

MMF 10 / 3 *Relativitat*

7. Síntesi amb formes diferencials: $dF = 0$, $\delta F = -J$

S. Xambó

- Formes diferencials
- Tensor electromagnètic
- L'equació $dF = 0$
- Operador de Hodge
- L'operador δ (codiferencial)
- Remarca sobre les teories de Yang–Mills
- Notes

El propòsit d'aquesta secció és mostrar com les equacions de Maxwell es poden escriure en termes de formes diferencials de l'espai de Minkowski.

Formes diferencials

Posem $\Lambda = \langle dx, dy, dz, d(ct) \rangle$ per denotar l'espai vectorial de les 1-formes de l'espai de Minkowski.

Si $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ és un vector, posarem $\widehat{\mathbf{k}}$ i $\widetilde{\mathbf{k}}$ per denotar les formes diferencials

$$\widehat{\mathbf{k}} = k_x dx + k_y dy + k_z dz$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{k}} &= k_x dy \wedge dz + k_y dz \wedge dx + k_z dx \wedge dy \\ &= k_z dx \wedge dy - k_y dx \wedge dz + k_x dy \wedge dz.\end{aligned}$$

Exemple. Si f és una funció, $\widehat{\partial f} = df$

Proposició a) $d\widehat{\mathbf{k}} = \widetilde{\text{rot}(\mathbf{k})} - \partial_t \widehat{\mathbf{k}} \wedge dt = \widetilde{\text{rot}(\mathbf{k})} - \frac{1}{c} \partial_t \widehat{\mathbf{k}} \wedge d(ct).$

$$\begin{aligned}\text{b) } d\widetilde{\mathbf{k}} &= \text{div}(\mathbf{k}) dx \wedge dy \wedge dz + \partial_t \widetilde{\mathbf{k}} \wedge dt \\ &= \text{div}(\mathbf{k}) dx \wedge dy \wedge dz + \frac{1}{c} \partial_t \widetilde{\mathbf{k}} \wedge d(ct).\end{aligned}$$

Si $\mathbf{k} = [\mathbf{k}, \kappa]$ és un 4-vector, posarem

$$\mathbf{k}^\# = \hat{\mathbf{k}} - c^2 \kappa dt = \hat{\mathbf{k}} - c \kappa d(ct).$$

En particular tenim

$$\mathbf{j}^\# = \hat{\mathbf{j}} - c^2 \rho dt = \hat{\mathbf{j}} - c \rho d(ct),$$

$$\mathbf{A}^\# = \hat{\mathbf{A}} - \phi dt = \hat{\mathbf{A}} - \frac{1}{c} \phi d(ct).$$

Proposició. La 1-forma $\mathbf{k}^\#$ és invariant Lorentz. En particular, $\mathbf{j}^\#$ i $\mathbf{A}^\#$ són invariants Lorentz.

Notació. Posem Λ^p , $p = 0, 1, \dots, 4$ per denotar l'espai de les p -formes diferencials. Així $\Lambda^0 = \langle 1 \rangle$ és l'anell de funcions, $\Lambda^1 = \Lambda$ i

$$\Lambda^2 = \langle dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy, dx \wedge d(ct), dy \wedge d(ct), dz \wedge d(ct) \rangle$$

$$\Lambda^3 = \langle dx \wedge dy \wedge dz, dy \wedge dz \wedge d(ct), dz \wedge dx \wedge d(ct), dx \wedge dy \wedge d(ct) \rangle$$

$$\Lambda^4 = \langle dx \wedge dy \wedge dz \wedge d(ct) \rangle$$

Tensor electromagnètic

Considerem la 2-forma $F = d\mathbf{A}^\# \in \Lambda^2$, que també és invariant Lorentz. Com que el coneixement de F és equivalent, com veurem tot seguit, al coneixement de $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$, direm que F és el *tensor electromagnètic*.

Proposició. $F = \tilde{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{E}} \wedge dt$.

Prova.
$$\begin{aligned} F = d\mathbf{A}^\# &= d\hat{\mathbf{A}} - d(\phi dt) \\ &= \widetilde{\text{rot}(\mathbf{A})} - \partial_t \hat{\mathbf{A}} \wedge dt - \partial \phi \wedge dt \\ &= \tilde{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{E}} \wedge dt, \end{aligned}$$

ja que $\text{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$, $-\partial_t \mathbf{A} - \partial \phi = \mathbf{E}$.

Remarca. La matriu de F respecte de la base $\{dx, dy, dz, dt\}$ és

$$F \equiv \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x \\ -B_z & 0 & B_x & E_y \\ B_y & -B_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}$$

Remarca. Com que $\mathbf{A}^\#$ és invariant Lorentz, F també ho és, i dir que F és invariant Lorentz equival a les relacions de transformació del camp electromagnètic.

L'equació $dF = 0$ (identitat de Bianchi)

Teorema. $dF = d(d\mathbf{A}^\#) = 0$ i aquesta identitat equival a les dues equacions de Maxwell homogènies:

$$\text{div}(\mathbf{B}) = 0 \text{ i } \text{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B}.$$

Prova. En efecte,

$$0 = dF = d(d\mathbf{A}^\#) = d(\tilde{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{E}} \wedge dt)$$

$$\begin{aligned}
&= d\tilde{\mathbf{B}} + (d\hat{\mathbf{E}}) \wedge dt \\
&= \operatorname{div}(\mathbf{B})dx \wedge dy \wedge dz + \partial_t \widetilde{\mathbf{B}} \wedge dt + \widetilde{\operatorname{rot}(\mathbf{E})} \wedge dt \\
&= \operatorname{div}(\mathbf{B})dx \wedge dy \wedge dz + (\partial_t \mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{E}))^\sim \wedge dt,
\end{aligned}$$

la qual cosa equival a dir que $\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0$ i $\partial_t \mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{E}) = 0$.

Per a les altres dues equacions de Maxwell necessitem un parell de preliminars matemàtics.

Mètrica de Minkowski de Λ^p

La mètrica de Minkowski de Λ^1 , que denotem $\langle , \rangle$, queda determinada imposant que la seva matriu en la base $dx, dy, dz, d(ct)$ és

$$\eta = \operatorname{diag}(-1, -1, -1, +1).$$

És invariant Lorentz.

La mètrica de Minkowski de Λ^p , que denotem de la mateixa manera, és la induïda per la de Λ .

Recordem, per exemple, que si a, b, c, d són 1-formes,

$$\langle a \wedge b, c \wedge d \rangle = \begin{vmatrix} \langle a, c \rangle & \langle a, d \rangle \\ \langle b, c \rangle & \langle b, d \rangle \end{vmatrix}.$$

Proposició. a) La matriu de la mètrica $\langle , \rangle$ de Λ^2 respecte de la base

$$dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy, dx \wedge d(ct), dy \wedge d(ct), dz \wedge d(ct)$$

és $\text{diag}(+1, +1, +1, -1, -1, -1)$

b) La matriu anàloga de Λ^3 respecte de la base

$$dx \wedge dy \wedge dz, dy \wedge dz \wedge d(ct), dz \wedge dx \wedge d(ct), dx \wedge dy \wedge d(ct)$$

és $\text{diag}(-1, +1, +1, +1)$.

Operador de Hodge

Posem $\omega = dx \wedge dy \wedge dz \wedge (cdt) \in \Lambda^4$.

Proposició. La forma ω és invariant Lorentz.

L'operador de Hodge $*$: $\Lambda^p \rightarrow \Lambda^{4-p}$ es defineix com l'única aplicació lineal tal que

$$\langle * \xi, \eta \rangle \omega = \xi \wedge \eta \quad \text{qualssevol que siguin } \xi \in \Lambda^p, \eta \in \Lambda^{4-p}.$$

Exemple. Vegem directament que $* dx = dy \wedge dz \wedge (cdt)$.

De la definició de $*$, i de les propietats del producte exterior, resulta que $* dx = \lambda dy \wedge dz \wedge (cdt)$, per un cert $\lambda \in \mathbb{R}$, i

$$\langle * dx, dy \wedge dz \wedge (cdt) \rangle \omega = \begin{cases} dx \wedge dy \wedge dz \wedge (cdt) = \omega \\ \langle \lambda dy \wedge dz \wedge (cdt), dy \wedge dz \wedge (cdt) \rangle \omega = \lambda \omega \end{cases}$$

ens dóna $\lambda = 1$. Procedint d'una manera similar obtenim la taula

ξ	dx	dy	dz	cdt
$* \xi$	$dy \wedge dz \wedge (cdt)$	$dz \wedge dx \wedge (cdt)$	$dx \wedge dy \wedge (cdt)$	$dx \wedge dy \wedge dz$

Exemple. Vegem com calcular $*$ ($dx \wedge dy$). De la definició de $*$, i de les propietats del producte exterior, resulta que $*$ ($dx \wedge dy$) = $\lambda dz \wedge (cdt)$, per un cert $\lambda \in \mathbb{R}$, i

$$\langle * (dx \wedge dy), dz \wedge (cdt) \rangle \omega = \begin{cases} dx \wedge dy \wedge dz \wedge (cdt) = \omega \\ \langle \lambda dz \wedge (cdt), dz \wedge (cdt) \rangle \omega = -\lambda \omega \end{cases}$$

mostra que $\lambda = -1$. Per tant, $*$ ($dx \wedge dy$) = $-dz \wedge (cdt)$. Procedint anàlogament amb els altres elements de la base de Λ^2 , obtenim la taula següent:

ξ	$dy \wedge dz$	$dz \wedge dx$	$dx \wedge dy$	$dx \wedge d(ct)$	$dy \wedge d(ct)$	$dz \wedge d(ct)$
$* \xi$	$-dx \wedge d(ct)$	$-dy \wedge d(ct)$	$-dz \wedge d(ct)$	$dy \wedge dz$	$dz \wedge dx$	$dx \wedge dy$

Proposició

1) L'operador $*$: $\Lambda^1 \rightarrow \Lambda^3$ queda determinat de la manera següent:

$$* d(ct) = dx \wedge dy \wedge dz,$$

$$* \hat{\mathbf{k}} = \tilde{\mathbf{k}} \wedge d(ct), \text{ per a qualsevol vector } \mathbf{k}.$$

2) L'operador $*$: $\Lambda^3 \rightarrow \Lambda^1$ és invers de $*$: $\Lambda^1 \rightarrow \Lambda^3$:

$$* (\tilde{\mathbf{k}} \wedge d(ct)) = \hat{\mathbf{k}},$$

$$* (dx \wedge dy \wedge dz) = cdt.$$

3) L'operador $*$: $\Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$ queda determinat de la manera següent:

$$* \tilde{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \wedge d(ct),$$

$$* (\hat{\mathbf{k}} \wedge d(ct)) = \tilde{\mathbf{k}}.$$

En particular resulta que $*^2 = -1$ a Λ^2 .

Prova. És una conseqüència immediata de les taules dels dos exemples precedents.

L'operador δ (codiferencial)

L'operador *codiferencial*, denotat δ (o d^*), és l'aplicació lineal

$$\delta: \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{p-1}$$

definida com la composició $\delta = * d *$.

Teorema. Les dues equacions de Maxwell no homogènies,

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \rho/\varepsilon_0 \text{ i } \operatorname{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E},$$

equivalen a l'equació $\delta F = -\mu_0 \mathbf{j}^\#$.

Prova. Com que $F = \tilde{\mathbf{B}} + \widehat{\mathbf{E}} \wedge dt$,

$$*F = *\tilde{\mathbf{B}} + *(\widehat{\mathbf{E}} \wedge dt) = -\widehat{\mathbf{B}} \wedge (cdt) + \frac{1}{c} \widetilde{\mathbf{E}};$$

$$d(*F) = -d\widehat{\mathbf{B}} \wedge (cdt) + \frac{1}{c} d\widetilde{\mathbf{E}}$$

$$= -\widetilde{\operatorname{rot}(\mathbf{B})} \wedge (cdt) + \frac{1}{c} \operatorname{div}(\mathbf{E}) dx \wedge dy \wedge dz + \frac{1}{c^2} \partial_t \widetilde{\mathbf{E}} \wedge d(ct)$$

$$= -\left(\widetilde{\operatorname{rot}(\mathbf{B})} - \frac{1}{c^2} \partial_t \widetilde{\mathbf{E}}\right) \wedge (cdt) + \frac{1}{c} \operatorname{div}(\mathbf{E}) dx \wedge dy \wedge dz;$$

$$\delta F = *(d(*F))$$

$$= *\left(-\left(\widetilde{\operatorname{rot}(\mathbf{B})} - \frac{1}{c^2} \partial_t \widetilde{\mathbf{E}}\right) \wedge (cdt) + \frac{1}{c} \operatorname{div}(\mathbf{E}) dx \wedge dy \wedge dz\right)$$

$$= -\left(\widetilde{\operatorname{rot}(\mathbf{B})} - \frac{1}{c^2} \partial_t \widetilde{\mathbf{E}}\right) + \operatorname{div}(\mathbf{E}) dt.$$

Per altra banda,

$$-\mu_0 \mathbf{j}^\# = -\mu_0 (\hat{\mathbf{j}} - \rho c^2 dt) = -\mu_0 \hat{\mathbf{j}} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} dt,$$

amb la qual cosa és clar que la igualtat $\delta F = -\mu_0 \mathbf{j}^\#$ equival a les igualtats

$$\text{rot}(\mathbf{B}) - \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j} \text{ i } \text{div}(\mathbf{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

que són les dues equacions no homogènies de Maxwell.

Remarca sobre les teories de Yang–Mills

Un dels set problemes de l'Institut Clay^{N1} fa referència a la l'anomenada *teoria de Yang–Mills quàntica*. Els autors de l'article en què s'explica el problema són A. Jaffe i E. Witten,^{N2} i a la primera secció, titulada *La física de les teories gauge*, podem llegir:

Les teories quàntiques de camps que han resultat ser vitals per descriure la física de les partícules elementals són les teories gauge. L'exemple clàssic de teoria gauge és la teoria de l'electromagnetisme. El grup de gauge és el grup abelià $U(1)$. Si A denota la $U(1)$ -connexió, la qual localment es pot entendre com una 1-forma de l'espai-temps, llavors la curvatura (o tensor electromagnètic) és la 2-forma $F = dA$, i les equacions de Maxwell adopten la forma $0 = dF = d^*F$. Aquí $*$ és l'operador de dualitat de Hodge [...]. Les equacions de Maxwell descriuen

campes elèctrics i magnètics i també —com va descobrir Maxwell— la propagació d'ones, a una velocitat característica, la velocitat de la llum.

Les teories de Yang—Mills, o teories gauge no abelianes, es poden descriure, a nivell clàssic, d'una manera similar, però substituint $U(1)$ per un grup compacte G . La definició de la curvatura s'ha de canviar per

$$F = dA + A \wedge A$$

i les equacions de Maxwell esdevenen les equacions de Yang—Mills, $0 = d_A F = d_A^* F$, on d_A és l'extensió G -covariant de la diferencial exterior.

Exercicis

R.7.1. Escriviu la demostració de la proposició de la pàgina 3.

R.7.2. Escriviu la demostració de la Remarka de la pàgina 5.

R.7.3. Escriviu la demostració de la proposició de la pàgina 7.

Notes

N1. L'Institut Clay ofereix, per a cada problema, un milió de dòlars com a premi al primer que el resolgui. De moment l'únic que s'ha resolt (per G. Perelman), és l'anomenada «conjectura de Poincaré». Per aquest treball, a Perelman se li va atorgar la medalla Fields a l'ICM2006, però la va rebutjar. I, segons notícies de premsa de finals de mars de 2010, també ha renunciat al milió de dòlars.

N2. Witten fou guardonat amb la medalla Fields el 1990 (ICM Kyoto) i treballa a Institut d'Estudis Avançats de Princeton, el mateix centre on Einstein treballà les dues darreres dècades de la seva vida.

A les notes ▷ 24, ▷ 25, ▷ 26 (pàg. 176-178) de l'article [Sir Michael Atiyah. Vida i obra](#) podeu trobar algunes precisions més sobre algunes d'aquestes qüestions. (A les notes ▷ 19 i ▷ 21, pàg. 174 i 175) s'explica l'àlgebra de Clifford, o àlgebra geomètrica, i l'operador de Dirac).