

MMF 10 / 3 *Relativitat*

9. Nocions de relativitat general

S. Xambó

Observació de Galileu

El moviment d'una partícula en un camp gravitatori queda determinat per la posició i velocitat inicials. En particular, és independent de la massa de la partícula.

Remarca. En la pràctica és difícil observar que la poma i la ploma de Newton cauen des d'una determinada altura de la mateixa manera, ja que a més de la gravetat hi ha la resistència de l'aire i és clar que la ploma cau més lentament. L'observació queda confirmada si es fa en el buit (com ara el que hi ha a la superfície de la Lluna, on els astronautes de l'Apollo 15 van fer l'experiment: hi ha videos a Internet, que podeu trobar posant *hammer-feather* a Google).

Igualtat entre la massa gravitatòria i la inercial

La força de gravitació és

$$F = m_G g,$$

on m_G és l'anomenada *massa gravitatòria* (expressa el grau de sol·licitació de la partícula pels camps gravitatoris). Però per la segona llei de Newton també tenim

$$F = m_I a,$$

on m_I és la *massa inercial* (expressa la resistència de la partícula a ser accelerada). Per tant

$$m_G g = m_I a.$$

Però a és independent de m_I , i per tant podem prendre les unitats de manera que

$$m_G = m_I.$$

Remarca. De fet hi ha dos conceptes de massa gravitatòria, l'*activa* m_a , que crea el camp gravitatori $\mathbf{g} = -G \frac{m_a}{r^3} \mathbf{r}$, i la *passiva* m'_p , que respon al camp gravitatori segons la llei de Newton, $m'_p \mathbf{g} = -G \frac{m_a m'_p}{r^3} \mathbf{r}$. Però aquestes masses són iguals (prenent unitats apropiades), ja que per la tercera llei de Newton tenim $m_a m'_p = m_p m'_a$, és a dir, $\frac{m_a}{m_p} = \frac{m'_a}{m'_p}$.

Remarca. Amb experiments del tipus Eötvös 1880's (Dicke 1964, Braginski 1971) s'ha comprovat la igualtat $m_G = m_I$ amb una precisió de $1/10^{12}$. La igualtat és implícita en la teoria de Newton sobre les òrbites planetàries. També comprovada amb $m = E/c^2$ (acceleradors).

Com 'endevina' el camp gravitatori amb quanta força ha d'estirar dos objectes diferents per tal que tinguin la mateixa acceleració?

Perquè no passa com en el cas de la càrrega elèctrica, que no té res a veure amb la massa? (m_G és com una càrrega gravitatòria).

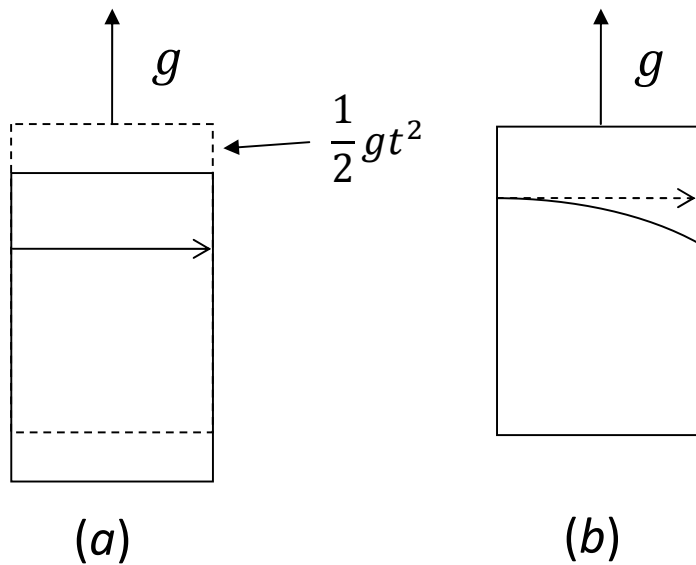
Principi d'equivalència (feble)

Hi ha d'haver una profunda relació entre *gravitació* i *acceleració*.

Per a un observador accelerat respecte d'un sistema inercial, les forces degudes a l'acceleració són indistingibles de les forces d'un camp gravitatori.

Experiments imaginaris

- Un ascensor en caiguda lliure és indistingible d'un camp gravitatori nul, és a dir, d'un sistema inercial.
- Un observador situat en un ascensor accelerat verticalment (nau espacial) experimenta el mateix que si es trobés en un camp gravitatori.



Conseqüències

En un camp gravitatori,

- La llum no es propaga en línia recta (→ l'espai-temps té curvatura, lents gravitatòries).

A la figura (a), un raig de llum 'horitzontal' emès en una cabina accelerada 'verticalment' (representada en línia discontinua), tal com el veu una cabina no accelerada (línia contínua). A la figura (b), el mateix raig de llum tal com el veu la cabina accelerada.

Els càlculs mostren que la curvatura d'un raig de llum d'una estrella que passa tangencialment per la superfície del Sol equival a un desplaçament de $1,75''$ d'arc de la seva posició ordinària (aquests desplaçaments s'han observat, des de la primera vegada el 1919, quan hi ha eclipsis totals de del Sol).

- Els rellotges es retarden (recordem l'experiment de Hafele-Keating).

Suposem que un fotó de freqüència ν_0 és emès des d'un punt en la direcció d'un camp gravitatori d'intensitat constant g . Quina és la freqüència d'aquest fotó quan ha davallat una distància h ? Per respondre a la qüestió, podem canviar, pel principi d'equivalència, el camp gravitatori per una cabina d'altura h , sotmesa a una acceleració vertical g . Quina serà la freqüència d'un fotó de freqüència ν_0 emès des del sostre de la cabina quan arriba al terra?

El fotó arriba al terra en el temps $t = h/c$. En aquest instant, la velocitat respecte d'un observador estacionari és $v = gt = gh/c$. Per l'efecte Doppler relativista, la freqüència ν_1 del fotó serà $(\sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}) \simeq \beta$

$$\nu_1 \simeq \nu_0(1 + \beta) = \nu_0 \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) = \nu_0 \left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right),$$

on $\Delta\phi = gh$ és la diferència del potencial gravitatori entre el sostre i el terra de la cabina. Si posem $t_0 = 1/\nu_0$, $t_1 = 1/\nu_1$, llavors

$$t_1 \simeq t_0 \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right), \text{ o } t_0 \simeq t_1 \left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right).$$

Exemple. Si un fotó de freqüència ν_1 és emès a la superfície d'una estrella de massa m i radi r , la freqüència ν_0 en què és rebut lluny de l'estrella serà

$$\nu_0 = \nu_1 / (1 + \Delta\phi/c^2) \simeq \nu_1 (1 - Gm/rc^2),$$

ja que $\Delta\phi = 0 - \left(-\frac{Gm}{rc^2}\right) = Gm/rc^2$.

Principi d'equivalència fort (Einstein), o de la relativitat general

Les lleis físiques [no només el moviment] en un camp gravitatori són les mateixes que en un sistema accelerat.

En particular, i en paraules del mateix Einstein:

Tots els laboratoris locals no rotatoris en caiguda lliure són equivalents per a la realització d'experiments ($ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2$).

En aquesta forma és una extensió del principi de relativitat per a sistemes inercials.

Variant (o principi de covariància)

Les lleis físiques s'han de poder expressar en una forma que sigui independent del sistema de coordenades usat per definir l'espai físic.

Remarca. La teoria relativista de la gravetat ha de ser no lineal, a causa de $E = mc^2$. En efecte, a l'energia d'un camp gravitatori correspon una massa, la qual al seu torn crea camp gravitatori. En això, la gravitació és totalment diferent del camp elèctric, ja que a l'energia d'aquest no correspon cap càrrega elèctrica. Adonem-nos d'una altra diferència: la gravitació afecta totes les partícules, mentre que l'electromagnetisme només afecte a les partícules carregades.

Equacions d'Einstein

Un observador en caiguda lliure en un camp gravitatori és com si estigués en un sistema inercial. Per tant descriu l'espai-temps per un espai de Minkowski. En qualsevol altra referència, la mètrica de Lorentz tindrà la forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$$

(usem el la convenció d'Einstein: hi ha una suma per a cada índex repetit).

Així, doncs, en el cas de Minkowski (manca de gravetat), $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Com que la condició contrària, $g_{\alpha\beta} \neq \eta_{\alpha\beta}$ indica la presència de gravetat, els coeficients $g_{\alpha\beta}$ venen a ser una substitució, en la teoria relativista de la gravitació (o relativitat general), del potencial gravitatori.

Matemàticament, doncs, l'estudi de la relativitat general comporta estudiar una varietat diferenciable de dimensió 4, $\mathcal{M}$, dotada d'una mètrica lorentziana, és a dir, un tensor simètric d'ordre 2 no degenerat de signatura

(1,3). Cal també imposar una condició d'orientació temporal, com en el cas de l'espai de Minkowski.

Les equacions d'Einstein del camp gravitatori és un sistema no lineal d'equacions en derivades parcials de segon ordre en el qual les incògnites són les $g_{\alpha\beta}$. Aquest sistema té la forma

$$E(g) = -\chi T,$$

on $E(g)$ i T són certs tensors covariants d'ordre 2 i χ una constant. El tensor T , dit d'impuls-energia, representa la densitat de la distribució de matèria, energia i moment sobre $\mathcal{M}$. El tensor $E(g)$ té la forma

$$E(g) = \text{Ricci}(g) - \frac{1}{2}R(g)g ,$$

on $R(g)$ i $\text{Ricci}(g)$ són la curvatura de Riemann de g (un escalar) i el tensor de Ricci de g . Finalment, $\chi = \frac{8\pi G}{c^2}$, on G és la constant de la gravitació de Newton.

A més de l'equació d'Einstein, un altre resultat fonamental de la relativitat general és que la trajectòria d'una partícula en caiguda lliure és una geodèsica de $(\mathcal{M}, g)$.

A més de les trajectòries corbades dels raigs de llum i del retard dels rellotges situats en un potencial gravitatori, la relativitat general ha fet d'altres prediccions que també s'han verificat. Entre elles, una de les més reeixides: l'explicació de l'anomalia (en el sentit de la teoria de Newton) de $43''$ per segle en l'avançament del periheli de Mercuri.

- Les equacions d'Einstein generalitzen l'equació de Poisson $\Delta\phi = -G\rho$, on ρ és la densitat de massa i ϕ el potencial Newtonià.
- La gravitació de Newton resulta ser una primera aproximació de la relativitat general.
- Les equacions 'Einstein són la base de la cosmologia i astrofísica moderna: estructura a gran escala de l'Univers, galàxies, formació i evolució de les estrelles, estrelles de neutrons, forats negres, quàsars, púlsars, ones gravitacionals, ...

One of the central conclusions of the two decades [c. 1955-1975] of testing relativistic gravity in the solar system is that general relativity passes every experimental test with flying colours. [p. 11]

In 1992 we find that general relativity has continued to hold up under extensive experimental scrutiny. [...] ... the predictions of general relativity are fixed; the theory contains no adjustable constants so nothing can be changed. [...] A verified discrepancy between observation and prediction would kill the theory, and another would have to be substituted in its place. Although it is remarkable that this theory, born 77 years ago out of almost pure thought, has managed to survive every test, the possibility of suddenly finding a discrepancy will continue to drive experiments for years to come. [p. 352]

Clifford M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*.
Cambridge University Press, 1993 (Revised edition), 1981 (First edition).

Referències

James B. Hartle

Gravity. An introduction to Einstein's General Relativity

Addison Wesley, 2003.

Wolfgang Rindler

Relativity. Special, General, and Cosmological

Oxford University Press, 2006 (2nd edition; 1st edition, 2001). 430 p

Benjamin Crowell

General Relativity

<http://www.lightandmatter.com/genrel/genrel.pdf>

Theodore Frankel

Gravitational curvature. An introduction to Einstein's theory

Freeman and Co., 1979. xviii+172 p.