

# MMF 10 / **3 *Relativitat***

## 3. Espai de Minkowski

S. Xambó

- **Forma de Lorentz i mètrica de Minkowski**
- **Quadrivectors**
- **Diagrames de Minkowski**
- **Paradoxa dels bessons**
- **Exercicis**
- **Notes**

## Forma de Lorentz i mètrica de Minkowski

Les transformacions de Lorentz deixen invariant la forma quadràtica

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2),$$

anomenada *forma de Lorentz*.<sup>N1</sup> En resulta que també deixen invariant el producte escalar

$$\langle [x_1, y_1, z_1, t_1], [x_2, y_2, z_2, t_2] \rangle = c^2 t_1 t_2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2),$$

anomenat *mètrica de Minkowski*.

Relativament a les coordenades  $x_0, x_1, x_2, x_3$ , la forma de Lorentz s'escriu

$$x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = x_0^2 - \mathbf{x}^2.$$

## Separació entre esdeveniments

La *separació (quadràtica)* entre dos esdeveniments  $[x_1, y_1, z_1, t_1]$  i  $[x_2, y_2, z_2, t_2]$  es defineix com

$$\sigma = c^2 \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2),$$

on  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$  i  $\Delta z = z_2 - z_1$ . La separació és un invariant Lorentz.

Si  $\sigma > 0$ , diem que la separació dels esdeveniments és de *tipus temps* o *temporal*. Per exemple, per a dos esdeveniments que tenen lloc en un mateix punt en temps diferents es compleix que  $\sigma = c^2 \Delta t^2 > 0$ , on  $\Delta t$  és el temps transcorregut entre els dos esdeveniments. L'afirmació recíproca és certa en una referència apropiada (**Exercici: R.3.1**).

Si  $\sigma < 0$ , diem que la separació dels esdeveniments és (de tipus) *espacial*. Per exemple, per a dos esdeveniments que tenen lloc en un mateix instant en punts diferents es compleix que  $\sigma = -(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) < 0$ . L'afirmació recíproca és certa en una referència apropiada (**Exercici: R.3.2**).

Si  $\sigma = 0$ , diem que la separació dels esdeveniments és *nul·la*, o de *tipus llum*, o *isòtropa*. Per exemple, si un fotó emès en un punt  $[x_1, y_1, z_1]$  en un instant  $t_1$  arriba al punt  $[x_2, y_2, z_2]$  en l'instant  $t_2$ , aleshores la separació dels esdeveniments  $[x_1, y_1, z_1, t_1]$  i  $[x_2, y_2, z_2, t_2]$  és nul·la.

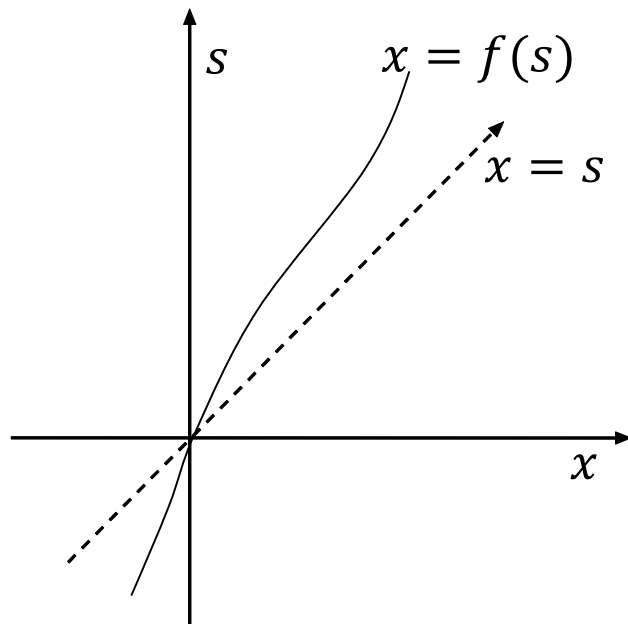
## Quadrivectors

Un *quadrivector*, o simplement *4-vector*, és una correspondència  $\mathbf{v}$  que assigna un vector  $\mathbf{v}_S \in \mathbb{R}^4$  per a cada sistema inercial  $S$  de manera que

$$\mathbf{v}_{S'} = \Lambda_{S,S'} \mathbf{v}_S$$

qualssevol que siguin els sistemes inercials  $S$  i  $S'$ , on  $\Lambda_{S,S'}$  és la transformació de Lorentz de  $S$  a  $S'$ .

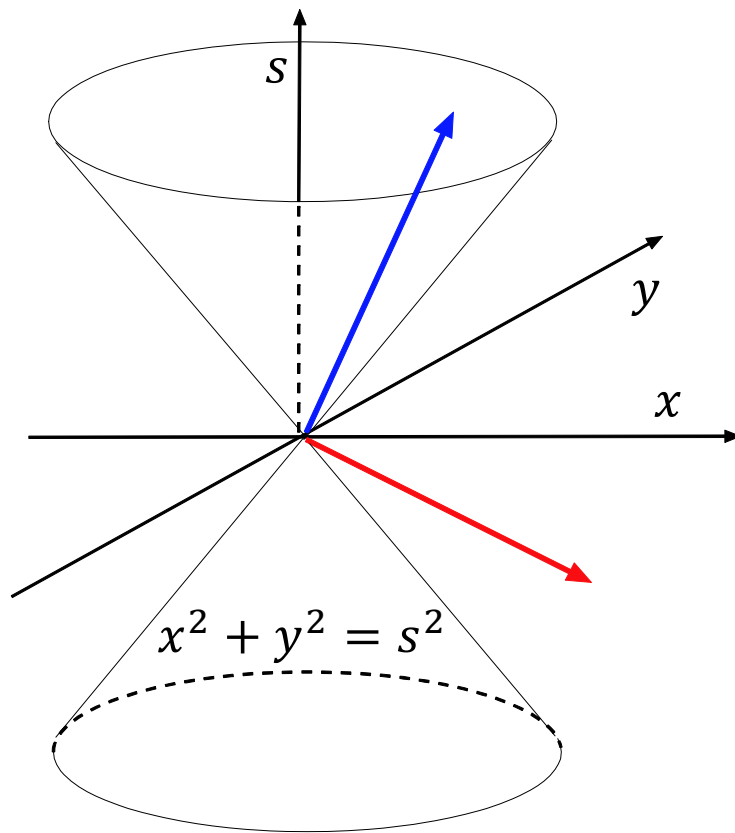
Per exemple, la posició i el temps d'un esdeveniment donat respecte d'una referència inercial  $S$ , diguem  $[x, y, z, t]_S$ , és un 4-vector, per definició de les transformacions de Lorentz.



## Diagrames de Minkowski

En la figura hem representat l'eix  $x$  d'un sistema inercial  $S$  i, perpendicularment, un eix per a  $s = ct$ .<sup>N2</sup> En aquest pla podem representar els esdeveniments que tenen lloc en un punt de l'eix  $x$  en un cert instant del temps  $t = s/c$ . Si una partícula es mou sobre l'eix de les  $x$  segons la

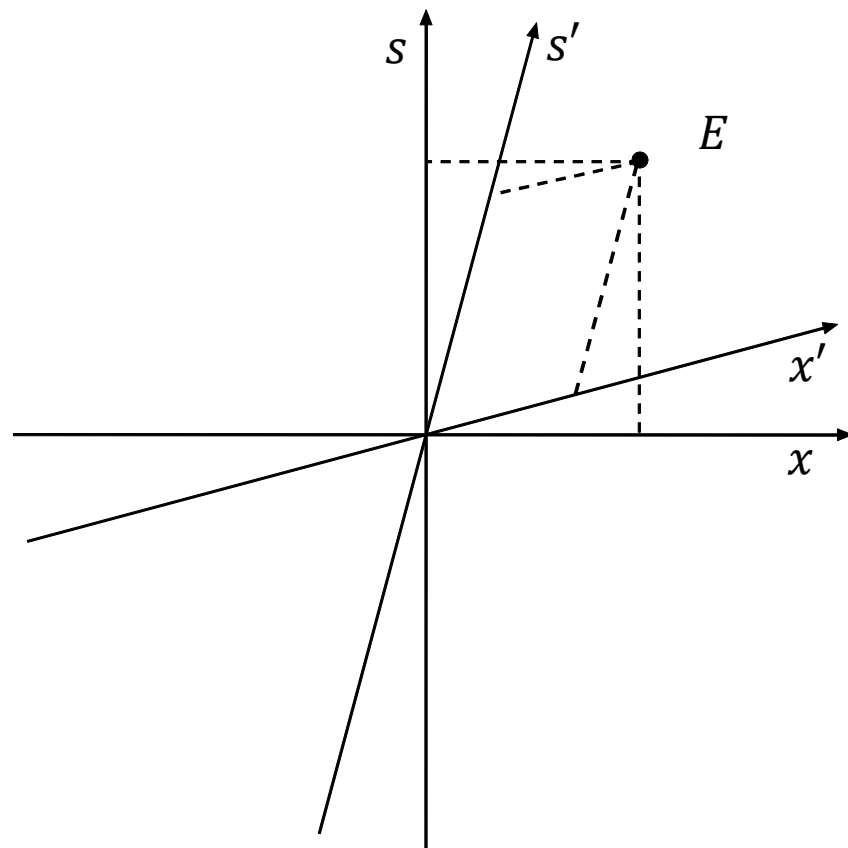
funció  $x = f(s)$ , llavors els esdeveniments  $(f(s), s)$  formen la **línia d'univers** de la partícula. És la gràfica de  $f$ , però amb l'eix  $s$  com a eix d'abscisses i l'eix  $x$  com a eix d'ordenades. Per exemple,  $x = k$ ,  $k$  constant, és la línia d'univers d'una partícula que està en repòs en el punt  $x = k$ . Anàlogament,  $x = s$  és la línia d'univers d'un fotó que es mou sobre l'eix de les  $x$  i que passa per l'origen per a  $s = 0$ . Com que la velocitat de la llum ( $c = 1$  amb les notacions presents) és el límit superior de les velocitats possibles, el pendent de la línia d'univers d'una partícula respecte de l'eix  $s$  ha de ser  $< 1$  arreu. Per als fotons, aquest pendent és 1 arreu.



Si en lloc de moviments sobre l'eix  $x$  considerem moviments en el pla  $xy$ , llavors per representar els esdeveniments sobre aquest pla necessitem tres eixos:  $x, y, s$ . La *línia d'univers* d'una partícula que es mou en el pla  $xy$  és una corba donada per equacions paramètriques  $s \mapsto (x(s), y(s))$ . El paper que feia la recta  $x = s$  ara el fa el con d'equació  $x^2 + y^2 = s^2$ , del qual en direm *con de llum*. Les generatrius d'aquest con

són les línies d'univers dels fotons que passen per l'origen per a  $s = 0$ . Per exemple, a fletxa vermella representa la trajectòria d'un fotó en el pla  $xy$  i la blava la corresponent línia d'univers.

Naturalment, la representació de Minkowski es 4-dimensional si tenim en compte les tres coordenades d'espai  $x, y, z$ .

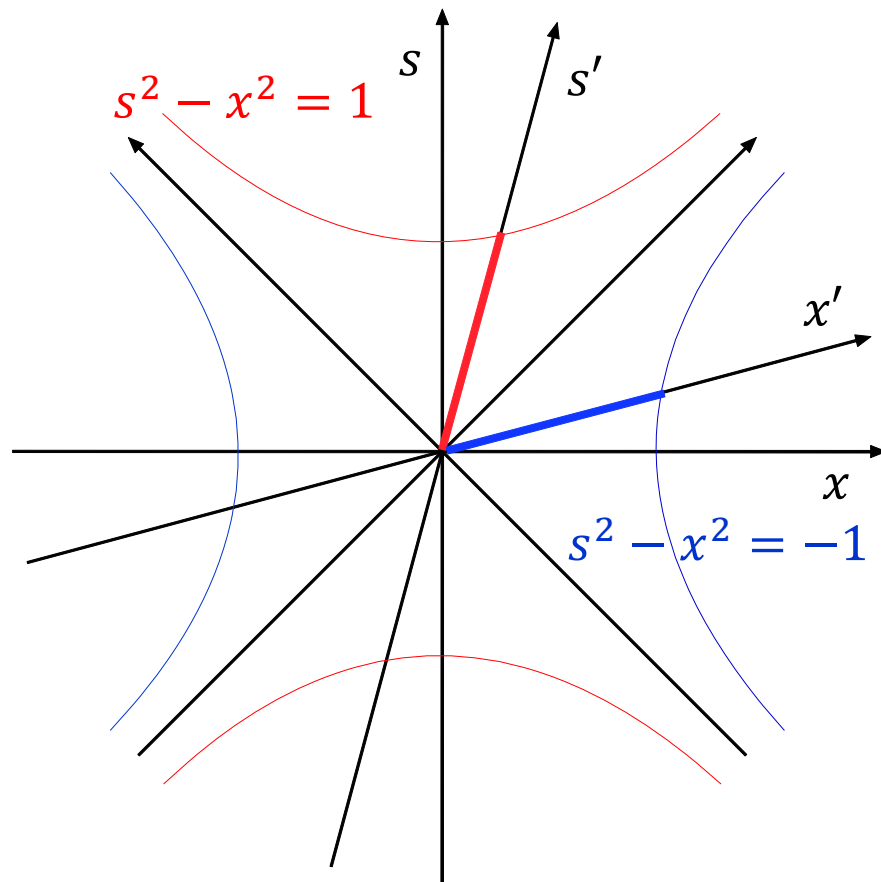


**Representació dels eixos de  $S'$ .** Considerem el pla de Minkowski  $xs$  corresponent a un sistema inercial  $S$ . Considerem un sistema inercial  $S'$  que es mou a velocitat uniforme  $\beta$  sobre l'eix  $x$ , i de manera que els orígens de  $S$  i  $S'$  coincideixen per  $s = s' = 0$ . D'aquesta manera les transformacions de Lorentz són

$$x' = \gamma(x - \beta s), \quad s' = \gamma(s - \beta x).$$

La línia d'univers en el pla  $xs$  de l'origen de  $S'$  és  $x = \beta s$ , o bé  $x' = 0$ . Com que  $x' = 0$  és l'eix  $s'$  del pla  $x's'$ , la denotem per  $s'$  (vegeu la figura). Notem que el seu pendent respecte de l'eix  $s$  és  $\beta$ . Anàlogament, a l'eix  $x'$  de  $S'$ , que és  $s' = 0$ , li correspon la recta  $s = \beta x$ , que té pendent  $\beta$  respecte de l'eix  $x$ .

A la figura anterior també s'indica la relació entre un esdeveniment  $E$  i les seves coordenades respecte de  $S$  i  $S'$ , però observem que encara no sabem com representar les unitats de  $x'$  i de  $s'$ .



La determinació d'unitats sobre  $x'$  i  $s'$ , en termes del pla  $xs$ , és immediata a partir de la igualtat

$$s'^2 - x'^2 = s^2 - x^2$$

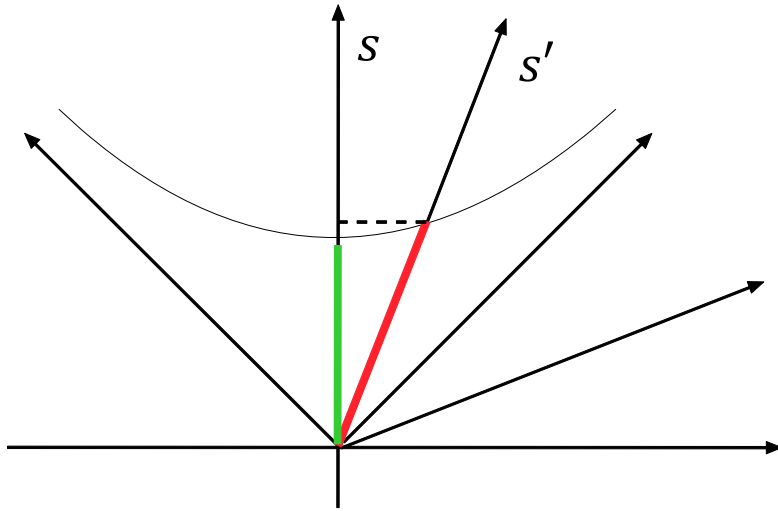
(invariància Lorentz de la separació quadràtica).

En efecte, la unitat sobre l'eix  $s'$  és l'esdeveniment  $(x' = 0, s' = 1)$ , amb la qual cosa veiem que la unitat buscada (segment vermell de la figura) no és

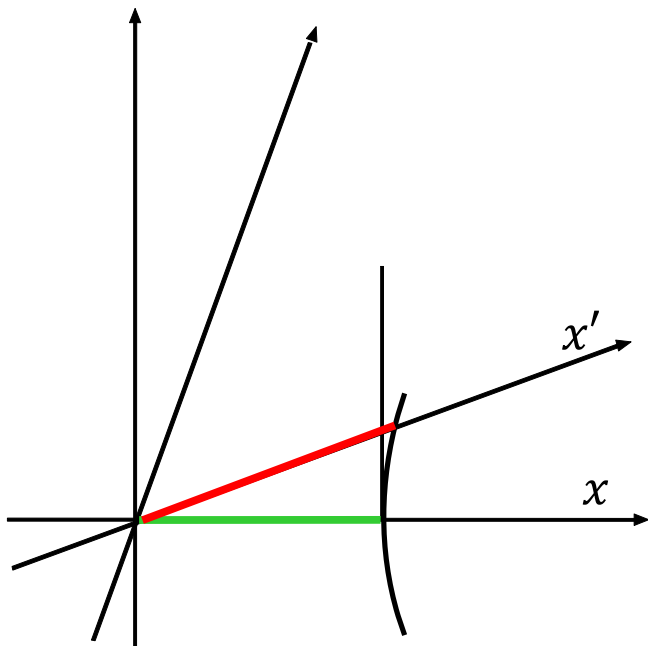
més que la intersecció de l'eix  $s'$  amb la branca de la hipèrbola  $s^2 - x^2 = 1$  corresponent a  $s > 0$ . La unitat sobre l'eix  $x'$  (segment blau de la figura)



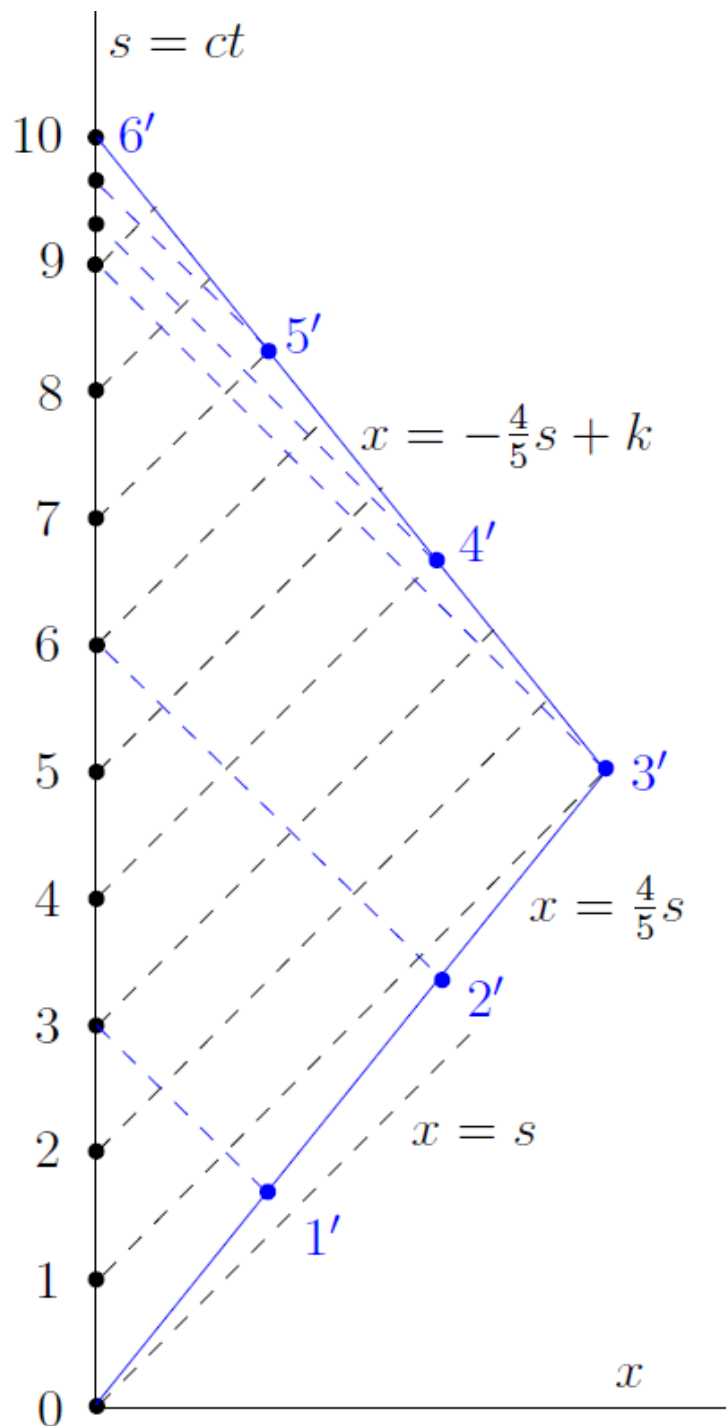
es determina d'una manera similar: és la intersecció de l'eix  $x'$  amb la hipèrbola  $s^2 - x^2 = -1$  ( $\Leftrightarrow x^2 - s^2 = 1$ ).



**Retard dels rellotges.** Amb el diagrama de Minkoski, el retard dels rellotges queda visualitzat com a la figura: a la unitat sobre l'eix  $s'$  ( $x' = 0, s' = 1$ ) (segment vermell), li correspon un segment sobre l'eix  $s$  superior a la unitat d'aquest eix (segment verd).



**Contracció de longituds.** El segment verd de la figura representa la unitat sobre l'eix  $x$  i el vermell sobre l'eix  $x'$ . Com que la línia d'univers de la unitat de l'eix  $x$  és la recta  $x = 1$ , veiem que  $S'$  li atribueix una longitud inferior.



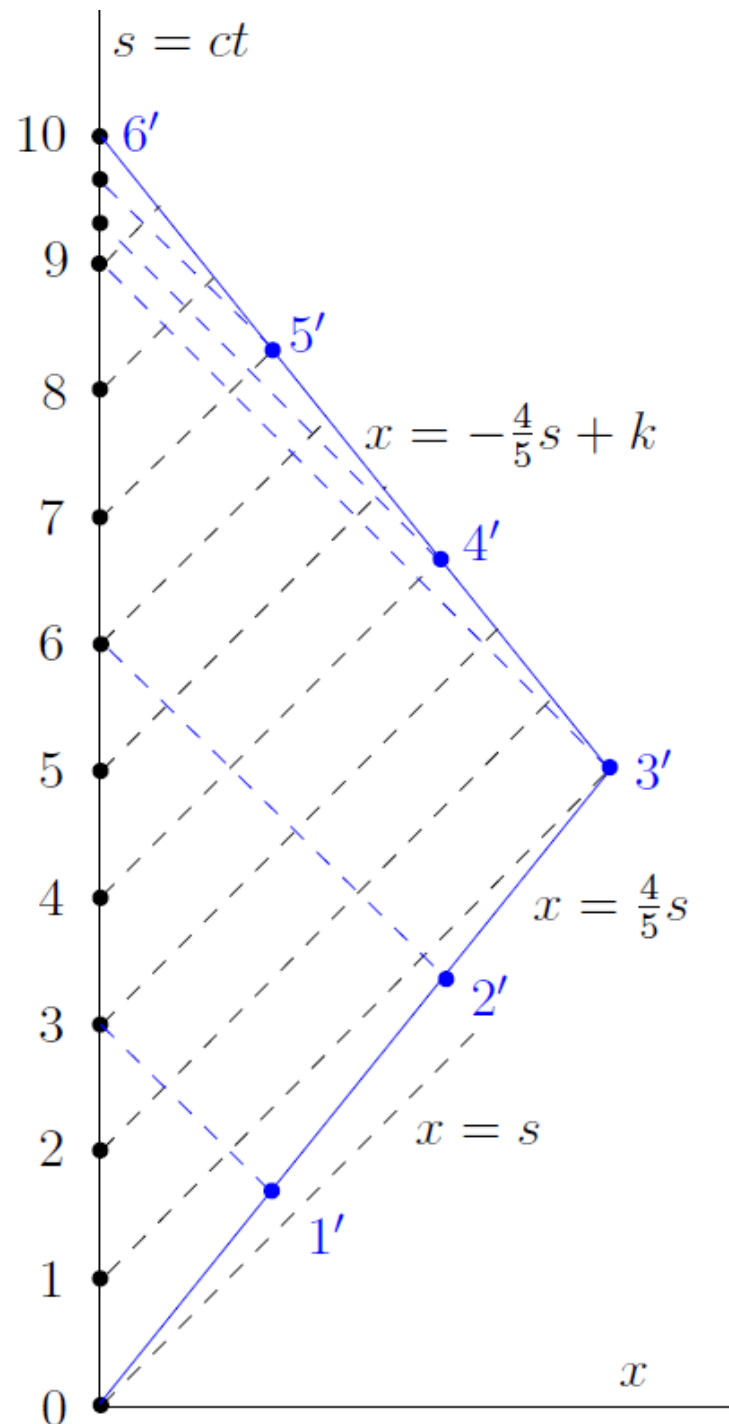
**Paradoxa dels bessons.** Considerem la referència inercial  $S$  d'un dels bessons, de la qual només dibuixem l'eix  $x$  i l'eix  $s = ct$  (en anys-llum). Si l'altre germà bessó  $S'$  s'allunya a una velocitat  $v = \frac{4}{5}c$  al llarg de  $Ox$  fins a l'instant  $s = 5$ , i després retorna a l'origen a la mateixa velocitat (hi arribarà quan  $s = 10$ ), **quin temps marcarà el rellotge de  $S'$  quan dóna la volta? I a l'arribada? Estaran d'acord cada bessó en el temps marcat pel rellotge de l'altre?**

Atès que  $\beta = 4/5$ , tenim  $\gamma = 5/3$ . Això comporta que 5 anys de  $S$  corresponen a 3 de  $S'$ , de manera que quan  $S'$  dóna la volta, el seu rellotge ha de marcar 3, i a l'arribada

ha de marcar 6. Segons  $S$ , per al bessó viatger només hauran d'haver passat 6 anys. Vegem com ho percep  $S'$ . En la primera part,  $S'$  està estacionari en el seu sistema ( $x' = 0$ ) i deixa que passin 3 anys ( $s' = 3$ ). Durant aquest lapse veu que el seu germà  $S$  s'allunya amb  $\beta = -4/5$ , i per tant interpreta que  $s = \gamma(s' + \beta x') = \gamma s' = 5$  és el temps que  $S$  atribueix al moment d'iniciar el retorn. En aquest instant, el viatger canvia a un sistema inercial  $S''$  en el qual veu que  $S$  s'aproxima a  $\beta = 4/5$ . Segueix en repòs a l'origen de  $S''$  ( $x'' = 0$ ) durant 3 anys més (al final,  $s'' = 6$ , ja que a l'inici del retorn  $s'' = s' = 3$ ). Segons els càlculs del viatger, els rellotges de  $S$  han de marcar

$$s = \gamma(s'' - \beta x'') + \lambda = \gamma s'' + \lambda,$$

on  $\lambda$  és una constant (l'origen de  $S''$  no té perquè coincidir amb el de  $S$ ). Com que per  $s'' = 3$  ha de ser  $s = 5$ , veiem que  $\lambda = 0$ . Així, doncs, el bessó viatger pensa que a l'arribada els rellotges de  $S$  han de marcar



$\frac{5}{3} \times 6 = 10$ . Pel que fa a la posició que  $S$  atribueix a l'origen de  $S''$ , ha de ser de la forma

$$x = \gamma(x'' - \beta s'') + \mu = -\gamma\beta s'' + \mu \\ = -\frac{4}{3}s'' + \mu,$$

$\mu$  una constant. Com que  $x = 4$  per  $s'' = 3$ , ha de ser  $\mu = 8$ . D'aquesta manera  $S''$  sap que és a l'origen de  $S$  ( $x = 0$ ) per  $s'' = 6$ .

Per acabar aquesta anàlisi, suposem que  $S$  envia un senyal lluminós al final de cada any. Com que el factor Doppler quan  $S'$  s'allunya és  $\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{1}{3}$ , el senyal al final del primer any és rebut al final del tercer any de  $S'$ , és a dir, en el moment d'iniciar el retorn. En el viatge

de retorn el factor de Doppler és  $\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 3$ , amb la qual cosa  $S''$  rep tres senyals en cadascun dels seus tres anys de  $S''$ . Si  $S'$  també envia senyals cap a  $S$  al final de cadascun dels seus anys, els senyals enviats a  $1'$ ,  $2'$  i  $3'$  es rebran al final dels anys 3, 6 i 9, mentre que els 3 senyals enviats en el viatge de retorn es rebran tots durant el desè any de  $S$ .

## Exercisis

**R.3.1.** Proveu que si la separació entre dos esdeveniments és de tipus temporal, aleshores hi ha un sistema de referència inercial  $S'$  respecte del qual els esdeveniments tenen lloc en el mateix punt. En particular, la separació entre aquests dos esdeveniments es pot mesurar amb un rellotge estacionari respecte de  $S'$ .

**R.3.2.** Proveu que si la separació entre dos esdeveniments és de tipus espacial, llavors hi ha un sistema de referència inercial  $S'$  respecte del qual són simultanis.

En particular, la separació entre els esdeveniments es pot mesurar amb regles estacionaris respecte de  $S'$ .

**R.3.3.** Segons un observador en un sistema de referència inercial  $S$ , un esdeveniment  $A$  té lloc al punt de coordenades  $x_A = 5\text{m}$ ,  $y_A = 3\text{m}$ ,  $z_A = 0\text{m}$  i a l'instant  $t_A = 15\text{m}$ , mentre que un altre esdeveniment  $B$  té lloc al punt de coordenades  $x_B = 10\text{m}$ ,  $y_B = 8\text{m}$ ,  $z_B = 0\text{m}$  i a l'instant  $t_B = 5\text{m}$ . Trobeu la separació entre  $A$  i  $B$ . Trobeu també una referència inercial  $S'$  respecte de la qual els dos esdeveniments són o bé simultanis o bé tenen lloc en el mateix punt.

**R.3.4.** Siguin  $S$  i  $S'$  dues referències inercials d'eixos paral·lels i orígens coincidents per  $t = t' = 0$ . Sigui  $v$  la velocitat de  $S'$  respecte de  $S$ . Suposem que una partícula es mou sobre l'eix  $x$  de  $S$  a velocitat uniforme  $u$  i considerem l'esdeveniment  $(x = ut, t)$ , amb  $t > 0$  (ignorem les coordenades  $y$  i  $z$ ). Proveu que si  $(x', t')$  són les coordenades d'aquest esdeveniment respecte de  $S'$  llavors  $t' > 0$  (useu que  $u < c$ ). Proveu també que si fos possible  $u > c$ , aleshores no existiria ordre de "causalitat", ja que hi hauria un sistema inercial  $S'$  en el qual  $t' < 0$  (si en l'instant  $t$  de  $S$  la partícula es

desintegrés, posem per cas, aleshores tindríem que per  $S'$  la desintegració passaria abans de començar el trajecte de la partícula!).

## Notes

**N1** (Pàg. 2). De fet,

$$\begin{aligned}(ct)^2 - z^2 &= \gamma^2((ct') + \beta z')^2 - \gamma^2(z' + \beta(ct'))^2 \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2)(ct')^2 - \gamma^2(1 - \beta^2)z'^2 = (ct')^2 - z'^2.\end{aligned}$$

**N2** (Pàg. 5). Les relacions mètriques euclidianes d'aquest pla  $xs$ , com ara el fet de disposar l'eix  $s$  perpendicularment a l'eix  $x$ , no tenen cap significat físic.