

MMF 10 / 3 *Relativitat*

8. Notes sobre el grup de Lorentz

S. Xambó

- Preliminars
- El grup $\mathcal{L}$
- Representació matricial de l'espai de Minkowski
- L'homomorfisme $SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}$
- Tot element de $\mathcal{L}_0$ és una transformació de Lorentz
- Geometria de Lorentz

Preliminars

Sabem que la transformació de Lorentz donada per les equacions

$$x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x_1), \quad x'_1 = \gamma(x_1 - \beta x_0), \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3 \quad [*]$$

deixa invariant la forma de Lorentz

$$x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Com que la matriu $[\ast]$ és

$$\Lambda_{x,\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tenim que

$$\Lambda_{x,\beta}^T \eta \Lambda_{x,\beta} = \eta, \quad \eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Les rotacions, és a dir, les transformacions de la forma

$$x'_0 = x_0, \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

on R és una matriu ortogonal, també deixen la forma de Lorentz invariant. És a dir, es compleix que

$$\bar{R}^T \eta \bar{R} = \eta, \quad \bar{R} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & R \end{pmatrix}.$$

Com que la matriu d'una transformació de Lorentz arbitrària té la forma

$$A = \bar{R} \Lambda_{x,\beta} \bar{S},$$

on R i S són rotacions (és a dir, $R, S \in SO(3)$), resulta que

tota transformació de Lorentz deixa invariant la forma de Lorentz.

Notem a més que $\det(A) = 1$ i que $a_{00} \geq 1$.

El grup $\mathcal{L}$

Les matrius $A \in GL_4(\mathbb{R})$ que deixen invariant la forma de Lorentz, és a dir, tals que $A^T \eta A = \eta$, formen un grup $\mathcal{L}$. Aquest grup també es denota $O(1,3)$ i els seus elements compleixen $\det(A) = \pm 1$. Posarem $\mathcal{L}_+$ per denotar el subgrup de $\mathcal{L}$ definit per la condició $\det(A) = 1$, i $\mathcal{L}_-$ per denotar el subconjunt definit per la condició $\det(A) = -1$. D'aquesta manera és clar que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \sqcup \mathcal{L}_-$.

Lema. Si $A \in \mathcal{L}$, llavors $|a_{00}| \geq 1$.

Prova. Basta observar que l'element (0,0) del producte $A^T \eta A$ és igual a $a_{00}^2 - (a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2)$, d'on $a_{00}^2 - (a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2) = 1$ i, per tant, $a_{00}^2 \geq 1$.

Posarem $\mathcal{L}^\uparrow$ (respectivament $\mathcal{L}^\downarrow$) per denotar el subconjunt de $\mathcal{L}$ format per les matrius A tals que $a_{00} \geq 1$ (respectivament $a_{00} \leq -1$). També posarem $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}^\uparrow \cap \mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^\uparrow$. És immediat comprovar que $\mathcal{L}^\uparrow$ és un subgrup normal de $\mathcal{L}$. Per tant, $\mathcal{L}_0$ també és un subgrup normal, i, pel que portem dit, **tota transformació de Lorentz és un element de $\mathcal{L}_0$.**

Remarca. Les transformacions

$$I_S : [x_0, \mathbf{x}] \mapsto [x_0, -\mathbf{x}] \text{ (simetria espacial),}$$

$$I_T : [x_0, \mathbf{x}] \mapsto [-x_0, \mathbf{x}] \text{ (simetria temporal)}$$

són també elements de $\mathcal{L}$. És clar que

$$I_S \in \mathcal{L}^\uparrow \cap \mathcal{L}_- = \mathcal{L}_-^\uparrow, \quad I_T \in \mathcal{L}^\downarrow \cap \mathcal{L}_- = \mathcal{L}_-^\downarrow.$$

Si posem $I_{ST} = I_S I_T = -I$, llavors $P = \{I, I_S, I_T, I_{ST}\}$ és un subgrup de $\mathcal{L}$ isomorf a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ i

$$I_{ST} \in \mathcal{L}^\downarrow \cap \mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^\downarrow.$$

Proposició. (1) $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \sqcup \mathcal{L}_-^\uparrow \sqcup \mathcal{L}_+^\downarrow \sqcup \mathcal{L}_-^\downarrow$.

$$(2) \mathcal{L}_+^\uparrow = \mathcal{L}_0, \mathcal{L}_-^\uparrow = I_S \mathcal{L}_0, \mathcal{L}_+^\downarrow = I_T \mathcal{L}_0, \mathcal{L}_-^\downarrow = I_{ST} \mathcal{L}_0.$$

$$(3) \mathcal{L}/\mathcal{L}_0 \simeq P, \mathcal{L}/\mathcal{L}_+ \simeq \{I, I_{ST}\}.$$

(4) $\{I, I_{ST}\}$ és el centre de $\mathcal{L}$ (és a dir, el subgrup format pels elements que commuten amb tots el elements de $\mathcal{L}$).

Remarca. Si $A: [0,1] \rightarrow \mathcal{L}$ és una aplicació contínua¹ tal que $A(0) = I$, llavors $A(t) \in \mathcal{L}_0$ per a tot $t \in [0,1]$. En efecte, com que $A(0) = I \in \mathcal{L}_0$, s'ha de complir $A(t) \in \mathcal{L}_+$ per a tot t , ja que la funció contínua $\det(A(t))$ és no nul·la i positiva per $t = 0$. Anàlogament, $A(t) \in \mathcal{L}^\uparrow$, ja que la funció contínua $a_{00}(t)$ és no nul·la (sabem que en valor absolut és ≥ 1) i positiva per a $t = 0$.

¹ La topologia de $\mathcal{L} \subset GL_4(\mathbb{R}) \subset M_4(\mathbb{R})$ és la induïda per $M_4(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{16}$. Adonem-nos que $\mathcal{L}$ és un conjunt tancat d'aquest darrer espai.

Representació matricial de l'espai de Minkowski

Hem vist que tota transformació de Lorentz és un element de $\mathcal{L}_0$. L'afirmació recíproca també és certa. Per a la seva demostració, però, ens convé introduir una representació matricial de l'espai de Minkowski (la qual per altra banda té un interès que transcendeix aquesta qüestió).

Donat un $\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2, x_3] = [ct, x, y, z]$, posarem

$$\mathbf{x}^h = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_2 - ix_3 \\ x_2 + ix_3 & x_0 - x_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2,$$

on $\mathcal{H}_2$ és l'espai vectorial (real) de les *matrius hermítiques* de dimensió 2, és a dir, les matrius $\mathbf{X}$ que compleixen $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$, on $\mathbf{X}^* = \overline{\mathbf{X}}^T$. Notem que

$$\det(\mathbf{x}^h) = x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \sigma(\mathbf{x}) \text{ (forma de Lorentz).}$$

Notem també que

$$\mathbf{e}_0^h = [1, 0, 0, 0]^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0,$$

$$\mathbf{e}_1^h = [0, 1, 0, 0]^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_1,$$

$$\mathbf{e}_2^h = [0,0,1,0]^h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2,$$

$$\mathbf{e}_3^h = [0,0,0,1]^h = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_3$$

(les matrius $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ es coneixen com a *matrius de Pauli*).

L'homomorfisme $SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}$

Donat un element $a \in SL_2(\mathbb{C})$, l'aplicació

$$\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2, \quad \mathbf{X} \mapsto a\mathbf{X}a^* = \bar{a}(\mathbf{X})$$

és lineal. Aquesta aplicació lineal defineix un element $\tilde{a} \in \mathcal{L}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_4 & \xrightarrow{\tilde{a}} & \mathcal{M}_4 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathcal{H}_4 & \xrightarrow{\bar{a}} & \mathcal{H}_4 \end{array}$$

$$(\tilde{a}\mathbf{x})^h = \bar{a}(\mathbf{x}^h) = a\mathbf{x}^h a^*.$$

$$(\sigma(\tilde{a}\mathbf{x}) = \det((\tilde{a}\mathbf{x})^h) = \det(a\mathbf{x}^h a^*) = \det(\mathbf{x}^h) = \sigma(\mathbf{x})).$$

Proposició. (1) L'aplicació $SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}$, $a \mapsto \tilde{a}$, és un homomorfisme de grups.

Remarquem també que $\widetilde{-I} = \tilde{I} = Id$.

(2) El nucli de l'homomorfisme $SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}$ és $\{I, -I\}$. ^[A]

Exemple. Si $a \in SU_2$, llavors $\tilde{a} \in \bar{O}(3)$, ja que

$$(\tilde{a}\mathbf{e}_0)^h = aIa^* = I = \mathbf{e}_0^h \quad (\Leftrightarrow \tilde{a}\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0).$$

Més concretament, si $a = u_\varphi = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$, llavors $\tilde{a} = \tilde{u}_\varphi = R_{x,2\varphi}$:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_2 - ix_3 \\ x_2 + ix_3 & x_0 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & e^{-2i\varphi}(x_2 - ix_3) \\ e^{2i\varphi}(x_2 + ix_3) & x_0 - x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si $a = \rho_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, llavors $\tilde{a} = \tilde{\rho}_\alpha = R_{z,2\alpha}$:

$$(\tilde{a}\mathbf{x})^h = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_2 - ix_3 \\ x_3 + ix_4 & x_0 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

en particular

$$\begin{aligned} (\tilde{a}\mathbf{e}_3)^h &= a\mathbf{e}_3^h a^* = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_3^h, \end{aligned}$$

de manera que $\tilde{a} = \tilde{\rho}_\alpha$ és una rotació d'eix z . Que l'amplitud d'aquesta rotació és 2α resulta de

$$\begin{aligned} (\tilde{a}\mathbf{e}_1)^h &= a\mathbf{e}_1^h a^* = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} = \cos(2\alpha) \sigma_1 + \sin(2\alpha) \sigma_2 \\ &= \cos(2\alpha) \mathbf{e}_1^h + \sin(2\alpha) \mathbf{e}_2^h. \end{aligned}$$

Exemple. Considerem la matriu $a = a_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$, $k > 0$. Llavors

$$\begin{aligned} (\tilde{a}\mathbf{x})^h &= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_2 - ix_3 \\ x_3 + ix_4 & x_0 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k^2(x_0 + x_1) & x_2 - ix_3 \\ x_2 + ix_3 & k^{-2}(x_0 - x_1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per tant, $\tilde{a}\mathbf{x} = (x'_0, x'_1, x_2, x_3)$, on

$$\begin{aligned} x'_0 &= \frac{1}{2}(k^2 + k^{-2})x_0 + \frac{1}{2}(k^2 - k^{-2})x_1, \\ x'_1 &= \frac{1}{2}(k^2 - k^{-2})x_0 + \frac{1}{2}(k^2 + k^{-2})x_1. \end{aligned}$$

Posant $k = e^t$,

$$x'_0 = \cosh(2t) x_0 + \sinh(2t) x_1 ,$$

$$x'_1 = \sinh(2t) x_0 + \cosh(2t) x_1 .$$

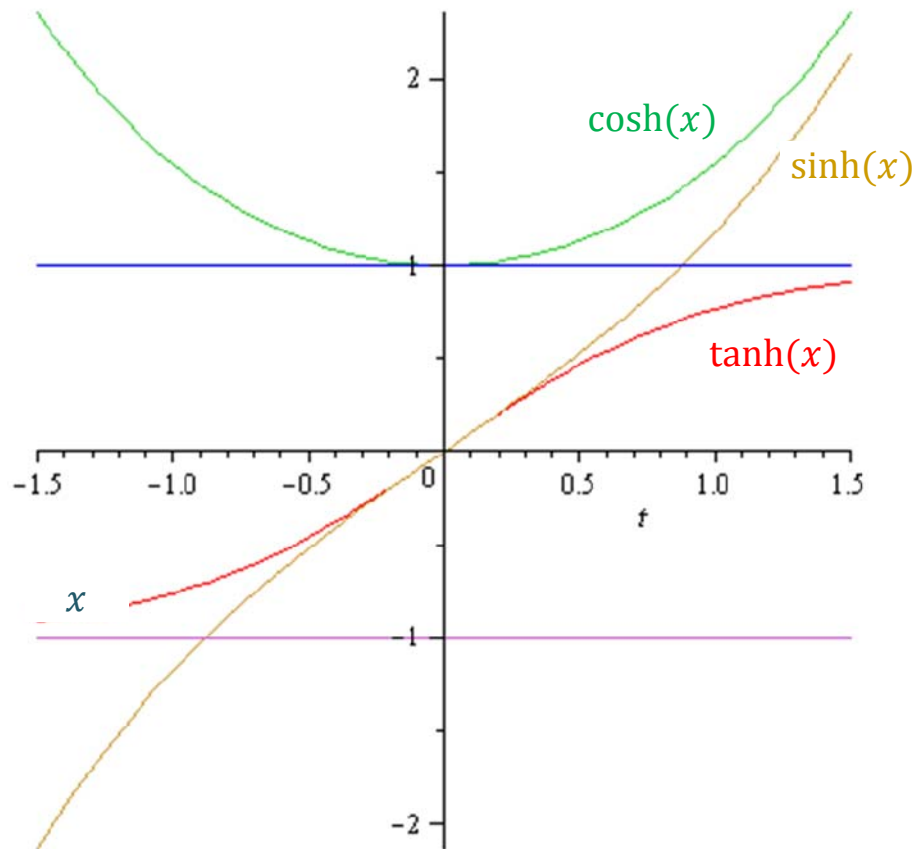
Per tant, $\tilde{a}$ és la transformació de Lorentz $L_{x,\beta}$ per la qual

$$\gamma = \cosh(2t).$$

Adonem-nos que

$$\beta = \tanh(2t),$$

ja que ha de ser $\sinh(2t) = \gamma\beta$.



Proposició. Siguin $\mathbf{u}$ un vector unitari i $v \in (-c, c)$. Donat $\mathbf{x} = [x_0, \mathbf{x}]$, posem $\mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$ i $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}$. Definim $\xi \in \mathbb{R}$ de manera que $\tanh(\xi) = \beta = v/c$ (amb la qual cosa $\cosh(\xi) = \gamma$ i $\sinh(\xi) = \gamma\beta$). Proveu que si posem $L_{\mathbf{u},\xi}$ per denotar la transformació do-

nada per les fórmules

$$x'_0 = x_0 \cosh(\xi) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) \sinh(\xi),$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{\parallel} \cosh(\xi) + x_0 \mathbf{u} \sinh(\xi) + \mathbf{x}_{\perp},$$

llavors $L_{\mathbf{u},\xi}$ és una transformació de Lorentz i $L_{\mathbf{u},\xi} \in \mathcal{L}_0$.

Proposició. La imatge de l'homomorfisme $SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}$, $a \mapsto \tilde{a}$, és un subgrup de $\mathcal{L}_0$.

Prova. Sigui $a \in SL_2(\mathbb{C})$. Volem veure que $\tilde{a} \in \mathcal{L}_0$. Per arribar a aquesta conclusió usarem que existeix una matriu $m \in GL_2(\mathbb{C})$ tal que

$$mam^{-1} = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{C}.$$

Siguin $z, w: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ funcions contínues tals que $z(0) = 1$, $z(1) = r$, $w(0) = 0$, $w(1) = s$. Posem $a(t) = m^{-1} \begin{pmatrix} z(t) & w(t) \\ 0 & z(t)^{-1} \end{pmatrix} m$. D'aquesta manera

tenim una funció contínua tal que $a(0) = I$ i $a(1) = a$. Per tant $\widetilde{a(t)} \in \mathcal{L}$ és una funció contínua de t tal que $\widetilde{a(0)} \in \mathcal{L}_0$ i $\widetilde{a(1)} = \tilde{a}$, i amb això la remarca de la pàgina 5 ens diu que $\tilde{a} \in \mathcal{L}_0$.

Tot element de $\mathcal{L}_0$ és una transformació de Lorentz

Teorema. (1) Si $A \in \mathcal{L}_0$, llavors A és una transformació de Lorentz (i recíprocament, com ja s'ha vist).

(2) La imatge de l'homomorfisme $SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}$ és $\mathcal{L}_0$.

Prova. Donada $A \in \mathcal{L}_0$, considerem $A\mathbf{e}_0 = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$. Composit amb una rotació $\bar{R} \in \overline{SO}(3)$ apropiada, podem aconseguir que $\bar{R}A\mathbf{e}_0 = [\alpha_0, \alpha, 0, 0]$, on $\alpha = +\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$. Com que $A \in \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}^\uparrow$, $\alpha_0 \geq 1$, i com que $\alpha_0^2 = \alpha^2 + 1$, $\alpha_0 = \sqrt{1 + \alpha^2}$. Si ara apliquem una transformació especial de Lorentz $L_{x,\beta}$, obtenim

$$L_{x,\beta}\bar{R}A\mathbf{e}_0 = \gamma[\alpha_0 + \beta\alpha, \beta\alpha_0 + \alpha, 0, 0].$$

Veiem, doncs, que podem aconseguir que $\beta\alpha_0 + \alpha = 0$ prenent $\beta = -\frac{\alpha}{\alpha_0} =$

$-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ (és possible, ja que $|\beta| < 1$). Notem que aleshores $\gamma =$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{1 + \alpha^2},$$

$$\alpha_0 + \beta\alpha = \sqrt{1 + \alpha^2} - \frac{\alpha^2}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}},$$

$$\text{i } \gamma(\alpha_0 + \beta\alpha) = 1,$$

de manera que $L_{x,\beta}\bar{R}A\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0$. Això mostra que existeix $S \in O(3)$ tal que $L_{x,\beta}\bar{R}A = \bar{S}$ i així

$$A = \bar{R}^{-1}L_{x,-\beta}\bar{S}.$$

Però $\bar{S} \in \overline{SO}(3)$, ja que $A, \bar{R}, L_{x,\beta} \in \mathcal{L}_+$. Per tant A és efectivament una transformació de Lorentz i això prova (1).

Per provar (2), només cal veure (atès que la proposició anterior ens diu que la imatge de $SL_2(\mathbb{C})$ està continguda a $\mathcal{L}_0$) que tot element de $\mathcal{L}_0$ és de la imatge. A tal fi, vista la demostració de la part (1) i el fet que $L_{x,-\beta} = \widetilde{\alpha_k}$, per un nombre real positiu k apropiat, basta provar que les rotacions són de la imatge de l'homomorfisme $SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}$. Ara bé, tota rotació R es pot descompondre en la forma $R = R_{z,\psi}R_{x,\theta}R_{z,\varphi}$, on φ, ψ, θ són els angles d'Euler de R , i hem vist que les rotacions de la forma $R_{z,\alpha}$ i $R_{x,\theta}$ són de la imatge de $SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}$, amb la qual cosa la prova és completa.

Corol·lari. La imatge de SU_2 per l'homomorfisme $SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}$ és $SO(3)$. D'això, i el fet que el nucli és $\{I, -I\}$, resulta que $SO(3) \simeq SU_2/\{I, -I\}$, $\mathcal{L}_0 \simeq SL_2(\mathbb{C})/\{I, -I\}$.

Geometria de Lorentz

Els resultats precedents suggereixen que l'estructura matemàtica que correspon a la relativitat especial és un espai afí real $(\mathbb{A}, V)$ de dimensió 4, dotat d'una mètrica no degenerada η de signatura (1,3). Les referències inercials corresponen a *referències ortonormals*, és a dir, referències $[O, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ respecte de les quals la matriu de la mètrica és $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Com que la matriu de canvi entre dues bases ortonormals és un element de $\mathcal{L}$, quan en realitat voldríem que fos un element de $\mathcal{L}_0$, cal també suposar que hem *orientat* V , és a dir, que hem distingit una classe $\mathcal{R}$ de bases ortonormals (entre les quatre possibles classes) per la relació d'equivalència que declara dues bases com equivalents si la matriu de canvi entre elles és de $\mathcal{L}_0$. Fet així, els sistemes inercials es corresponen amb les referències $[O, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ tals que $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ és una base de $\mathcal{R}$, el canvi de coordenades entre dos sistemes inercials és una transformació de Lorentz (és a dir, un element de $\mathcal{L}_0$), i una referència obtinguda d'un sistema inercial per una transformació de Lorentz és un sistema inercial.

Notes

[A] (Pàg. 9) Dir que $a \in SL_2(\mathbb{C})$ és del nucli equival a dir que $a\sigma_j a^* = \sigma_j$, $j = 0, 1, 2, 3$. Per a $j = 0$, la condició ens diu que $a \in SU_2$, ja que per definició SU_2 és el subgrup de $SL_2(\mathbb{C})$ format per les matrius a tals que $aa^* = I$. Aquestes matrius tenen la forma $a = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$, on $z, w \in \mathbb{C}$ i $z\bar{z} + w\bar{w} = 1$. Ara la condició per $j = 1$ ens dóna que ha de ser $z = e^{i\alpha}$ i $w = 0$, i la condició per a $j = 2$, que $\alpha = 0, \pi$, és a dir, $a = \pm I$.

Remarca. Les matrius de la forma $a = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$, on $z, w \in \mathbb{C}$ (sense la condició $z\bar{z} + w\bar{w} = 1$), amb la suma i el producte ordinaris, és el *cos dels quaternions*. Adonem-nos que si posem $z = a + bi$ i $w = c + di$, llavors

$$\begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bi & -c + di \\ c + di & a - bi \end{pmatrix} = a\mathbf{1} + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K},$$

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{I} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_1, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_3, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2.$$