

MMF 10 / 3 *Relativitat*

5. Electrodinàmica relativista

S. Xambó

- Preliminars
- Invariància de la càrrega elèctrica
- 4-Corrent
- 4-potencial
- Transformacions relativistes del camp electromagnètic
- Camp electromagnètic d'una càrrega en moviment
- Notes

Preliminars

De les transformacions de Lorentz,

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - vx/c^2),$$

$$\text{on } \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c,$$

s'obté fàcilment que

$$\partial_x = \gamma \left(\partial_{x'} - \frac{v}{c^2} \partial_{t'} \right), \quad \partial_y = \partial_{y'}, \quad \partial_z = \partial_{z'}, \quad \partial_t = \gamma(\partial_{t'} - v \partial_{x'}),$$

o les corresponents inverses

$$\partial_{x'} = \gamma \left(\partial_x + \frac{v}{c^2} \partial_t \right), \quad \partial_{y'} = \partial_y, \quad \partial_{z'} = \partial_z, \quad \partial_{t'} = \gamma(\partial_t + v \partial_x).^{\text{N1}}$$

Proposició. L'operador $\square$ és invariant Lorentz, és a dir,

$$\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 = \partial_{x'}^2 + \partial_{y'}^2 + \partial_{z'}^2 - \frac{1}{c^2} \partial_{t'}^2.$$

Invariància de la càrrega elèctrica. La valor d'una càrrega elèctrica és el mateix per a tots els observadors inercials (direm que la càrrega elèctrica és invariant Lorentz). Una evidència indirecta, però clara, d'aquest fet és que els cossos materials són elèctricament neutres a qualsevol temperatura.

4-Corrent

Sigui ρ una distribució contínua de càrregues, $\mathbf{u}$ el seu vector de velocitats i $\mathbf{j} = \rho\mathbf{u}$ (la densitat de corrent de la distribució). Definim el quadrivector de corrent, $\mathbf{j}$, per la fórmula

$$\mathbf{j} = \rho_0 \mathbf{u},$$

on ρ_0 és la densitat pròpia de la distribució, és a dir, la densitat en la referència en la qual l'element de volum que es mou a velocitat $\mathbf{u}$ està momentàniament en repòs.

Proposició. $\rho = \gamma_u \rho_0$.

Prova. Per la invariància relativista de la càrrega, $\rho d\omega = \rho_0 d\omega_0$, on $d\omega$ indica l'element de volum segons S i $d\omega_0$ l'element de volum propi. Per altra banda, $d\omega = d\omega_0/\gamma_u$, ja que des de S la direcció del sistema propi paral·lela a $\mathbf{u}$ es contreu segons el factor γ_u i les direccions perpendiculars no canvien. D'això resulta que $\rho/\gamma_u = \rho_0$, com volíem veure.

Proposició. $\mathbf{j} = [\mathbf{j}, \rho]$. En particular resulta que $[\mathbf{j}, \rho]$ és un quadrivector.

Prova. $[\mathbf{j}, \rho] = [\rho \mathbf{u}, \rho] = \frac{\rho}{\gamma_u} [\gamma_u \mathbf{u}, \gamma_u] = \rho_0 \mathbf{u} = \mathbf{j}$.

Corol·lari. Si ρ' i $\mathbf{j}' = (j_{x'}, j_{y'}, j_{z'})$ són la densitat i el corrent segons la referència S' , llavors

$$j_{x'} = \gamma(j_x - v\rho), \quad j_{y'} = j_y, \quad j_{z'} = j_z, \quad \rho' = \gamma(\rho - vj_x/c^2).$$

4-potencial

Siguin $\mathbf{A}$ i ϕ potencials vector i escalar, respectivament, d'un camp electromagnètic $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$. Atès que $\mathbf{A}$ i ϕ queden determinats a menys d'una transformació de gauge, per establir la llei de transformació de S a S' n'hi ha prou que construïm $\mathbf{A}'$ i ϕ' a partir de $\mathbf{A}$ i ϕ de manera que satisfacin les equacions de Maxwell a S' , això és, tals que

$$\square \mathbf{A}' = -\mu_0 \mathbf{j}' + \partial \mathbf{h}', \quad \square \phi' = -\frac{\rho'}{\varepsilon_0} - \partial_t h',$$

on $h' = \text{div}(\mathbf{A}') + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_{t'} \phi'$.

Teorema. Siguin ρ i $\mathbf{j}$ la densitat de càrrega i el corrent en el sistema S , i siguin $\mathbf{A}$ un potencial vector i ϕ un potencial escalar corresponents a ρ i $\mathbf{j}$ (és a dir, tals que

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} + \partial \mathbf{h} \quad \text{i} \quad \square \phi = -\rho/\varepsilon_0 - \partial_t h,$$

on $h = \text{div}(\mathbf{A}) + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \phi$ (en aquest cas $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A})$ és el camp magnètic i $\mathbf{E} = -\partial \phi - \partial_t \mathbf{A}$ és el camp elèctric).

Lavors el camp $\mathbf{A}'$ i la funció ϕ' donats per les fórmules

$$A_{x'} = \gamma \left(A_x - v \frac{\phi}{c^2} \right), A_{y'} = A_y, A_{z'} = A_z, \phi' = \gamma(\phi - vA_x) \quad [*]$$

són potencials vector i escalar, relativament a S' , de la densitat ρ' i el corrent $\mathbf{j}'$ corresponents a ρ i $\mathbf{j}$ per la transformació de Lorentz (és a dir, $\mathbf{A}'$ i ϕ' compleixen les relacions

$$\square' \mathbf{A}' = -\mu_0 \mathbf{j}' + \partial h', \square' \phi' = -\rho' / \epsilon_0 - \partial_{t'} h').$$

En altres paraules, $[\mathbf{A}, \phi/c^2]$ és un 4-vector (amb notacions x_i , aquest 4-vector es representa com $\mathbf{A} = [\phi/c, \mathbf{A}]$).

Les inverses de les fórmules [*] són

$$A_x = \gamma \left(A_{x'} + v \frac{\phi'}{c^2} \right), A_y = A_{y'}, A_z = A_{z'}, \phi = \gamma(\phi' + vA_{x'}) .$$

A més, $\mathbf{A}$ i ϕ compleixen la condició de Lorentz (és a dir, $h = 0$) si i només si $\mathbf{A}'$ i ϕ' la compleixen.

Remarca. Una manera de *conjecturar* expressions per $\mathbf{A}'$ i ϕ' és suposar que els potencials satisfan la condició de Lorentz $\text{div}(\mathbf{A}) + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \phi = 0$, és a dir, $\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z + \partial_t \left(\frac{\phi}{c^2} \right) = 0$ (recordem que sempre podem aconseguir que aquesta condició es satisfaci, potser després d'una transformació de gauge).

En efecte, substituint $\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t$ per les seves expressions en funció de $\partial_{x'}, \partial_{y'}, \partial_{z'}, \partial_{t'}$ obtenim la relació

$$\gamma \left(\partial_{x'} - \frac{v}{c^2} \partial_{t'} \right) A_x + \partial_{y'} A_y + \partial_{z'} A_z + \gamma (\partial_{t'} - v \partial_{x'}) \left(\frac{\phi}{c^2} \right) = 0 .$$

Reordenant, tenim

$$\partial_{x'} \left(\gamma (A_x - v \phi / c^2) \right) + \partial_{y'} A_y + \partial_{z'} A_z + \partial_{t'} \left(\gamma \left(\frac{\phi - v A_x}{c^2} \right) \right) = 0 ,$$

i aquesta relació ens suggereix que

$$A_{x'} = \gamma \left(A_x - v \frac{\phi}{c^2} \right), A_{y'} = A_y, A_{z'} = A_z, \phi' = \gamma (\phi - v A_x) .$$

Prova del teorema. Vegem primer que l'expressió h és invariant Lorentz, és a dir, que $h = h'$. En efecte,

$$\begin{aligned}
 h' &= \partial_{x'} A_{x'} + \partial_{y'} A_{y'} + \partial_{z'} A_{z'} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_{t'} \phi' \\
 &= \gamma^2 \left(\partial_x + \frac{v}{c^2} \partial_t \right) \left(A_x - \frac{v\phi}{c^2} \right) \\
 &\quad + \partial_y A_y + \partial_z A_z \\
 &\quad + \mu_0 \varepsilon_0 \gamma^2 (\partial_t + v \partial_x) (\phi - v A_x) \\
 &= \gamma^2 \left(\partial_x A_x - \frac{v}{c^2} \partial_x \phi + \frac{v}{c^2} \partial_t A_x - \frac{v^2}{c^4} \partial_t \phi \right) \\
 &\quad + \partial_y A_y + \partial_z A_z \\
 &\quad + \mu_0 \varepsilon_0 \gamma^2 (\partial_t \phi - v \partial_t A_x + v \partial_x \phi - v^2 \partial_x A_x) \\
 &= \gamma^2 (1 - \mu_0 \varepsilon_0 v^2) \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z + \frac{\gamma^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \partial_t \phi \\
 &= \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi = h .
 \end{aligned}$$

Ara ja podem calcular $\square' \mathbf{A}'$ i $\square' \phi'$. En el cas de $\square' \mathbf{A}'$, procedirem component a component, tot recordant que $\square' = \square$:

$$\begin{aligned}\square' A_{x'} &= \gamma(\square A_x - \frac{v}{c^2} \square \phi) \\ &= \gamma(-\mu_0 j_x + \partial_x h) + \gamma \frac{v}{c^2} (\frac{\rho}{\epsilon_0} + \partial_t h) \\ &= -\mu_0 \gamma(j_x - v\rho) + \gamma \left(\partial_x + \frac{v}{c^2} \partial_t \right) h \\ &= -\mu_0 j_{x'} + \partial_{x'} h' ;\end{aligned}$$

$$\square' A_{y'} = \square A_y = -\mu_0 j_y + \partial_y h = -\mu_0 j_{y'} + \partial_{y'} h'$$

(i anàlogament amb $A_{z'}$) ;

$$\begin{aligned}\square' \phi' &= \gamma \square \phi - \gamma v \square A_x \\ &= \gamma \left(-\frac{\rho}{\epsilon_0} - \partial_t h \right) - \gamma v (-\mu_0 j_x + \partial_x h) \\ &= -\frac{\gamma}{\epsilon_0} \left(\rho - \frac{v}{c^2} j_x \right) - \gamma (\partial_t + v \partial_x) h = -\frac{\rho'}{\epsilon_0} - \partial_{t'} h' .\end{aligned}$$

Transformacions relativistes del camp electromagnètic

Vista la llei de transformació dels potencials, podem deduir la relació entre els camps elèctric i magnètic mesurats en els sistemes S i S' .

Teorema. La relació entre els camps $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ i $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ mesurats a S i els camps $\mathbf{E}' = (E_{x'}, E_{y'}, E_{z'})$ i $\mathbf{B} = (B_{x'}, B_{y'}, B_{z'})$ mesurats a S' és la donada per les fórmules següents:

$E_x = E_{x'}$	$E_y = \gamma(E_{y'} + vB_{z'})$	$E_z = \gamma(E_{z'} - vB_{y'})$
$B_x = B_{x'}$	$B_y = \gamma\left(B_{y'} - \frac{v}{c^2}E_{z'}\right)$	$B_z = \gamma\left(B_{z'} + \frac{v}{c^2}E_{y'}\right)$

Prova. Podem expressar $\mathbf{B}$ i $\mathbf{E}$ en termes del potencial vector $\mathbf{A}$ i del potencial escalar ϕ :

$$\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}), \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A}.$$

En el sistema S' valen fórmules anàlogues per a $\mathbf{B}'$ i $\mathbf{E}'$ en termes de $\mathbf{A}'$ i ϕ' . En coordenades aquestes relacions adopten la forma

$$B_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y, \quad B_y = \partial_z A_x - \partial_x A_z, \quad B_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x$$

$$E_x = -\partial_x \phi - \partial_t A_x, \quad E_y = -\partial_y \phi - \partial_t A_y, \quad E_z = -\partial_z \phi - \partial_t A_z$$

(i fórmules anàlogues en el sistema S').

Per altra banda tenim

$$A_x = \gamma \left(A_{x'} + v \frac{\phi'}{c^2} \right), \quad A_y = A_{y'}, \quad A_z = A_{z'}, \quad \phi = \gamma (\phi' + v A_{x'}).$$

on $\mathbf{A}' = (A_{x'}, A_{y'}, A_{z'})$ i ϕ' denoten els potencials en el sistema S' . A més, tenim les relacions

$$\partial_x = \gamma \left(\partial_{x'} - \frac{v}{c^2} \partial_{t'} \right), \quad \partial_y = \partial_{y'}, \quad \partial_z = \partial_{z'}, \quad \partial_t = \gamma (\partial_{t'} - v \partial_{x'}).$$

Ara les fórmules de l'enunciat es dedueixen fent aquestes substitucions i les del grup anterior a les fórmules que donen $\mathbf{B}$ i $\mathbf{E}$, operant, i tenint en compte les fórmules que expressen $\mathbf{B}'$ i $\mathbf{E}'$ en termes de $\mathbf{A}'$ i ϕ' :

$$\begin{aligned}
E_x &= -\partial_x \phi - \partial_t A_x \\
&= -\gamma \left(\partial_{x'} - \frac{v}{c^2} \partial_{t'} \right) \phi - \gamma (\partial_{t'} - v \partial_{x'}) A_x \\
&= -\partial_{x'} \left(\gamma (\phi - v A_x) \right) - \partial_{t'} \left(\gamma \left(A_x - \frac{v}{c^2} \phi \right) \right) \\
&= -\partial_{x'} \phi' - \partial_{t'} A_{x'} \\
&= E_{x'}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_y &= -\partial_y \phi - \partial_t A_y \\
&= -\partial_{y'} (\gamma(\phi' + vA_{x'})) - \gamma(\partial_{t'} - v\partial_{x'}) A_{y'} \\
&= \gamma(-\partial_{y'} \phi' - \partial_{t'} A_{y'}) + \gamma v(\partial_{x'} A_{y'} - \partial_{y'} A_{x'}) \\
&= \gamma(E_{y'} + vB_{z'}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_z &= -\partial_z \phi - \partial_t A_z \\
&= -\partial_{z'} (\gamma(\phi' + vA_{x'})) - \gamma(\partial_{t'} - v\partial_{x'}) A_{z'} \\
&= \gamma(-\partial_{z'} \phi' - \partial_{t'} A_{z'}) + \gamma v(\partial_{x'} A_{z'} - \partial_{z'} A_{x'}) \\
&= \gamma(E_{z'} - vB_{y'}).
\end{aligned}$$

$$B_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y = \partial_{y'} A_{z'} - \partial_{z'} A_{y'} = B_{x'}.$$

$$B_y = \partial_z A_x - \partial_x A_z$$

$$= \partial_{z'} \left(\gamma \left(A_{x'} + v \frac{\phi'}{c^2} \right) \right) - \gamma \left(\partial_{x'} - \frac{v}{c^2} \partial_{t'} \right) A_{z'}$$

$$= \gamma (\partial_{z'} A_{x'} - \partial_{x'} A_{z'}) + \gamma \frac{v}{c^2} (\partial_{z'} \phi' + \partial_{t'} A_{z'})$$

$$= \gamma \left(B_{y'} - \frac{v}{c^2} E_{z'} \right).$$

$$B_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x$$

$$= \gamma \left(\partial_{x'} - \frac{v}{c^2} \partial_{t'} \right) A_{y'} - \partial_{y'} \left(\gamma \left(A_{x'} + v \frac{\phi'}{c^2} \right) \right)$$

$$= \gamma (\partial_{x'} A_{y'} - \partial_{y'} A_{x'}) - \gamma \frac{v}{c^2} (\partial_{y'} \phi' + \partial_{t'} A_{y'})$$

$$= \gamma \left(B_{z'} + \frac{v}{c^2} E_{y'} \right).$$

Camp electromagnètic d'una càrrega en moviment

Per a velocitats v petites, les transformacions de $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ del teorema anterior gairebé coincideixen amb les transformacions vectorials clàssiques:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' .$$

En tot cas, però, veiem que tant en la transformació de $\mathbf{E}$ com en la de $\mathbf{B}$ intervenen $\mathbf{E}'$ i $\mathbf{B}'$.

Un cas particularment interessant és el d'una càrrega puntual q que es mou amb velocitat uniforme v : en el sistema propi (sistema S'), hi ha camp elèctric de Coulomb $\mathbf{E}'$, però $\mathbf{B}' = 0$, mentre que en el sistema S tant $\mathbf{E}$ com $\mathbf{B}$ seran no nuls, amb la qual cosa ens adonem que **el camp magnètic generat per una càrrega en moviment és simplement un efecte relativista del camp de Coulomb.**

Vegem com precisar el contingut explícit d'aquesta afirmació.

L'expressió del camp de Coulomb $\mathbf{E}'$ creat per la càrrega q és

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \mathbf{r}' ,$$

on $\mathbf{r}'$ és el vector de posició respecte de q , en el sistema S' , del punt on mesurem $\mathbf{E}'$. En coordenades tenim:

$$E_{x'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} ,$$

$$E_{y'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} ,$$

$$E_{z'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} .$$

Si ara utilitzem les transformacions de Lorentz, les transformacions relativistes del camp elèctric i magnètic, i notem que $\mathbf{B}' = 0$, obtenim

$$E_x = E_{x'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x-vt)}{(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} ,$$

$$E_y = \gamma E_{y'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y}{(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} ,$$

$$E_z = \gamma E_{z'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z}{(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} ,$$

pel que fa al camp elèctric $\mathbf{E}$, i

$$B_x = B_{x'} = 0 ,$$

$$B_y = \gamma \left(B_{y'} - \frac{v}{c^2} E_{z'} \right) = -\gamma \frac{v}{c^2} E_{z'} = -\frac{v}{c^2} E_z ,$$

$$B_z = \gamma \left(B_{z'} + \frac{v}{c^2} E_{y'} \right) = \gamma \frac{v}{c^2} E_{y'} = \frac{v}{c^2} E_y$$

pel que fa al camp magnètic. En particular tenim

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} (0, -vE_z, vE_y) = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \wedge \mathbf{E} ,$$

que és la fórmula de què vam partir per elaborar la teoria del camp magnètic.

Passem a veure que la força $\mathbf{F}$ sobre una càrrega q' , quan la velocitat d'aquesta respecte de S és $\mathbf{u}$, ve donada per la llei de Lorentz, és a dir,

$$\mathbf{F} = q'(\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}).$$

En efecte, per la llei de transformació de les forces,

$$\begin{aligned} F_x &= F_{x'} + \frac{v}{c^2 + vu_{x'}} (u_{y'} F_{y'} + u_{z'} F_{z'}) \\ &= q' E_{x'} + q' \frac{v}{c^2 + vu_{x'}} (u_{y'} E_{y'} + u_{z'} E_{z'}) \\ &= q' E_x + q' \frac{v}{c^2 + vu_{x'}} (u_{y'} E_y / \gamma + u_{z'} E_z / \gamma) \\ &= q' E_x + q' \frac{vu_y}{c^2} E_y + q' \frac{vu_z}{c^2} E_z \\ &= q' E_x + q' (u_y B_z - u_z B_y). \end{aligned}$$

Hem usat les identitats

$$\frac{v}{c^2 + vu_{x'}} \frac{u_{y'}}{\gamma} = \frac{vu_y}{c^2}, \quad \frac{v}{c^2 + vu_{x'}} \frac{u_{z'}}{\gamma} = \frac{vu_z}{c^2},$$

que són equivalents a les fórmules

$$u_y = \frac{u_{y'}}{\gamma(1+vu_{x'}/c^2)}, \quad u_z = \frac{u_{z'}}{\gamma(1+vu_{x'}/c^2)}$$

de transformació relativista de les velocitats.

D'una manera similar podem calcular F_y :

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{F_{y'}}{\gamma(1+vu_{x'}/c^2)} = \frac{q'E_{y'}}{\gamma(1+vu_{x'}/c^2)} \\ &= \frac{q'E_y}{\gamma^2(1+vu_{x'}/c^2)} = q'(1 - vu_x/c^2)E_y \\ &= q'E_y - q'\frac{vu_x}{c^2}E_y = q'E_y - q'u_xB_z. \quad \text{N2} \end{aligned}$$

Anàlogament, $F_z = q'E_z + q'u_xB_y$.

Així, doncs,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= (q'E_x + q'(u_y B_z - u_z B_y), q'E_y - q'u_x B_z, q'E_z + q'u_x B_y) \\
 &= q'(E_x, E_y, E_z) + q'(u_y B_z - u_z B_y, -u_x B_z, u_x B_y) \\
 &= q'(\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}),
 \end{aligned}$$

com volíem demostrar.

Remarca. El camp elèctric $\mathbf{E}$ en el sistema S coincideix amb el camp de Coulomb d'una càrrega q situada en el punt $(vt, 0, 0)$ només quan γ tendeix a 1, és a dir, quan v tendeix a 0. Com que la llei de Lorentz, i la fórmula $\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \wedge \mathbf{E}$, han estat deduïdes usant aquesta interpretació relativista de $\mathbf{E}$, ens adonem que aquestes fórmules són incorrectes en la interpretació de l'electromagnetisme clàssic, ja que en aquest context $\mathbf{E}$ era el camp de Coulomb de q en sentit estricte.

Per altra banda, el camp ***B*** corresponent a la càrrega *q* és, segons hem calculat abans,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} (0, -vE_z, vE_y) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(0, -\frac{\gamma v z}{r^3}, \frac{\gamma v y}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0 q \gamma}{4\pi r^3} (0, -vz, vy) = \frac{\mu_0 q \gamma}{4\pi r^3} \mathbf{v} \wedge \mathbf{r}, \end{aligned}$$

on $\mathbf{r} = (x - vt, y, z)$. Veiem, doncs, que la fórmula $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^3} \mathbf{v} \wedge \mathbf{r}$ que vam postular com a punt de partida per al camp magnètic creat per *q* també només és certa en el límit $\gamma \rightarrow 1$. Tot i això, es pot veure que el camp magnètic creat per un corrent, calculat en el marc de la relativitat (tenint en compte, per tant, els efectes relativistes de les càrregues en moviment) obeeix a la llei de Biot—Savard d'una manera exacta.

Exercicis R.5 (Electrodinàmica relativista)

R.5.1. a) Si la velocitat d'un sistema inercial S' respecte d'un sistema inercial S és $\mathbf{v}$, proveu que les transformacions relativistes del camp electro-magnètic es poden escriure en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v} \times \mathbf{E})\right) \end{aligned}$$

on, donat un vector $\mathbf{X}$, posem $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\parallel} + \mathbf{X}_{\perp}$ per denotar la seva descomposició com a suma d'un vector paral·lel a $\mathbf{v}$, $\mathbf{X}_{\parallel}$, i un vector perpendicular a $\mathbf{v}$, $\mathbf{X}_{\perp}$.

b) Posem $\hat{\mathbf{B}} = c\mathbf{B}$. Escriviu les transformacions relativistes dels camps $\mathbf{E}$, $\hat{\mathbf{B}}$ en termes de $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$.

R.5.2. Mostreu que $\mathbf{E}^2 - \hat{\mathbf{B}}^2 = \mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2$ és un invariant Lorentz. En particular resulta que les relacions $E = cB$, $E > cB$ i $E < cB$ són invariants.

R.5.3. Mostreu que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ és invariant Lorentz. En particular resulta que si $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ són perpendiculars en una referència inercials, aleshores són perpendiculars en tota referència inercial.

R.5.4. Calculeu els invariants $\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2$ i $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ en el cas d'una ona electromagnètica monocromàtica.

R.5.5. Demostreu que si $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ en un punt i $E < cB$ (respectivament $E > cB$), llavors hi ha una referència inercial en la qual $\mathbf{E}$ (respectivament $\mathbf{B}$) s'anul·la en el punt.

Notes

N1. (Pàg. 2) Donats dos sistemes de coordenades $x_1, \dots, x_n$ i $y_1, \dots, y_n$, la component de ∂_{x_i} respecte de ∂_{y_j} és $\partial y_j / \partial x_i$, ja que si posem

$$\partial_{x_i} = \sum_k \lambda_{ik} \partial_{y_k}, \text{ llavors } \lambda_{ij} = (\sum_k \lambda_{ik} \partial_{y_k})(y_j) = \partial_{x_i} y_j.$$

2. (Pàg. 19) Hem usat la relació

$$\frac{1}{\gamma^2(1+vu_{x'}/c^2)} = 1 - vu_x/c^2,$$

que es pot establir a partir de la relació $u_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{vu_{x'}}{c^2}\right)} &= \frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{v}{c^2} \cdot \frac{u_x-v}{1-\frac{vu_x}{c^2}}\right)} \\ &= \frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{vu_x-v^2}{c^2-vu_x}\right)} = \frac{c^2-vu_x}{\gamma^2(c^2-v^2)} \\ &= 1 - vu_x/c^2. \end{aligned}$$