Sistemes Lineals periòdics

November 27, 2019

Aquestes notes són un petit resum dels conceptes bàsics de sistemes lineals homogenis amb coeficients periòdics.

Considerem el sistema lineal homogeni $\dot{x} = A(t)x$, on $A(t+T) = A(t)$, contínua.

1. Si $\varphi(t)$ és solució aleshores $\varphi(t+T)$ també ho és. Conseqüentment, si $\Phi(t)$ és una matriu fonamental $\Phi(t+T)$ també.

2. Les solucions d'un sistema lineal periòdic no tenen per que ser periòdiques: exemple
$$\dot{x} = (1+\cos t)x, \text{ té solució } x(t) = \mathrm{e}^{t+\sin t}x(0).$$
Però es verifica que donada una solució $\varphi(t)$ és T-periòdica si i només si existeix un t_0 tal que $\varphi(t_0) = \varphi(t_0+T)$.
La prova és simple: com $\varphi(t)$ i $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t+T)$ són solucions, i
$$\tilde{\varphi}(t_0) = \varphi(t_0+T) = \varphi(t_0)$$
pel teorema d'existència i unicitat tenim que:
$$\varphi(t+T) = \tilde{\varphi}(t) = \varphi(t), \ \forall t$$
i per tant $\varphi(t)$ és periòdica.

3. Matriu de monodromia.
Donada una matriu fonamental $\Phi(t)$, sabem que $\Phi(t+T)$ també és una matriu fonamental, per tant existeix una matriu constant C tal que:
$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C$$
Aquesta matriu C s'anomena matriu de monodromia associada a $\Phi(t)$.

4. Si x és vep de vap 1 de la matriu de monodromia C associada a $\Phi(t)$ aleshores $\varphi(t) = \Phi(t)x$ és una solució T-periòdica.

5. La matriu de monodromia no és única, però donades C_1, C_2, matrius de monodromia aleshores existeix una matriu D tal que $C_2 = DC_1D^{-1}$ Per tant els vaps de C estan ben definits i s'anomenen multiplicadors característics.
La prova és sencilla. Considerem $\Phi_1(t)$ i $\Phi_2(t)$ matrius fonamentals i C_1, C_2 matrius de monodromia associades i per tant verifiquen:
$$\Phi_i(t+T) = \Phi_i(t)C_i, \ i = 1,2$$

Per ser $\Phi_i(t)$ matris fonamentals sabem que existeix una matriu D tal que $\Phi_2(t) = \Phi_1(t)D$

Aleshores tenim

$$\Phi_1(t)DC_2 = \Phi_2(t)C_2 = \Phi_2(t+T) = \Phi_1(t+T)D = \Phi_1(t)C_1D$$

com $\Phi_1(t)$ és invertile obtenim $DC_2 = C_1D$, per tant $C_2 = D^{-1}C_1D$

6. Si C és una matriu amb $\det C \neq 0$ aleshores existeix una matriu B tal que $\mathrm{e}^B = C$.

   La prova està basada en el fet que és suficient calcular el log. per un bloc de Jordan ja que si $C = SJS^1$ i $J = \mathrm{e}^{\tilde{B}}$ aleshores

   $$C = S\mathrm{e}^{\tilde{B}}S^{-}1 = \mathrm{e}^{S\tilde{B}S^{-1}}$$

   i la exponencial preserva els bolcs. Per un bloc $J = \lambda\mathrm{Id} + H$ amb H nilpotent de dimensió k:

   $$B = \log(J) = \log(\lambda)\mathrm{Id} + \sum_{l=1}^{l=k} \frac{(-1)^{l+1}}{l} H^l$$

7. Encara que C sigui real, $B = \log C$, pot ser complexa pero sempre existeix B real tal que $e^{2B} = C^2$.

   La prova és sencilla. Triem B tal que $e^B = C$, aleshores tenim, conjugant aquesta relació i multiplicant:

   $$e^{\bar{B}} = C,\ e^{2\Re(B)} = C^2.$$

8. **Teorema de Floquet**: Donada una matriu fonamental $\Phi(t)$ sempre existeix una matriu $P(t)$, tal que $P(t+T) = P(t)$ i una matriu constant B tal que:

   $$\Phi(t) = P(t)e^{tB}$$

   si volem B real hem de triar P que sigui $2T$ periòdica.

   Prova

   Prenem la matriu de monodromia C i B tal que $C = \mathrm{e}^{TB}$. Aleshores definim $P(t) = \Phi(t)\mathrm{e}^{tB}$ i tenim que:

   $$P(t+T) = \Phi(t+T)\mathrm{e}^{-(t+T)B} = \Phi(t)C\mathrm{e}^{-(T+t)B} = \Phi(t)\mathrm{e}^{TB}\mathrm{e}^{-(T+t)B} = P(t).$$

   Per tant $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ i $P(t)$ és T-periòdica.

9. Una propietat interesant de la matriu de monodromia ésd que ens dóna el comportament asimptòtic de les solucions.

   Sigui $\phi(t)$ tal que $\phi(t_0) = Id$ i C la seva matriu de monodromia, és a dir $C = \phi(t_0 + T)$. Suposem que donat un vector x es verifuca $C^n x \to 0$, quan $n \to \infty$.

   Aleshores $\phi(t; t_0, x) \to 0$ quan $t \to \infty$.

   Prova Recordem que la matriu fonamental verifica el Teorema de Floquet: $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$, on $P8Y$) és T-periòdica i $C = \mathrm{e}^{TB}$. Suposem que

donat un vector x es verifica $C^n x \to 0$, quan $n \to \infty$ i per provarem que $\phi(t; t_0, x) \to 0$ usant el criteri de successions.

Prenem una successió qualsevol de temps $t_i \to \infty$ i provarem que $|\phi(t_i; t_0, x)| \to 0$.

Escrivim $t_i = \bar{t}_i + n_i$ amb $\bar{t}_i \in [t_0, t_0 + T]$. Aleshores:

$$\phi(t_i; t_0, x) = \Phi(t_i)x = P(t_i)\mathrm{e}^{Bt_i}x = P(\bar{t}_i+n_i)\mathrm{e}^{\bar{t}_i+n_i}x = P(t_i)\mathrm{e}^{\bar{t}_i B}\mathrm{e}^{n_i B}x = P(t_i)\mathrm{e}^{\bar{t}_i B}C^{n_i}x \to 0$$

on hem usat que

10. Els comento que $C^n x \to 0$ si x és un vep de vap $|\lambda| < 1$.
11. Els vaps de C es deien multiplicadors característics, els de B es diuen exponents característics.
12. ESTABILITAT: Dono la definició de una solució estable i asimptòticament estable d'un sistema qualsevol
13. provo que en un sistema lineal l'estabilitat de qualsevol solució la determina la estabilitat de la solució $\varphi = 0$ del sistema homogeni.
14. $\dot{x} = Ax$ amb A matriu constant. Si tots els vaps de A tenen part real negativa aleshores el zero és asimptòticament estable. Faig exemples sencills.
15. Estudi de l'estabilitat de la edo $x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = F(t)$, $\lambda \geq 0$
16. Estudi de l'estabilitat de la edo $x'' + 2\lambda(t)x' + \omega^2(t)x = F(t)$, tot periòdic.
    - Fem primer el canvi $x = e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}u$ i surt
      $$u'' + [\omega^2(t) - \lambda(t) - 2\lambda'(t)]u = 0$$
    - Estudiem doncs
      $$x'' + f(t)x = 0$$
17. Si $Phi(t)$ és m.f. aleshores $\det Phi(t) = \det Phi(0)$
18. si prenem $\phi(0) = Id$ i $C = \phi(T)$ i anomenem $\tau =$traça C:
    (a) $|\tau| > 2$ aleshores tenim dos vaps reals i $|\lambda_1| > 1$ i $|\lambda_2| < 1$, l'origen és inestable. Trobo les solucions que tendeixen a zero i a infinit usant els vaps de C i el teorema de Floquet
    (b) $|\tau| < 2$ aleshores tenim dos vaps complexos conjugats $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ i $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, l'origen és estable, però no asimptòticament estable. Trobo les solucions i $\phi(t) = P(t)e^{tB}$ són producte de dues rotacions. solucions quasiperiòdiques.
    (c) $|\tau| = 2$ tenim $\lambda = 1$ doble. Si $C = Id$, totes les solucions son periòdiques. Si $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tenim inestabilitat i també una op.

    En cada cas uso el T floquet per excriure la forma de les solucions

Estudi de l'equació $\ddot{x} + (\omega^2 + \varepsilon\cos t)x = 0$, només els faig lo fàcil; estabilitat per ε prou petit i $\omega \neq \frac{k}{2}$, k enter.