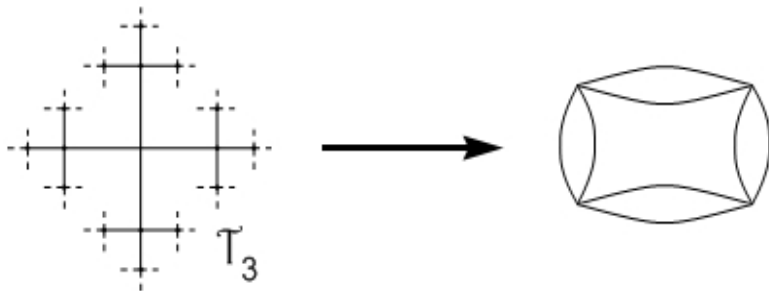
Uniformización p -ádica

- ▶ Sea $p|D$, $D' := D/p$. Ahora $B_{D'} \otimes \mathbb{Q}_p \simeq M_2(\mathbb{Q}_p)$.
- ▶ $\mathcal{O}'$ un $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ -orden de Eichler de nivel N en $B_{D'}$.
- ▶ $\Gamma_{D,N}^{(p)} := \{\gamma \in \mathcal{O}' \mid \det(\gamma) = 1\} \hookrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$.
- ▶ Semiplano de Poincaré p -ádico: $\mathcal{H}_p = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) - \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$.
- ▶ Árbol de Bruhat-Tits de grado $p+1$: $\mathcal{T}_p$.

Teorema (Cerednik-Drinfeld).

- $X_0(D, N)(\mathbb{C}_p) \simeq \Gamma_{D,N}^{(p)} \backslash \mathcal{H}_p$, una *curva de Mumford*.
- $X_0(D, N) \bmod p \leftrightarrow \Gamma_{D,N}^{(p)} \backslash \mathcal{T}_p$, un grafo finito.

Árbol y reducción de $X_0(210, 1)$ en $p = 3$



Cuatro componentes irreducibles de género 0. Cada una corta a la siguiente en dos puntos.

Formas modulares p -ádicas

- ▶ Dado $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Q}_p)$ discontinuo y finitamente generado, $X_\Gamma := \Gamma \backslash \mathcal{H}_p$ es una curva rígida analítica sobre $\mathbb{Q}_p$.
- ▶ Una *forma modular de peso 2* sobre X_Γ es una función analítica rígida $f : \mathcal{H}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p$ tal que

$$f(\gamma z) = (cz + d)^2 f(z), \quad \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

- ▶ $S_2(\Gamma) \xrightarrow{\cong} H^0(\Omega_{X_\Gamma}^1), \quad f(z) \mapsto f(z)dz.$

Medidas p -ádicas e integración

- ▶ Una *medida p -ádica* es una función finitamente aditiva acotada

$$\mu : \{ U \text{ compacto abierto en } \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \} \rightarrow \mathbb{Q}_p$$

tal que $\mu(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)) = 0$.

- ▶ Dada $\mu \in \text{Meas}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), \mathbb{Q}_p)$, definimos

$$f_\mu(z) := \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \frac{1}{z - t} d\mu = \lim_{\{U_\alpha\}} \sum_{\alpha} \frac{\mu(U_\alpha)}{z - t_\alpha}$$

- ▶ Si μ es Γ -invariante $\Rightarrow f_\mu \in S_2(\Gamma)$.

Formas modulares y medidas p -ádicas

Teorema (Schneider-Teitelbaum) La aplicación $\mu \mapsto f_\mu$ da un isomorfismo:

$$\text{Meas}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), \mathbb{Q}_p)^\Gamma \xrightarrow{\cong} S_2(\Gamma)$$

- ▶ Existe un álgebra $\mathbb{T} = \langle T_\ell : \ell \text{ primo} \rangle_{\mathbb{Q}}$ conmutativa que actúa en ambos lados: el *álgebra de Hecke*.
- ▶ $\mathbb{T} \simeq K_1 \times \dots \times K_t$, K_i cuerpos de números totalmente reales.
- ▶ $S_2(\Gamma) = \langle f_1, \dots, f_g \rangle$ con $T_\ell(f_k) = a_k(\ell)f_k$.
- ▶ El isomorfismo $\mu \mapsto f_\mu$ es Hecke-equivariante.

Cociclos harmónicos

- ▶ $\text{Aristas}(\mathcal{T}_p) := \{ \text{aristas orientadas de } \mathcal{T}_p \}$.
- ▶ Un *cociclo harmónico* es $c : \text{Aristas}(\mathcal{T}_p) \rightarrow \mathbb{Q}_p$ tal que

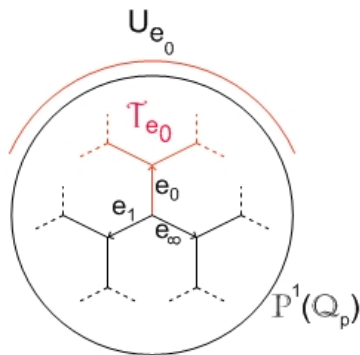
$$(i) \quad c(e) = -c(\bar{e}), \quad \forall e \in \text{Aristas}(\mathcal{T}),$$

$$(ii) \quad \sum_{s(e)=v} c(e) = 0 \quad , \quad \forall v \in \text{Vert}(\mathcal{T}_p).$$

- ▶ $C_{har}^\Gamma(\mathcal{T}_p, \mathbb{Q}_p) = C_{har}^\Gamma(\mathcal{T}_p, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_p$ tiene dimensión finita.

Árbol de Bruhat-Tits y la topología de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$

- ▶ $\mathcal{T}_e$ = máximo subárbol conexo de $\mathcal{T}_p$ que surge de $e = \{v_1 \mapsto v_2\}$.
- ▶ $U_e := \partial\mathcal{T}_e$, abierto de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$.



Medidas p -ádicas y cociclos harmónicos

- ▶ A un cociclo c le asociamos una medida μ_c :

$$\mu_c(U_e) := c(e)$$

- ▶ $C_{har}^\Gamma(\mathcal{T}_p, \mathbb{Q}_p) \stackrel{1-1}{\longleftrightarrow} \text{Meas}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p)^\Gamma) \stackrel{1-1}{\longleftrightarrow} S_2(\Gamma).$

$\Rightarrow$ Las medidas son fácilmente computables.

DE QUÉ SIRVE TODO ESTO?

- ▶ Desarrollo en serie de Fourier de las formas modulares clásicas, gracias a un teorema de Jacquet-Langlands:
 $S_2(\Gamma_{D,N}) \simeq S_2(\Gamma_0(DN))^{new}.$
- ▶ La conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer: resultados de Bertolini-Darmon.
- ▶ Estudio de los automorfismos de las curvas $X_0(D, N)$: resultados de Kontogeorgis-Rotger.
- ▶ Construcción de ecuaciones explícitas de curvas de Shimura.

Trabajos de Bertolini-Darmon

► Sea $E/\mathbb{Q}$ una curva elíptica de conductor DN y sea $p \mid D$.

► $E \xrightarrow{\sim} f_E \in S_2(\Gamma_0(DN))^{new} \xrightarrow{\sim}$

$$\xrightarrow{\sim} g_E \in S_2(\Gamma_{D,N}) \xrightarrow{\sim} c_E \in C_{har}^{\Gamma_{D,N}}(\mathcal{T}_p, \mathbb{Z})$$

► $\pi_E : C_{har}^{\Gamma_{D,N}}(\mathcal{T}_p, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cdot c_E$

► $\text{Jac}(X_0(D, N))$ es totalmente degenerada en p :

$$C_{har}^{\Gamma_{D,N}}(\mathcal{T}_p, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}_p^* \simeq (\mathbb{C}_p^*)^g \xrightarrow{\Phi_{CD}} \text{Jac}(X_0(D, N))(\mathbb{C}_p)$$

Teorema (Bertolini-Darmon)



$$\begin{array}{ccc}
 C_{har}^{\Gamma_{D,N}}(\mathcal{T}_p, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}_p^* & \xrightarrow{\Phi_{CD}} & \text{Jac}(X_0(D, N))(\mathbb{C}_p) \\
 \downarrow \pi_E & & \downarrow \\
 \mathbb{C}_p^* & \xrightarrow{\Phi_{Tate}} & E(\mathbb{C}_p)
 \end{array}$$

- Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ con $\left(\frac{K}{\ell}\right) = -1$ si $\ell \mid D$, $\left(\frac{K}{\ell}\right) = 1$ si $\ell \mid N$.
 - $L_p(E/K, 1) = 0$.
 - Si $L'_p(E/K, 1) \neq 0$, $\text{rank } E(K) = 1$ y $|TS(E/K)| < \infty$.
 - Un generador P_K de $E(K)$ se construye explícitamente con integrales multiplicativas p -ádicas de línea.

Ejemplo: $E : y^2 + xy + y = x^3 + 4x - 6$ de conductor 14.

- ▶ Sea $D = 14$, $N = 1$, $p = 7$.
- ▶ El grafo de $X_0(14, 1) \bmod 7$: $v_1 \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} v_2$.
- ▶ $C_{har}^{\Gamma_{D,N}}(\mathcal{T}_p, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cdot c$, $a_3 = -2$, $a_5 = 0$, $a_{11} = 0$, $a_{13} = -4$.
- ▶ Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-11})$, $R_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$, $\omega = \frac{1+\sqrt{-11}}{2}$
- ▶ $z, z' \in \mathcal{H}_p$ puntos de Heegner por R_K .
- ▶ $\mathcal{L} := \oint \frac{t-z'}{t-z} \cdot d\mu_c \in \mathbb{C}_p^*$ satisface que $P_K = \Phi_{Tate}(\mathcal{L})$.
- ▶ $\mathcal{L} = 13149 + 2287\omega \bmod 7^5$ y $P_K = (\frac{7}{11}, \frac{-41-116\omega}{121}) \bmod 7^5$.

Ecuaciones de curvas de Shimura de géneros 0, 1 y 2.

D	N	g	$X_0(D, N)$	
6	1	0	$x^2 + y^2 + 3 = 0$	Ihara
10	1	0	$x^2 + y^2 + 2 = 0$	Ihara
22	1	0	$x^2 + y^2 + 11 = 0$	Kurihara
14	1	1	$(x^2 - 13)^2 + 7^3 + 2y^2 = 0$	Kurihara
15	1	1	$(x^2 + 3^5)(x^2 + 3) + 3y^2 = 0$	Jordan
21	1	1	$x^4 - 658x^2 + 7^6 + 7y^2 = 0$	Kurihara
33	1	1	$x^4 + 30x^2 + 3^8 + 3y^2 = 0$	Kurihara
34	1	1	$3x^4 - 26x^3 + 53x^2 + 26x + 3 + y^2 = 0$	González-R.
46	1	1	$(x^2 - 45)^2 + 23 + 2y^2 = 0$	Kurihara
6	5	1	$y^2 = -x^4 + 61x^2 - 1024$	González-R.
6	7	1	$y^2 = -3x^4 - 34x^2 - 2187$	González-R.
6	13	1	$y^2 = -x^4 - 115x^2 - 4096$	González-R.
10	3	1	$y^2 = -2x^4 - 11x^2 - 32$	González-R.
10	7	1	$y^2 = -27x^4 - 40x^3 + 6x^2 + 40x - 27$	González-R.
26	1	2	$y^2 = -2x^6 + 19x^4 - 24x^2 - 169$	González-R.
38	1	2	$y^2 = -16x^6 - 59x^4 - 82x^2 - 19$	González-R.
58	1	2	$2y^2 = -x^6 - 39x^4 - 431x^2 - 841$	González-R.

Por qué $X_{26} : y^2 = -2x^6 + 19x^4 - 24x^2 - 169$?
(González-Rotger)

- ▶ Existen involuciones $u, u' \in \text{Aut}(X_{26})$ con $E = X_{26}/\langle u \rangle$, $E' = X_{26}/\langle u' \rangle$ curvas elípticas.
- ▶ Calculando el grafo de X_{26} mod 2 y mod 13:

	E	E'
mod 2	I_1	I_7
mod 13	I_3	I_3

- ▶ Jacquet-Langlands: El conductor de E y E' es 26.
- ▶ Tablas de Cremona: $E = 26B_2$, $E' = 26A_1$.
- ▶ X_{26} es un recubrimiento doble de E y E' : está determinada.

Ecuaciones de $X_0(D, N)$ de género superior

- ▶ $C_{har}^{\Gamma_{D,N}}(\mathcal{T}_p, \mathbb{Z}) = \langle c_1, \dots, c_g \rangle \rightsquigarrow S_2(\Gamma_{D,N}) = \langle f_1, \dots, f_g \rangle$.
- ▶ $\Phi_{can} : X_0(D, N) \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$
$$z \mapsto (f_1(z) : \dots : f_g(z)) = \left(\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \frac{d\mu_1}{z-t} : \dots : \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \frac{d\mu_g}{z-t} \right)$$
- ▶ Si $X_0(D, N)$ no es hiperelíptica: Φ_{can} es un embedding.
 - ▶ $\Phi_{can}(X_0(D, N)) \subset \mathbb{P}^{g-1}$ tiene grado $2g - 2$.
 - ▶ (Petri) Si $g \geq 4$, dada por $\{P_i = 0\}$, $\deg(P_i) = 2$ o 3 .
- ▶ Si $X_0(D, N)$ es hiperelíptica: $\Phi_{can} : X_0(D, N) \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$.