

MMF 10 / 3 *Relativitat*

4. Dinàmica relativista

S. Xambó

- Temps propi
- Transformació relativista de la velocitat
- Velocitat relativista (o 4-velocitat)
- Acceleració relativista (o 4-acceleració)
- Moment i massa relativista (4-moment)
- Força relativista (o 4-força)
- $E = mc^2$
- Transformació relativista de les forces
- Origen relativista del camp magnètic
- Exercicis
- Notes

Temps propi

El *temps propi* d'una partícula és el temps t_0 mesurat en el sistema propi S_0 , és a dir, en el sistema respecte del qual la partícula està en repòs instantani. Com que les transformacions de Lorentz deixen invariant la forma quadràtica de Lorentz, tenim la relació

$$c^2 dt_0^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) .$$

Dividint per $c^2 dt^2$, obtenim, si $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ és la velocitat de la partícula en el sistema S , que

$$\left(\frac{dt_0}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}{c^2} = 1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma_u^2}, \text{ d'on}$$

$$dt = \gamma_u dt_0 .^{\text{N1}}$$

Transformació relativista de la velocitat

Si $\mathbf{u}' = (u_{x'}, u_{y'}, u_{z'})$ és la velocitat de la partícula en el sistema S' , llavors

$$u_x = \frac{u_{x'} + v}{1 + u_{x'}v/c^2}, \quad u_y = \frac{u_{y'}}{\gamma(1 + u_{x'}v/c^2)}, \quad u_z = \frac{u_{z'}}{\gamma(1 + u_{x'}v/c^2)}.$$

Les relacions inverses són

$$u_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - u_xv/c^2}, \quad u_{y'} = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_xv/c^2)}, \quad u_{z'} = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_xv/c^2)}.$$

Per exemple,

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + vdt')}{\gamma(dt' + vdx'/c^2)} = \frac{dx'/dt' + v}{1 + vdx'/c^2 dt'} = \frac{u_{x'} + v}{1 + vu_{x'}/c^2}.$$

Velocitat relativista (o 4-velocitat)

Com que en aquest apartat només ens referim al sistema S , per simplificar les notacions posarem $\gamma = \gamma_u$.

Sigui $\mathbf{r} = [x, y, z, t]$ el 4-vector d'un esdeveniment en el sistema inercial S . Es defineix la *velocitat relativista*, o 4-velocitat de la partícula, per la fórmula

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt_0}$$

(derivada del 4-vector $\mathbf{r}$ respecte el temps propi t_0 de la partícula). Com que el temps propi és invariant Lorentz, $\mathbf{u}$ és un 4-vector. Tenint en compte la relació $dt = \gamma_u dt_0$, és clar que

$$\mathbf{u} = \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} = [\gamma u_x, \gamma u_y, \gamma u_z, \gamma] = [\gamma \mathbf{u}, \gamma].$$

Remarca. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = c^2.$ ^{N2}

Acceleració relativista (o 4-acceleració)

Es defineix l'*acceleració relativista* de la partícula per la fórmula

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt_0}.$$

És un 4-vector i es compleix

$$\mathbf{a} = \gamma \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \gamma \left[\frac{d(\gamma \mathbf{u})}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right].$$

Com que

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2}, \quad \text{N3}$$

on $\mathbf{a}$ és l'acceleració de la partícula respecte del sistema S ,

$$\mathbf{a} = \left[\gamma^4 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \mathbf{u} + \gamma^2 \mathbf{a}, \gamma^4 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \right].$$

Remarca. Derivant la relació $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = c^2$ respecte del temps propi s'obté $\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle = 0$.

Moment relativista (4-moment)

Definim el *moment relativista*, o 4-moment, d'una partícula com

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{u} ,$$

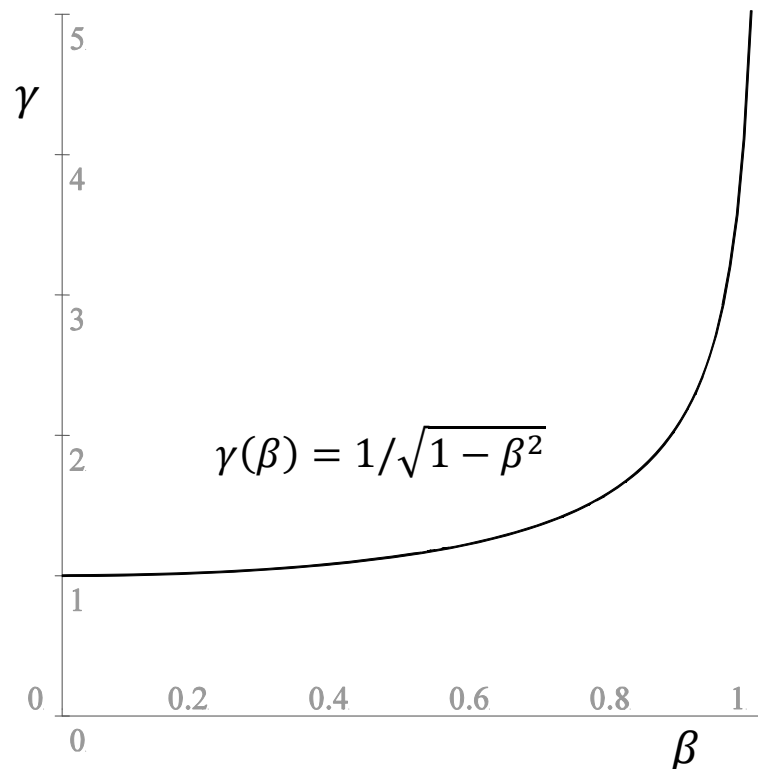
on m_0 és una constant positiva anomenada *massa pròpia*, o *massa en repòs* de la partícula.

Com que $\mathbf{u} = [\gamma \mathbf{u}, \gamma]$,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= m_0 \mathbf{u} = [m_0 \gamma \mathbf{u}, m_0 \gamma] \\ &= [m \mathbf{u}, m] = [\mathbf{p}, m] , \end{aligned}$$

on hem posat

$$m = m_0 \gamma , \quad \mathbf{p} = m \mathbf{u} .$$



Direm que m és la *massa relativista* de la partícula, respecte del sistema S , i que $\mathbf{p}$ és el 3-moment. Quan $u \ll c$, $m \simeq m_0$, i $\mathbf{p}$ és el 3-moment newtonià d'una partícula de massa m_0 i velocitat $\mathbf{u}$.

Notem, però, que m tendeix molt ràpidament a infinit qual u s'apropa a c (quan $\beta = u/c$ s'apropa a 1).^{N4}

Com que la norma de Lorentz de $\mathbf{u}$ és c^2 , també es compleix que

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = m_0^2 c^2 .$$

Com per altra banda tenim

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = c^2 m^2 - \mathbf{p}^2 ,$$

per definició del producte escalar de Lorentz, resulta que

$$\mathbf{p}^2 = c^2 (m^2 - m_0^2) .$$

Força relativista (o 4-força)

La *força relativista*, o 4-força, d'una partícula es defineix per la fórmula

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt_0} = m_0 \mathbf{a} ,$$

on $\mathbf{p}$ és el 4-moment de la partícula, t_0 el seu temps propi i $\mathbf{a}$ la 4-acceleració. Així, doncs,

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt_0} = \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma \left[\frac{d\mathbf{p}}{dt}, \frac{dm}{dt} \right] .$$

Si posem

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

(direm que és la 3-força respecte de S), aleshores

$$\mathbf{f} = \left[\gamma \mathbf{f}, \gamma \frac{dm}{dt} \right] .$$

La validesa de la fórmula $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ és avui fora de tot dubte, com ho posa de manifest el fet que és la base dels càlculs que regulen el comportament dels acceleradors de partícules, ginyes en els quals es treballa molt sovint amb velocitats molt properes a c , i, per tant, amb factors γ molt grans.

Remarca. Atès que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle = 0$, també es compleix que $\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle = 0$.

$$\boxed{E = mc^2}$$

Anteriorment hem establert que

$$\mathbf{a} = \left[\gamma^4 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \mathbf{u} + \gamma^2 \mathbf{a}, \gamma^4 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \right].$$

Tenint en compte això i la relació $m_0 \mathbf{a} = \mathbf{f} = \left[\gamma \mathbf{f}, \gamma \frac{dm}{dt} \right]$, obtenim, igualant components,

$$\gamma \mathbf{f} = m_0 \gamma^4 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \mathbf{u} + m_0 \gamma^2 \mathbf{a}, \quad \gamma \frac{dm}{dt} = m_0 \gamma^4 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2},$$

d'on

$$\mathbf{f} = m_0 \gamma^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \mathbf{u} + m_0 \gamma \mathbf{a}, \quad \frac{dm}{dt} = m_0 \gamma^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2}.$$

Per tant

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}}{c^2} &= m_0 \gamma^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \frac{u^2}{c^2} + m_0 \gamma \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} = m_0 \gamma^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \left(\frac{u^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) \\ &= m_0 \gamma^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} = \frac{dm}{dt} \end{aligned}$$

(notem que $\frac{u^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} = 1$). És a dir,

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}.$$

Integrant entre 0 i t , i posant T per indicar la integral del segon membre, obtenim (suposant que la partícula està en repòs per a $t = 0$),

$$T = (m - m_0)c^2 = m_0(\gamma - 1)c^2.$$

En particular, T és una funció que només depèn de u , $T = T(u)$. Com que en mecànica de Newton T seria l'energia cinètica de la partícula, és natural dir que T és *l'energia cinètica relativista*. Observem que

$$m = m_0\gamma = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^4} + \dots \right),$$

d'on resulta que

$$T = m_0 \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^2} + \dots \right) = \frac{1}{2} m_0 u^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right),$$

de manera que per a velocitats $u \ll c$,

$$T \simeq \frac{1}{2}m_0u^2 ,$$

que és l'energia cinètica newtoniana d'una partícula de massa m_0 que es mou amb velocitat u .

La igualtat $mc^2 = m_0c^2 + T$, que implica $(\Delta m)c^2 = \Delta T$, i el fet que T sigui una energia, van dur a Einstein a postular que hi ha una equivalència entre la massa m d'una partícula i la seva energia E , segons la fórmula

$$E = mc^2 .$$

En particular, $E = m_0c^2$ per a una partícula en repòs. Aquestes relacions entre massa i energia s'han comprovat repetidament en circumstàncies diverses, com ara en els casos d'aniquilació d'una partícula i la seva antipartícula, en les reaccions nuclears, o en els acceleradors de partícules.

Transformació relativista de les forces

Amb la relació $E = mc^2$ entre massa i energia, podem escriure el 4-moment en la forma

$$\mathbf{p} = [\mathbf{p}, m] = [\mathbf{p}, E/c^2] .$$

Com que és un 4-vector, la transformació al sistema de referència S' es fa mitjançant les transformacions de Lorentz, és a dir,

$$p_x = \gamma \left(p_{x'} + v \frac{E'}{c^2} \right), \quad p_y = p_{y'}, \quad p_z = p_{z'}, \quad \frac{E}{c^2} = \gamma \left(\frac{E'}{c^2} + \frac{vp_{x'}}{c^2} \right)$$

(la darrera es pot escriure $E = \gamma(E' + vp_{x'})$).

Partint d'aquestes expressions, la transformació relativista de les forces s'obté derivant respecte de t :

$$f_x = f_{x'} + \frac{v}{c^2 + vu_{x'}} (u_{y'} f_{y'} + u_{z'} f_{z'}) , \quad \text{N5}$$

$$f_y = \frac{f_{y'}}{\gamma(1 + vu_{x'}/c^2)}, \quad f_z = \frac{f_{z'}}{\gamma(1 + vu_{x'}/c^2)} .$$

Origen relativista del camp magnètic

Volem posar de manifest d'una manera intuïtiva, encara que només sigui en un cas particular, l'origen relativista del camp magnètic (el tractament general s'exposarà més endavant). Ens basarem en el fet que **la càrrega elèctrica és un invariant per a les transformacions de Lorentz**.

Suposem primer que tenim una densitat lineal de càrrega λ (constant) en un fil rectilini infinit al llarg de l'eix Ox del sistema S . Quina densitat lineal de càrrega λ' observarà el sistema mòbil S' ?

Com que la longitud observada des de S' corresponent a una longitud l de S és $l' = l/\gamma$, i que la càrrega és invariant, tenim $\lambda' = \gamma\lambda$.

Sigui ara I és un corrent constant en un fil conductor rectilini i infinit, disposat al llarg de l'eix Ox , i elèctricament neutre (des del punt de vista de S). Sigui v la velocitat de les càrregues mòbils ($+e$). Aleshores

$$I = Nev,$$

on N és el nombre de càrregues $+e$ per unitat de longitud i, per tant, $\lambda = Ne$ és la densitat lineal de les càrregues positives.

Aquest corrent produeix un camp magnètic azimuthal $\mathbf{B}$ que, a una distància r té mòdul

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 Nev}{2\pi r}$$

(Llei de Biot–Savart). La força sobre una partícula carregada $(+q)$ que es mou paral·lelament a l'eix Ox , a una distància r i amb velocitat v , té mòdul

$$F = qvB$$

i està dirigida perpendicularment envers el corrent (Llei de Lorentz). Utilitzant l'expressió de B ,

$$F = \frac{\mu_0 q Nev^2}{2\pi r}.$$

Com veurà la situació un sistema S' que es mogui a velocitat v ? (podem suposar, doncs, que S' és el sistema propi de la càrrega puntual).

Des del punt de vista de S , el corrent I està format per una densitat lineal de càrrega Ne que es mou amb velocitat v cap a la dreta. Les càrregues fixes $-e$ tenen una densitat lineal $-Ne$ (per la neutralitat del fil).

Per a l'observador de S' , la densitat de les càrregues negatives, com hem vist, és $-\gamma Ne$ (perquè les veu mòbils). En canvi, la densitat que observa de càrregues positives és $\frac{1}{\gamma} Ne$, perquè les veu fixes. Per tant, S' veu que el conductor està carregat amb una densitat lineal

$$\lambda' = \left(-\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) Ne = -\gamma \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) Ne = -\gamma \frac{v^2}{c^2} Ne = -\gamma \frac{Ne v^2}{c^2}.$$

Així S' veu una densitat de càrrega negativa i per tant q , essent una càrrega positiva, experimenta una força de Coulomb dirigida perpendicularment cap al fil, de mòdul:

$$F' = \frac{q\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{q\gamma Ne v^2}{2\pi\epsilon_0 r c^2} = \gamma q \frac{\mu_0 I}{2\pi r} v = \gamma q v B = \gamma F.$$

Veiem, doncs, que aquesta expressió, llevat el factor γ (que és, per altra banda, el que correspon a la transformació relativista de la força), coincideix amb la de la llei de Biot—Savart.

Exercicis

R.4.1. Apliqueu la llei de transformació de velocitats per demostrar la fórmula de l'aberració de llum (R.2, pàg. 10).

R.4.2. La velocitat d'una partícula respecte del sistema S' és $\mathbf{u}' = \frac{c}{3}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Si la velocitat de S' respecte de S és $v = \frac{4c}{5}$, trobeu la velocitat $\mathbf{u}$ respecte de S i l'angle que forma amb l'eix x .

R.4.3. En una certa referència inercial, dues partícules A i B són disparades des d'un mateix punt i amb la mateixa velocitat v , però en direccions perpendiculars. Calculeu quina és la velocitat relativista d'una partícula respecte de l'altra.

R.4.4. Una partícula de massa m i càrrega q està immersa en un camp elèctric uniforme $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$. Suposant que la partícula està inicialment en repòs a l'origen, proveu que la seva trajectòria relativista és

$$x(t) = \frac{mc^2}{qE} \left(\sqrt{1 + \frac{q^2 E^2}{m^2 c^2} t^2} - 1 \right).$$

Comproveu que per $t \rightarrow \infty$, la velocitat de la partícula no tendeix a infinit, sinó que tendeix a c .

Notes

N1. Temps propi d'una partícula (pàg. 2). Si una partícula es mou segons la llei

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$$

relativament al sistema S , i $\boldsymbol{u} = \dot{\boldsymbol{x}}(t)$ és la seva velocitat, llavors el temps propi de la partícula transcorregut entre $t = a$ i $t = b$ ve donat per

$$\int_a^b dt_0 = \int_a^b \frac{dt}{\gamma_u}.$$

Així és com es van calcular els efectes cinemàtics en el retard dels rellotges en l'experiment de Hafele–Keating (v. **R.2**).

N2. (Pàg. 4) $c^2\gamma^2 - \gamma^2u^2 = c^2\gamma^2(1 - u^2/c^2) = c^2.$

N3. (Pàg. 5) $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{\boldsymbol{u}^2}{c^2}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\boldsymbol{u}^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(-2 \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}}{c^2}\right) = \gamma^3 \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}}{c^2}.$

N4. (Pàg. 7) Alguns exemples: per a la velocitat de la Terra al voltant del Sol ($u \simeq 30$ km/h), $\gamma = 1.000000005$; per $u = 0.1c$, $\gamma = 1.005$; per $u = 0.99c$, $\gamma \simeq 7$. Els factors γ més grans que es coneixen corresponen a raigs còsmics (especialment protons) d'origen extragalàctic, possiblement produïts en supernoves (explosions d'estrelles).

N5. (Pàg. 13)
$$f_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{\gamma(dp_{x'} + vdm')}{\gamma(dt' + v\frac{dx'}{c^2})} = \frac{f_{x'} + \frac{vdm'}{dt'}}{1 + \frac{vu_{x'}}{c^2}}$$

$$= \frac{f_{x'} + v(f_{x'}u_{x'} + f_{y'}u_{y'} + f_{z'}u_{z'})/c^2}{1 + vu_{x'}/c^2}$$

$$= \frac{c^2 f_{x'} + v f_{x'} u_{x'} + v(f_{y'} u_{y'} + f_{z'} u_{z'})}{c^2 + v u_{x'}}$$

$$= f_{x'} + \frac{v(f_{y'} u_{y'} + f_{z'} u_{z'})}{c^2 + v u_{x'}}.$$

$$f_y = \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp_{y'}}{\gamma(dt' + vdx'/c^2)} = \frac{f_{y'}}{\gamma(1 + vu_{x'}/c^2)}, \text{ i anàlogament per } f_z.$$