

MMF 10 / **3** *Relativitat*

6. Òptica relativista

S. Xambó

- **Efecte Doppler relativista**
- **Efecte Doppler transvers**
- **Sumari de 4-vectors**

Efecte Doppler relativista

Considerem una ona electromagnètica monocromàtica linealment polaritzada que es propaga en la direcció Ox , com per exemple

$$\mathbf{E} = E_0(0, e^{i(kx - \omega t)}, 0) ,$$

$$\mathbf{B} = B_0(0, 0, e^{i(kx - \omega t)}) ,$$

on $B_0 = E_0/c$ i on k i ω satisfan la relació de dispersió

$$\omega/k = c.$$

D'aquesta manera $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ satisfan les equacions de Maxwell i les direccions de polarització són $(0, E_0, 0)$ per al camp elèctric i $(0, 0, B_0)$ per al camp magnètic.

Per saber com es veurà aquesta ona en el sistema S' , podem usar les transformacions relativistes dels camps $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$. El resultat és el que segueix:

Proposició. Si posem

$$E'_0 = \gamma(E_0 - vB_0), \quad B'_0 = \gamma\left(B_0 - \frac{v}{c^2}E_0\right),$$

$$k' = \gamma\left(k - \frac{v\omega}{c^2}\right), \quad \omega' = \gamma(\omega - vk),$$

aleshores

$$\mathbf{E}' = E'_0(0, e^{i(k'x' - \omega't')}, 0),$$

$$\mathbf{B}' = B'_0(0, 0, e^{i(k'x' - \omega't')}).$$

Per tant, el sistema S' també veu una ona monocromàtica linealment polaritzada, que es propaga en la direcció $O'x'$, i amb direccions de polarització $(0, E'_0, 0)$ per al camp elèctric i $(0, 0, B'_0)$ per al camp magnètic.

Prova. La transformació del camp elèctric dóna

$$E_{x'} = E_x = 0 ,$$

$$E_{y'} = \gamma(E_y - vB_z) = \gamma(E_0 - vB_0)e^{i(kx - \omega t)},$$

$$E_{z'} = \gamma(E_z + vB_y) = 0.$$

Però $\gamma(E_0 - vB_0) = E'_0$, i

$$kx - \omega t = k(\gamma(x' + vt')) - \omega\left(\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)\right)$$

$$= \left(\gamma\left(k - \frac{v\omega}{c^2}\right)\right)x' - (\gamma(\omega - vk))t'$$

$$= k'x' - \omega't',$$

d'on $E_{y'} = E'_0 e^{i(k'x' - \omega't')}$.

Per al camp magnètic tenim:

$$B_{x'} = B_x = 0 ,$$

$$B_{y'} = \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) = 0 ,$$

$$B_{z'} = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) = \gamma \left(B_0 - \frac{v}{c^2} E_0 \right) e^{i(kx - \omega t)} = B'_0 e^{i(k'x' - \omega't')},$$

i això acaba la prova.

Corol·lari. Si $\mathbf{k}$ és el *vector d'ones* d'una ona electromagnètica monocromàtica (el vector $(k, 0, 0)$ en el cas de l'ona linealment polaritzada que hem considerat), llavors

$$\mathbf{k} = [\mathbf{k}, \omega/c^2]$$

és un 4-vector. En particular,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = -\langle \mathbf{k}, \mathbf{r} \rangle$$

és invariant Lorentz (d'aquest invariant se'n diu la *fase* de l'ona).

Remarca. És immediat comprovar que k' i ω' satisfan la relació de dispersió:

$$\frac{\omega'}{k'} = \frac{\gamma(\omega - vk)}{\gamma(k - v\omega/c^2)} = \frac{ck - vk}{k - vck/c^2} = c.$$

Notem també que $\mathbf{E}'_0 = (0, E'_0, 0)$ i $\mathbf{B}'_0 = (0, 0, B'_0)$ coincideixen amb els transformats relativistes de $\mathbf{E}_0 = (0, E'_0, 0)$ i $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$.

Les freqüències ν i ν' de l'ona electromagnètica en els sistemes S i S' són diferents. Aquest fenomen és conegut com l'efecte Doppler. Clàssicament, la fórmula que relaciona les dues freqüències és

$$\frac{\nu}{\nu'} = \frac{c+v}{c-v}.$$

En el marc de la relativitat, la fórmula és diferent i es pot deduir a partir de la proposició anterior.

Corol·lari. La relació entre les freqüències ν i ν' és

$$\frac{\nu}{\nu'} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Prova.
$$\frac{\nu}{\nu'} = \frac{\omega}{\omega'} = \frac{\omega}{\gamma(\omega - kv)} = \frac{\omega}{\gamma(\omega - \frac{\omega}{c}v)} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Efecte Doppler transvers

Si la direcció de l'ona és perpendicular a la direcció del moviment de S' , clàssicament no hi ha efecte Doppler, però en relativitat sí, com es recull en el resultat que segueix.

Corol·lari. La freqüència ν' en el sistema S' d'una ona linealment polaritzada de freqüència ν que es mou en una direcció perpendicular a Ox compleix la relació

$$\nu = \nu' / \gamma.$$

Prova. Si $k_x = 0$, $\omega' = \gamma(\omega - k_x v) = \gamma\omega$.

Sumari de 4-vectors

$\mathbf{r} = [\mathbf{r}, t]$	Posició
$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt_0} = [\gamma\mathbf{u}, \gamma]$	Velocitat
$\mathbf{p} = m_0\mathbf{u} = [m_0\gamma\mathbf{u}, m_0\gamma] = [m\mathbf{u}, m] = [\mathbf{p}, m] = [\mathbf{p}, E/c^2]$	Moment
$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt_0} = \left[\gamma^4 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \mathbf{u} + \gamma^2 \mathbf{a}, \gamma^4 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \right]$	Acceleració
$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt_0} = m_0\mathbf{a} = \left[\gamma\mathbf{f}, \gamma \frac{dm}{dt} \right]$	Força
$\mathbf{j} = [\mathbf{j}, \rho] = \rho_0\mathbf{u}$	Corrent
$\mathbf{A} = [\mathbf{A}, \phi/c^2]$	Potencial
$\mathbf{k} = [\mathbf{k}, \omega/c^2]$	Vector d'ones