

MMF 10 / 3 *Relativitat*

2. Transformacions de Lorentz

S. Xambó

- Preliminars

- Transformacions de Lorentz

- Exemples

- *Explicació de l'experiment de Michelson-Morley*
- *Explicació dels experiments de Fizeau i Zeeman*
- *Sincronització dels rellotges*
- *Retard dels rellotges en moviment*
- *Efecte Doppler relativista*
- *Contracció de longituds*
- *Dilatació de la vida mitjana dels muons còsmics*
- *Aberració de la llum*
- *Experiment de Hafele–Keating*

Preliminars

En el tema anterior hem vist les transformacions possibles entre els sistemes S i S' tenen la forma

$$x = e (x' + vt'), y = y', z = z', t = e (t' + vx'/V^2),$$

on V és una velocitat universal, possiblement ∞ .

Les transformacions inverses són

$$x' = e (x - vt), y' = y, z' = z, t' = e (t - vx/V^2).$$

Finalment, la fórmula $w = \frac{v+v'}{1+\frac{vv'}{V^2}}$ dóna la llei de composició de velocitats.

Remarca. $V = \infty$ si no hi ha límit per a les possibles velocitats, i en aquest cas tenim les transformacions de Galileu. Altrament V és el límit superior de les velocitats possibles.

Transformacions de Lorentz

Experiments com els de Farley—Bairly—Picasso (v. R.0, pàg. 16) permeten afirmar que $V = c$. Simplificadament, la composició de la velocitat c amb ella mateixa ha de ser c , de manera que $\frac{2c}{1+c^2/V^2} = c$, i això dona la igualtat.

Al mateix resultat arribem si tenim en compte la determinació

$$e(v) = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

feta amb el rellotge fotònic (v. R.0, pàg. 17).

Així, doncs, la transformació Λ té la forma (posant $\gamma = e(v)$ per $V = c$):

$$x = \gamma(x' + vt'), y = y', z = z', t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2}),$$

que és l'anomenada *transformació de Lorentz*. La transformació inversa és

$$x' = \gamma(x - vt), y' = y, z' = z, t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}).$$

A més, c és el límit superior de les velocitats possibles.

La composició de velocitats que correspon a la transformació de Lorentz és

$$w = \frac{v+v'}{1+\frac{vv'}{c^2}}.$$

Remarca. Les transformacions de Lorentz adopten una forma més simètrica si en lloc de t usem ct (una longitud, com x , y i z).

En efecte, posant $x_0 = ct$, $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, les transformacions de Lorentz es poden escriure en la forma

$$x'_1 = \gamma(x_1 - \beta x_0), \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x_1),$$

on $\beta = v/c$.

Aplicacions

Explicació del resultat de l'experiment de Michelson–Morley. (v. R.0, pàg. 13). La velocitat de la llum en els dos braços de l'interferòmetre és sempre c . Per tant el patró d'interferència no canviarà ni per girs de l'aparell ni a causa dels moviments de la Terra.

Explicació de l'experiment de Fizeau. La velocitat de l'aigua respecte del laboratori és v i la de la llum respecte de l'aigua és $\frac{c}{n}$. Per tant, la velocitat de la llum en l'aigua respecte del laboratori és

$$\frac{v+c/n}{1+(vc/n)/c^2} \simeq v + \frac{c}{n} - \frac{v}{n^2} = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v.$$

Sincronització dels rellotges. El temps t relatiu a un sistema inercial el dóna un rellotge situat a l'origen de coordenades, i diem que aquest és el *temps propi* del sistema. Per sincronitzar una copia d'aquest rellotge situada en un punt a distància d de l'origen, basta tenir en compte que una ona electromagnètica emesa des de l'origen en l'instant $t = 0$ arriba al rellotge

en qüestió en l'instant $t = d/c$. Aquest és el procediment usat habitualment per sincronitzar els rellotges atòmics usats per al temps atòmic internacional (TAI), així com per al GPS i sistemes similars.

Es pot veure que si transportem molt lentament una còpia del rellotge situat a l'origen a una distància d , llavors aquest rellotge està sincronitzat amb el que ha romàs a l'origen.

Retard dels rellotges en moviment. Sigui t' el temps mesurat per un rellotge estacionari en el sistema S' . Si x' és la posició del rellotge a S' , el temps t mesurat a S compleix $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$. En particular tenim que $\Delta t = \gamma \Delta t'$.

Com que $\gamma > 1$, veiem que $\Delta t > \Delta t'$, és a dir, que des del punt de vista de S , el rellotge en moviment es retarda respecte dels rellotges de S .

Remarca. És molt important adonar-se que S' usa, per calcular $\Delta t'$, un sol rellotge, que marca (per estar fix a S') el temps propi de S' , mentre que S usa, per calcular Δt , dos rellotges (sincronitzats segons els procediment ja

explicat), un en el lloc x_0 on està el rellotge mòbil en el moment inicial t_0 de l'interval Δt i l'altre en el lloc x_1 on està el rellotge mòbil en l'instant final t_1 de Δt . Aquesta asimetria en les observacions de S' i S és la que ens permet veure perquè S' també arriba a la conclusió que els rellotges de S es retarden. En efecte, considerem, per exemple, el rellotge R_0 de S situat en el punt x_0 i marcant el temps t_0 , corresponents a x' i t'_0 . En l'instant t_1 de S aquest rellotge també marca t_1 , perquè està sincronitzat amb el rellotge R_1 de S situat a x_1 . Però el temps que li assigna S' és

$$\begin{aligned}\gamma(t_1 - vx_0/c^2) &= \gamma(\gamma(t'_1 + vx'/c^2) - v\gamma(x' + vt'_0)/c^2) \\ &= \gamma^2(t'_1 - v^2t'_0/c^2) = \gamma^2(t'_1 - t'_0) + t'_0,\end{aligned}$$

de manera que per a S' el rellotge R_0 ha avançat

$$\gamma^2(t'_1 - t'_0) = \gamma^2\Delta t' = \gamma\Delta t.$$

Naturalment, s'arriba al mateix resultat si en lloc del rellotge R_0 ens fixéssim en el rellotge R_1 en repòs en el punt x_1 .

Efecte Doppler relativista. Amb les notacions de l'exemple anterior, suposem que $x' = 0$ i $t'_0 = 0$, de manera que $t_0 = 0$, $\Delta t' = t'$, $\Delta t = t_1 = \gamma t'$. Si S només usés el rellotge de $x_0 = 0$, el temps que marcaria quan S **veu** que el temps del rellotge mòbil és t' seria

$$\bar{t}_1 = t_1 + vt_1/c = (1 + \beta)t_1 = (1 + \beta)\gamma t' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} t'.$$

Atès que el temps és l'invers d'una freqüència, aquesta relació dóna l'**efecte Doppler relativista**: la relació entre la freqüència pròpia ν'_0 del rellotge de S' i la freqüència ν_0 mesurada per S és

$$\frac{1}{\nu_0} = \frac{1}{\nu'_0} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \quad \nu_0 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \nu'_0.$$

En particular, la freqüència que arriba a l'origen de S del rellotge mòbil és inferior o superior a la freqüència pròpia del rellotge segons que s'allunyi ($\beta > 0$) o s'apropi ($\beta < 0$).

Aquestes fórmules seran deduïdes d'una altra manera després d'establir les transformacions relativistes del camp electromagnètic.

Contracció de longituds. Considerem els punts x'_0 i x'_1 relatius a S' . En un determinat t de S , es mesuren les seves posicions x_0 i x_1 respecte de S . Com que $x'_i = \gamma(x_i - vt)$, $i = 0,1$, restant tenim que

$$l' = \gamma l ,$$

on $l' = x'_1 - x'_0$ i $l = x_1 - x_0$. Això implica que la longitud l' relativa al sistema S' es veu més curta ($l = l'/\gamma$) en el sistema S . Aquest efecte s'anomena *contracció de Fitzgerald* (o de *Fitzgerald–Lorentz*).

Explicació de la dilatació de la vida mitjana dels muons còsmics. La dilatació del temps mitjà de vol de les partícules còsmiques des del punt de vista d'un laboratori terrestre i la contracció de la longitud a recórrer des del punt de vista de les partícules, fan que el sistema del laboratori i el propi de les partícules puguin estar d'acord sobre l'esdeveniment que consisteix

a detectar una partícula al laboratori, ja que el factor de dilatació del temps i el de contracció de les longituds és el mateix.

Considerem, més concretament, el cas dels raigs còsmics que entren a l'atmosfera a velocitats v properes a c . Si aquests raigs estan formats per partícules de vida mitjana τ , el recorregut mitjà serà, des del punt de vista del laboratori, $L = vt = v\gamma\tau$, $\gamma = \gamma(v)$. És a dir, per al laboratori, el temps que tenen les partícules per arribar no és τ , sinó $\gamma\tau > \tau$. Des del sistema propi de les partícules, és el laboratori el que s'apropa a velocitat v i la distància mitjana L' que recorre el laboratori és $v\tau$. Així $L' = v\tau = L/\gamma$, de manera que segons les partícules el camí a recórrer no és L , sinó $L/\gamma < L$. El fenomen es pot veure, doncs, tant com una confirmació de la dilatació del temps com de la contracció de Fitzgerald.

Explicació del fenomen de l'aberració de la llum. Sigui S un sistema inercial en el qual el Sol està en repòs. Sigui S' un sistema inercial que en un cert instant s'està movent a la velocitat v de la Terra respecte de S , i suposem

que els eixos de S' són paral·lels als de S , amb els orígens coincidents per $t = t' = 0$. Suposem que des de l'origen de S es veu un estel en la direcció $(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$. En quina direcció es veurà des de l'origen en el sistema S' ?

Com que $[x, y, z, t] = [-c \cos(\theta), -c \sin(\theta), 0, 1]$ és l'esdeveniment que correspon per $t = 1$ a un fotó del raig que per $t = 0$ passava per l'origen de S , el corresponent esdeveniment a S' és $[x', y', z', t']$, amb

$$x' = \gamma(x - vt) = -\gamma(c \cos(\theta) + v),$$

$$y' = y = -c \sin(\theta),$$

$$z' = z = 0,$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = \gamma(1 + v \cos(\theta)/c).$$

La direcció en què es veu l'estel des de S' és doncs

$$(\gamma(c \cos(\theta) + v), c \sin(\theta), 0),$$

la qual cosa ens diu que

$$\tan(\theta') = \frac{c \sin(\theta)}{\gamma(c \cos(\theta) + v)}.$$

Aquesta fórmula coincideix amb la de l'aberració de la llum (v. R.0), llevat en el factor γ corresponent a la velocitat v de la Terra respecte de S . Com que $\beta = \frac{v}{c} \simeq 10^{-4}$, $\gamma \simeq 1.000000005$, i és per tant clar que la fórmula clàssica de Bradley dona l'angle d'aberració amb una precisió molt superior a la de les observacions.

Experiment de J.C. Hafele, R.E. Keating: Science 177, pàg. 166 (1972)

“During October, 1971, four cesium atomic beam clocks were flown on regularly scheduled commercial jet flights around the world twice, once eastward and once westward, to test *Einstein's theory of relativity with macroscopic clocks*. From the actual flight paths of each trip, the theory predicted that the flying clocks, compared with reference clocks at the U.S. Naval Observatory, should have lost 40 ± 23 nanoseconds during the eastward trip and should have gained 275 ± 21 nanoseconds during the westward trip ... Relative to the atomic time scale of the U.S. Naval Observatory, the flying clocks lost 59 ± 10 nanoseconds during the eastward trip and gained 273 ± 7 nanosecond during the westward trip, where the errors are the corresponding standard deviations. These results provide an unambiguous empirical resolution of the famous clock "paradox" with macroscopic clocks.”

Diferència predita en ns		
	Viatge envers l'est	Viatge envers l'oest
Cinemàtica	-184 ± 18	96 ± 10
Gravitacional	144 ± 14	179 ± 18
Efecte total	-40 ± 23	275 ± 21
Diferència observada en ns		
	-59 ± 10	273 ± 21

R.2.1. Posem $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ per denotar les coordenades del sistema S i $x_0 = ct$. Si S' es mou a velocitat uniforme $\mathbf{v}$ respecte de S , però ara sense cap condició sobre l'orientació dels seus eixos, i posem $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ per denotar les S' -coordenades, i $x'_0 = ct'$, demostreu que la transformació de Lorentz es poden posar en la forma

$$\mathbf{x} = \gamma(\mathbf{x}'_{\parallel} + \beta x'_0) + \mathbf{x}'_{\perp}, \quad x_0 = \gamma(x'_0 + \beta \mathbf{x}'_{\parallel}),$$

on $\mathbf{x}'_{\parallel}$ és la projecció ortogonal de $\mathbf{x}'$ sobre OO' i $\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'_{\parallel}$.

Transformació inversa: $\mathbf{x}' = \gamma(\mathbf{x}_{\parallel} - \beta x_0) + \mathbf{x}_{\perp}, \quad x'_0 = \gamma(x_0 - \beta \mathbf{x}_{\parallel})$.

R.2.2. Camineu a 5 Km/h pel passadís d'un tren que va 300 Km/h. Determineu el percentatge d'error que es produeix si en lloc d'usar la fórmula relativista d'addició de velocitats useu la suma (lleï de Galileu).

R.2.3. El cotxe dels mossos persegueix a velocitat $c/2$ el cotxe d'uns delinqüents que va a $3c/4$. La velocitat de sortida del projectil de l'arma dels mossos és $c/3$. Impactarà el projectil amb el cotxe dels fugitius? Discussiu la qüestió en un context a) newtonià i b) relativista.

R.2.4. Els muons d'uns rajos còsmics recorren 1000 m en promig. Determineu la seva velocitat sabent que la seva vida mitjana és $2 \times 10^{-6}\text{s}$.

R.2.5. Segons un observador en un sistema de referència inercial S , dos esdeveniments tenen lloc al mateix punt de l'eix Ox però separats per un interval de 3s. Segons un altre observador en un altre sistema de referència inercial S' , que es mou en la direcció positiva de l'eix Ox de S a velocitat constant v , l'interval de temps entre els dos esdeveniments és de 5s.

- 1) Quina és la velocitat relativa de S' respecte de S ?
- 2) Quina és la distància espacial entre tots dos esdeveniments segons l'observador a S' ?

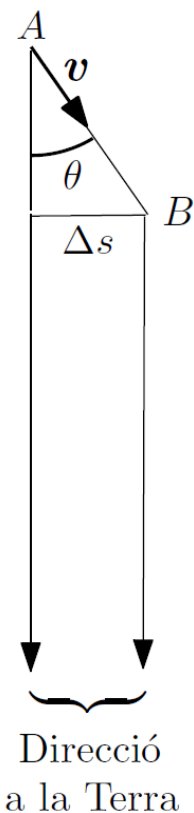
R.2.6. Un coet de longitud pròpia l_0 s'allunya amb velocitat $v = 0.8c$. S'envia un senyal lluminós que arriba a la cua del coet a l'instant $t = 0$ segons els rellotges de la Terra i segons els del coet.

- 1) Calculeu en tots dos sistemes de referència (el de la Terra i el del coet) l'instant en el qual el raig de llum arriba al cap del coet. Quina és la distància espacial entre

els dos esdeveniments (“el senyal arriba a la cua” i “el senyal arriba al cap”) segons els dos observadors?

2) Si en arribar al cap la llum s'hi reflexa i torna enrere, calculeu també en tots dos referencials l'instant en què la llum reflectida arriba a la cua.

R.2.7. Sobre l'eix Ox del sistema S hi ha rellotges R_j sincronitzats cada 300000 Km, començant per R_0 situat a $x = 0$. Si el temps marcat pel rellotge R_0 és 0, determineu: *a)* Quin temps està marcant el rellotge número R_{100} . *b)* Quin temps *veieu* que marca el rellotge número R_{100} .



R.2.8 (Velocitats superlumíniques). Una estrella es mou des de A fins B a velocitat v . Sigui θ l'angle format per AB amb la visual de l'estrella des de la Terra. Amb les notacions de la figura, l'anomenada *velocitat aparent* de l'estrella es defineix com $\Delta s / \Delta t$, on Δt és el temps terrestre transcorregut des de la recepció de la llum emesa a A fins a la recepció de la llum emesa a B . Proveu que $\Delta s / \Delta t = \beta \sin \theta / (1 - \beta \cos \theta)$, $\beta = v/c$, i dedueu que el seu valor és màxim quan $\cos \theta = \beta$. Proveu finalment que la velocitat aparent màxima és $> c$ si i només si $\beta > \sqrt{2}/2$.