

UNIFORMITZACIÓ ANALÍTICA RÍGIDA DE MÒDULS DE DRINFELD

VICTOR ROTGER

1. PRELIMINARS

Sigui X una corba projectiva, llisa i geomètricament connexa sobre el cos finit $\mathbb{F}_q$ de $q = p^a$ elements. Sigui $\infty \in X(\overline{\mathbb{F}_q})$ un punt tancat de grau d_∞ sobre $\mathbb{F}_q$ i sigui $[\infty] \in \text{Pic}^{d_\infty}(X)(\mathbb{F}_q)$ el divisor format per l'òrbita galoisiana del punt ∞ .

Considerem $K = \mathbb{F}_q(X)$ el cos de funcions racionals de X i

$$\mathbb{A} = \bigcap_{P \notin \text{Sup}[\infty]} \mathcal{O}_{X,P}$$

l'anell de funcions de X regulars fora de ∞ .

Sigui K_∞ la completació de K respecte la valoració discreta d_∞ associada a ∞ i $\mathbb{C}_\infty$ la completació d'una clausura algebraica fixada de K_∞ .

L'anell $\mathbb{A}$ és un domini de Dedekind amb cos de fraccions K i tenim una bijecció

$$\text{Max}(\mathbb{A}) = (X(\overline{\mathbb{F}_q}) \setminus \text{Sup}[\infty]) \setminus \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$$

Cada element $a \in \mathbb{A}$, $a \neq 0$, descomposa en l'anell $\mathbb{A}$ com $(a) = \prod_{\wp \in \text{Max}(\mathbb{A})} \wp^{n_\wp}$ i per tant té un divisor associat

$$\text{div}(a) = \sum_{\wp \in \text{Max}(\mathbb{A})} n_\wp \text{div}(\wp) - n_\infty [\infty],$$

on $\text{div}(\wp)$ denota l'òrbita galoisiana sencera associada a l'ideal primer $\wp$ per la bijecció anterior.

Respecte la valoració discreta associada al punt ∞ , tenim que $\text{ord}_\infty(a) = -n_\infty$. Com $\deg(\text{div}(a)) = 0$ i $\deg(\infty) = d_\infty$, es compleix que

$$\sum n_\wp \deg(\wp) = n_\infty d_\infty.$$

Anomenarem $\deg(a)$ al valor de qualsevol d'aquestes dues quantitats i estenem aquest concepte a tots els elements de K^* :

¹Partially supported by a grant FPI from Ministerio de Educación y Ciencia and by Ministerio de Ciencia y Tecnología BFM2000-0627

$$\deg(x) := -d_\infty \text{ord}_\infty(x).$$

Observem que si $a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, es satisfà que $\sharp\mathbb{A}/(a) = q^{\deg(a)}$.

Agraïments. Aquestes notes són la versió escrita i reduïda d'unes xerrades que va fer el Dr. Enric Nart a la Universitat Autònoma de Bellaterra. Qualsevol mèrit d'aquestes notes se li ha d'atribuir a ell. Els errors, en qualsevol cas, són meus.

2. MÒDULS DE DRINFELD

Sigui $\mathbb{A} \xrightarrow{i} \mathcal{F}$ un $\mathbb{A}$ -cos de característica $\wp = \ker(i)$.

Definició 2.1. Un mòdul de Drinfeld sobre l' $\mathbb{A}$ -cos $\mathbb{A} \xrightarrow{i} \mathcal{F}$ és un homomorfisme d'anells

$$\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{F}\{\tau\}$$

satisfent:

- (1) $\phi_a(\tau) = i(a)\tau^0 + \dots$, per tot $a \in \mathbb{A}$
- (2) $\exists a \in \mathbb{A} : \phi_a(\tau) = i(a)\tau^0$.

De la mateixa definició se'n segueix la següent

Proposició 2.2. *Sigui $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{F}\{\tau\}$ un mòdul de Drinfeld. Aleshores,*

- (1) *Si $\lambda \in \mathbb{F}_q$, $\phi_\lambda(\tau) = i(\lambda)\tau^0$*
- (2) *ϕ és un monomorfisme de $\mathbb{F}_q$ -àlgebres*
- (3) *$\phi_a(\tau)$ és separable si i només si $a \notin \wp$.*

Definició 2.3. Un morfisme $\phi \xrightarrow{P} \psi$ entre mòduls de Drinfels sobre un $\mathbb{A}$ -cos $\mathbb{A} \xrightarrow{i} \mathcal{F}$ és un polinomi $P(\tau) \in \mathcal{F}\{\tau\}$ tal que

$$P\phi_a = \phi_a P,$$

per tot $a \in \mathbb{A}$.

Si interpretem $\mathcal{F}\{\tau\} = \text{End}(\mathcal{G}_{a,\mathcal{F}})$ com l'anell d'endomorfismes de l'esquema en grups additiu sobre $\mathcal{F}$, l'homomorfisme $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{F}\{\tau\}$ es pot entendre com una estructura functorial d' $\mathbb{A}$ -mòduls sobre qualsevol $\mathcal{F}$ -àlgebra en la qual, multiplicar per a consisteix a avaluar el polinomi $\phi_a(x)$ obtingut en substituir $\tau = x^q$:

$$\phi : \underline{\text{Alg}}_{\mathcal{F}} \rightarrow \underline{\text{Mod}}_{\mathbb{A}}$$

$$R \mapsto \phi(R)$$

on $\phi(R)$ és l'àlgebra R amb l'estructura d' $\mathbb{A}$ -mòdul:

$$a \cdot r = \phi_a(r), \quad a \in \mathbb{A}, \quad r \in R.$$

Anàlogament, un morfisme $\phi \xrightarrow{P} \psi$ de mòduls de Drinfeld es tradueix en un homomorfisme functorial d' $\mathbb{A}$ -mòduls que consisteix a avaluar el polinomi $P(x)$:

$$\begin{array}{ccc} \phi(R) & \xrightarrow{P} & \psi(R) \\ r & \mapsto & P(r). \end{array}$$

Definició 2.4. Sigui $\overline{\mathcal{F}}$ una clausura algebraica fixada de $\mathcal{F}$. Per a qualsevol $a \in \mathbb{A}$ definim l'espai vectorial sobre $\mathbb{F}_q$ dels punts d' a -divisió del mòdul de Drinfeld $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{F}\{\tau\}$ com:

$$\phi[a] := \{x \in \phi(\overline{\mathcal{F}} : a \cdot x = 0)\} = \{\text{Arrels de } \phi_a(x) \text{ en } \overline{\mathcal{F}}\}.$$

Els punts d' a -divisió és un sub- $\mathbb{A}$ -mòdul finit de $\phi(\overline{\mathcal{F}})$. Per abús de llenguatge també denotarem per $\phi[a]$ el subesquema en grups finit sobre $\mathcal{F}$ de $\mathbb{G}_{a,\mathcal{F}}$ determinat per

$$\phi[a] := \text{Spec}(\mathcal{F}[x]/(\phi_a(x))),$$

de manera que els punts de a -divisió són els punts $\overline{\mathcal{F}}$ -valorats d'aquest esquema en grups.

Més generalment, si $\mathfrak{a}$ és un ideal no nul de $\mathbb{A}$, definim

$$\phi[\mathfrak{a}] := \{x \in \phi(\overline{\mathcal{F}}) : \phi_a(x) = 0, \forall a \in \mathfrak{a}\}.$$

3. RANG I ALTURA

Considerem les aplicacions

$$\mathcal{F}\{\tau\} \xrightarrow{-\deg} \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

i

$$\mathcal{F}\{\tau\} \xrightarrow{-\text{ht}} \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

on $\text{ht}(P)$ i $\deg(P)$ són els graus mínim i màxim entre els monomis no nuls de $P(\tau)$:

$$P(\tau) = a_h \tau^h + \dots a_n \tau^n, \quad a_h, a_n \neq 0.$$

Les funcions ht i $-\deg$ comparteixen les següents propietats:

- $\text{ht}(PQ) = \text{ht}(P) + \text{ht}(Q)$
- $\text{ht}(P + Q) \geq \min\{\text{ht}(P), \text{ht}(Q)\}$
- $\text{ht}(P) = \infty \Leftrightarrow P = 0$

Per tant, component amb $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{F}\{\tau\}$, obtenim dues valoracions discretes de $\mathbb{A}$. Com a tals, han de ser equivalents a ord_P per a algun punt P de la corba X . De seguida observem que

- $-\deg \cdot \phi$ és equivalent a ord_∞
- $\text{ht} \cdot \phi$ és trivial si $\wp = (0)$ i equivalent a $\text{ord}_\wp$ si $\wp \neq (0)$.

En efecte, $-\deg \cdot \phi$ pren un valor ≤ 0 en tots els elements $a \in \mathbb{A}$; per tant no pot ser equivalent a cap altra que ord_φ . D'altra banda, $\text{ht} \cdot \phi$ s'anul·la exactament sobre $\mathbb{A} \setminus \varphi$.

Per tant existeixen $d, h \in \mathbb{Q}^+$ tals que, per tot $a \in \mathbb{A}$:

$$-\deg(\phi_a(\tau)) = d \cdot d_\infty \text{ord}_\infty(a) = -d \deg(a),$$

$$\text{ht}(\phi_a(\tau)) = h \deg(\varphi) \text{ord}_\varphi(a),$$

on els termes $d_\infty = \deg(\infty)$ i $\deg(\varphi)$ s'han introduït per normalitzar.

Teorema 3.1 (Drinfeld). (1) *d és un enter positiu anomenat rang de ϕ . Per a qualsevol ideal $\mathfrak{a}$ d' $\mathbb{A}$ coprimer amb φ es té que*

$$\phi[\mathfrak{a}] \simeq (\mathbb{A}/\mathfrak{a})^d,$$

com a $\mathbb{A}$ -mòduls.

(2) *Si $\varphi \neq 0$, h és un enter positiu anomenat altura de ϕ . Per a $\mathfrak{a} = \varphi^m$ es té que*

$$\phi[\mathfrak{a}] \simeq (\mathbb{A}/\mathfrak{a})^{d-h},$$

com a $\mathbb{A}$ -mòduls.

Corol·lari 3.2. *Entre dos mòduls de Drinfeld de diferent rang, l'únic morfisme és el 0.*

Exemple 3.3. Sigui $\mathbb{A} = \mathbb{F}_q[T]$ i $\phi = C$ el mòdul de Carlitz. Com $C_T(\tau) = T\tau^0 + \tau$, el rang de C és 1 sobre qualsevol $\mathbb{A}$ -cos.

Si $\mathbb{A} \xrightarrow{i} \mathcal{F}$ és un $\mathbb{A}$ -cos de característica $\varphi \neq 0$, aleshores l'altura de C és 1 i $C[\varphi^n] = \{0\}$.

4. MÒDUL DE DRINFELD ASSOCIAT A UNA XARXA

Fixem un subcos complet de $\mathbb{C}_\infty$, $K_\infty \subseteq M \subseteq \mathbb{C}_\infty$ i el considerem com a $\mathbb{A}$ -cos amb l'estructura natural donada per la inclusió $\mathbb{A} \subset M$, de manera que la característica és $\varphi = (0)$.

Com en el cas de les corbes el·líptiques sobre $\mathbb{C}$, els mòduls de Drinfeld sobre M estan classificats per xarxes. Definirem el concepte de M -xarxa i establim un functor

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Xarxes}}_M & \longrightarrow & \underline{\text{Drin}}_M \\ L & \mapsto & \phi_L, \end{array}$$

que serà una equivalència de categories.

Definició 4.1. Una M -xarxa és un sub- $\mathbb{A}$ -mòdul $L \subseteq \mathbb{C}_\infty$ que satisfà

- (1) L és finitament generat com a $\mathbb{A}$ -mòdul
- (2) L és discret per la topologia de $\mathbb{C}_\infty$

- (3) L està inclòs en la clausura separable M^{sep} de M i és estable per $\text{Gal}(M^{\text{sep}}/M)$.

Tota M -xarxa dóna lloc a una funció exponencial:

$$\begin{aligned} e_L : \mathbb{C}_\infty &\longrightarrow \mathbb{C}_\infty \\ x &\longmapsto e_L(x) = x \cdot \prod_{\alpha \in L \setminus \{0\}} (1 - \frac{x}{\alpha}), \end{aligned}$$

determinada per la funció entera que té com a zeros simples els punts de la xarxa L i satisfà $e'_L(0) = 1$ (cf. [?], 2.14).

Proposició 4.2. *La funció e_L és una funció entera i $\mathbb{F}_q$ -lineal. La seva expansió de Taylor al voltant del 0 té coeficients a M . En particular, $e_L(M) \subseteq M$.*

Com en el cas de la funció exponencial de Carlitz, tenim ara un isomorfisme $\mathbb{F}_q$ -lineal:

$$\mathbb{C}_\infty \xrightarrow{e_L} \mathbb{C}_\infty$$

que permet obtenir una estructura d' $\mathbb{A}$ -mòdul sobre $\mathbb{C}_\infty$ copiant l'estructura de $\mathbb{C}_\infty/L$ via e_L . El següent resultat de Drinfeld ens mostra que aquesta estructura prové d'un mòdul de Drinfeld.

Teorema 4.3. *Per tot $a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$,*

$$e_L(ax) = a \cdot e_L(x) \cdot \prod_{0 \neq \alpha \in a^{-1}L/L} (1 - \frac{e_L(x)}{e_L(\alpha)}),$$

per tot $x \in \mathbb{C}_\infty$.

Observem que a posteriori, de la igualtat $e_L(ax) = \phi_a(e_L(x))$ i de la proposició anterior, es dedueix que $\phi_a(x)$ té coeficients a M , és a dir:

$$\phi_a \in M\{\tau\}.$$

Proposició 4.4. $\mathbb{A} \xrightarrow{\phi} M\{\tau\}$ és un mòdul de Drinfeld de rang $d = \text{rang}_{\mathbb{A}}(L)$.

Sigui $\underline{\text{Xarxes}}_M$ la categoria que té per a objectes les M -xarxes i per morfismes:

$$\text{Mor}(L_1, L_2) = \{0\} \text{ si } L_1 \text{ i } L_2 \text{ tenen rang diferent,}$$

$$\text{Mor}(L_1, L_2) = \{c \in \mathbb{C}_\infty : cL_1 \subseteq L_2\} \text{ si } L_1 \text{ i } L_2 \text{ tenen el mateix rang.}$$

Proposició 4.5. *La construcció anterior determina un functor*

$$\begin{aligned} \underline{\text{Xarxes}}_M &\longrightarrow \underline{\text{Drin}}_M \\ L &\longmapsto \phi_L, \end{aligned}$$

que conserva el rang.

L'objectiu de la resta d'aquest capítol és construir el functor invers del functor anterior, per tal de demostrar que es tracta d'una equivalència de categories.

5. K -MÒDULS FORMALS I EL TEOREMA D'UNIFORMITZACIÓ ANALÍTICA

Definició 5.1. Un K -mòdul formal sobre M és un homomorfisme d'anells $K \xrightarrow{\psi} M\{\{\tau\}\}$ tal que $\psi_a(\tau) = a\tau^0 + \dots$, per a tot $a \in K$.

Lema 5.2. *Si α és un element transcendent sobre $\mathbb{F}_q$ i sigui $f(\tau) = \alpha\tau^0 + a_1\tau + \dots \in M\{\{\tau\}\}$. Aleshores existeix una única*

$$\lambda_f(\tau) = \tau^0 + c_1\tau + \dots \in M\{\{\tau\}\}$$

tal que

$$f = \lambda_f(\alpha\tau)\lambda_f^{-1}$$

Corol·lari 5.3. *Amb les mateixes hipòtesis, el centralitzador de f a $M\{\{\tau\}\}$ és $\lambda_f(M\tau^0)\lambda_f^{-1}$.*

Proposició 5.4. *Per a tot K -mòdul formal $K \xrightarrow{\psi} M\{\{\tau\}\}$ existeix una única sèrie $e_\psi \in M\{\{\tau\}\}$ amb terme independent 1 que satisfà:*

$$\psi_a = e_\psi(a\tau^0)e_\psi^{-1}$$

per tot $a \in K$.

Observem que si $\psi : \mathbb{A} \rightarrow M\{\tau\}$ és un mòdul de Drinfeld sobre M , aleshores $\psi_a(\tau) = a\tau^0 + \dots$ és invertible a $M\{\{\tau\}\}$ si $a \neq 0$ i la seva inversa comença $\frac{1}{a}\tau^0 + \dots$.

Per tant, ψ induïx de manera natural un K -mòdul formal. Fent servir la unicitat, es pot comprovar que si ψ és el mòdul de Drinfeld associat a una xarxa L , aleshores la sèrie e_ψ coincideix amb l'exponencial e_L construïda anteriorment.

La sèrie e_ψ és la clau per a veure que tot mòdul formal prové d'una xarxa. Ho recollim en el següent teorema de Drinfeld, la demostració del qual pot trobar-se a [?].

Teorema 5.5. *Si $\mathbb{A} \xrightarrow{\psi} M\{\tau\}$ és un mòdul de Drinfeld sobre M de rang d i sigui e_ψ la sèrie associada al K -mòdul formal determinat per ψ . Aleshores*

- (1) e_ψ defineix una funció entera $\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$
- (2) $L_\psi = \ker(e_\psi)$ és una M -xarxa de rang d .

- (3) Si $\phi \xrightarrow{P} \psi$ és un morfisme de mòduls de Drinfeld, existeix $c \in M$ tal que $cL_\phi \subseteq L_\psi$ i el diagrama següent commuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_\infty & \xrightarrow{c} & \mathbb{C}_\infty/L_\psi \\ e_\phi \downarrow & & \downarrow e_\psi \\ \mathbb{C}_\infty & \xrightarrow{P} & \mathbb{C}_\infty \end{array}$$

- (4) El functor $\psi \mapsto L_\psi$ és invers del functor $L \mapsto L_\phi$.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA, DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA
APLICADA IV (EUPVG), AV. VÍCTOR BALAGUER S/N, 08800 VILANOVA I LA
GELTRÚ, SPAIN.

E-mail address: `vrotger@mat.upc.es`