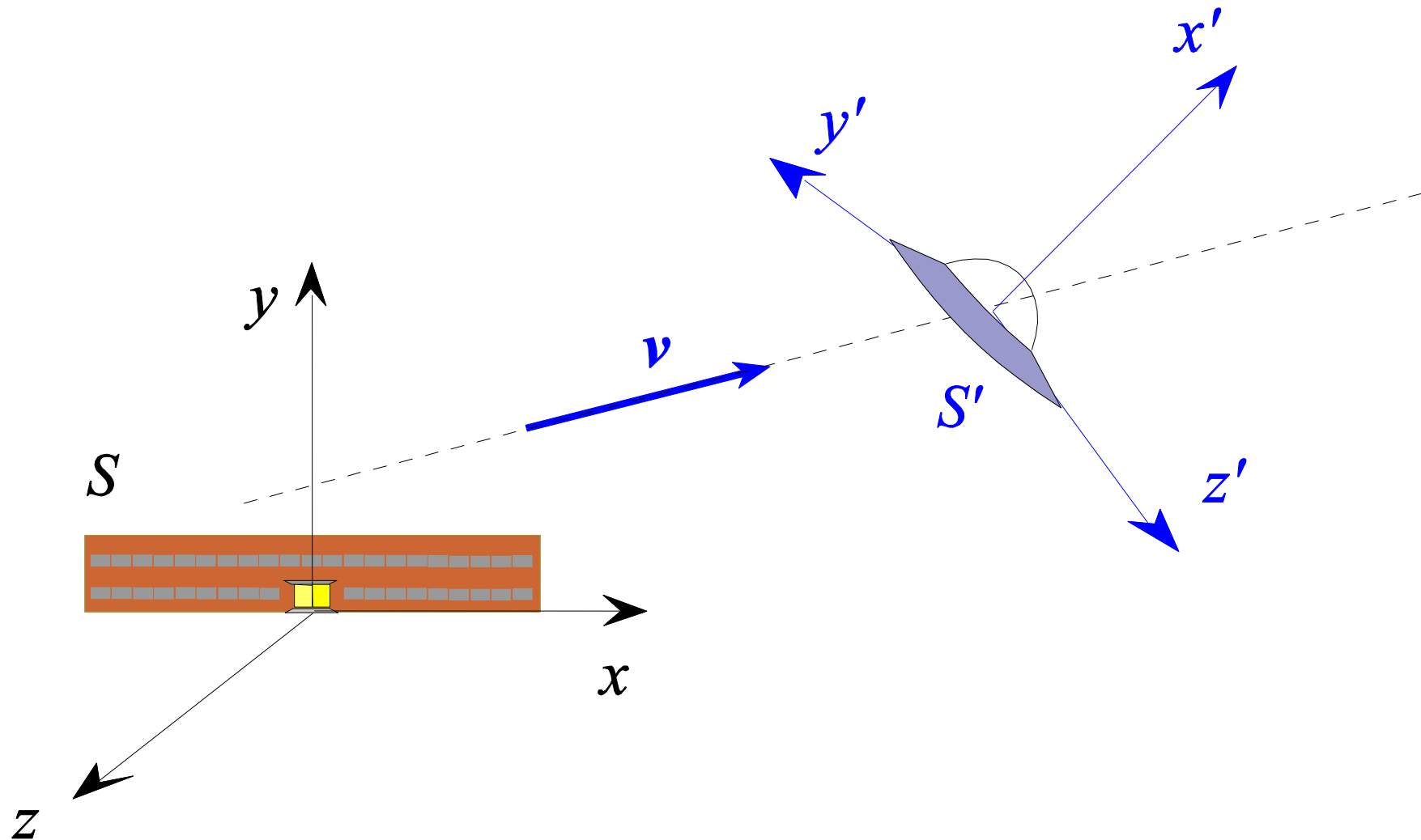


MMF 10 / 3 *Relativitat*

1. Grups de Relativitat

S. Xambó

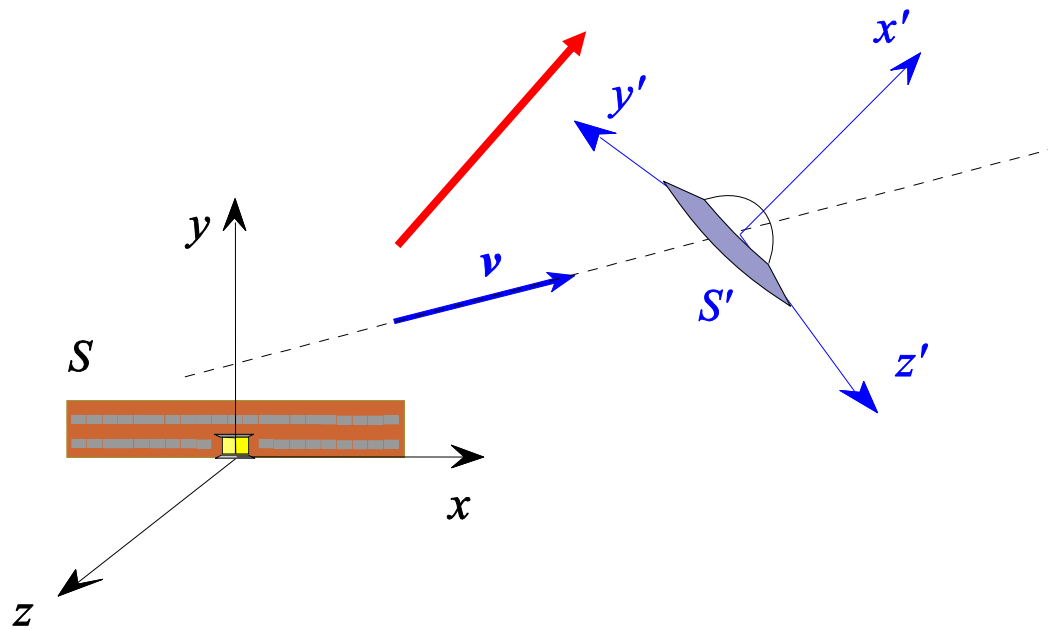


Considerem dos sistemes inercials, S i S' (sovint es diu que S és el *sistema fix*, o del laboratori, i que S' és el sistema *mòbil*). Posem $[x, y, z, t]$ i $[x', y', z', t']$ per denotar les coordenades d'un esdeveniment respecte de S i de S' , respectivament.

Volem veure com podem passar d'un sistema a l'altre, és a dir, volem determinar explícitament la relació

$$(x, y, z, t) = \Lambda(x', y', z', t') .$$

A tal fi suposarem que és vàlid el PR de Poincaré—Einstein i que $\Lambda = \Lambda(v)$ només depèn de v .

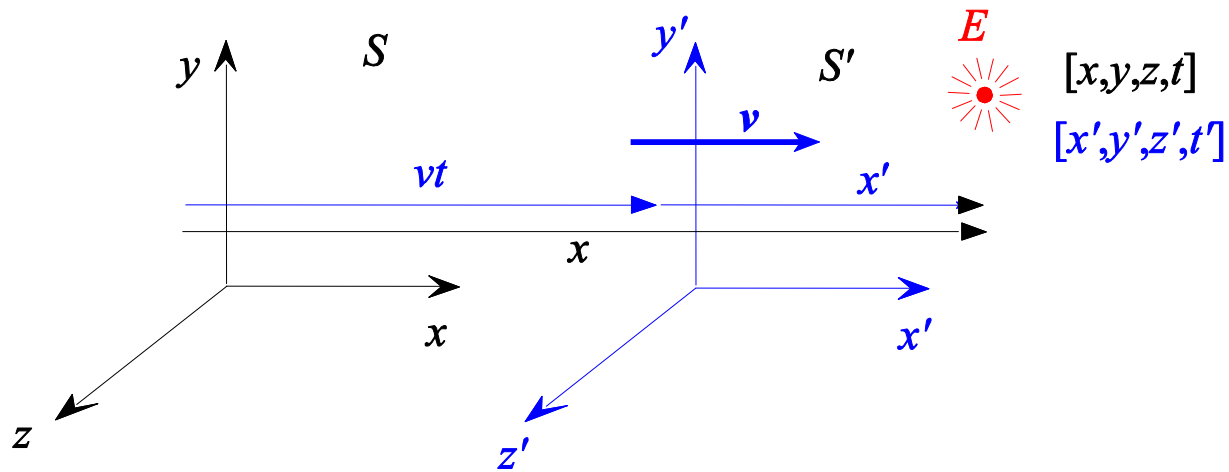


1. La transformació Λ és afí. La raó és que les trajectòries de les partícules lliures es veuen com a rectes tant a S com a S' (llei d'inèrcia de Galileu). Per tant, Λ ha de transformar la recta d'una tal partícula relativa a S' en la corresponent recta relativa a S , i

es pot veure que això basta per poder provar l'afirmació.¹

2. Composant amb una translació si cal, podem suposar que Λ és lineal (és a dir, que $\Lambda(0,0,0,0) = (0,0,0,0)$).

3. Composant amb una rotació de $[x, y, z]$, podem suposar que els eixos de S' són paral·lels als corresponents eixos de S . Amb una rotació addicional de $[x, y, z]$ i $[x', y', z']$, podem a més suposar que la velocitat de S' respecte de S és de la forma $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$.



4. Considerant la simetria cilíndrica respecte de l'eix $Ox = O'x'$, es pot veure que també podem suposar que $y = y'$ i $z = z'$. Per tant ens queda per determinar una relació de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix},$$

on a, b, c, d són funcions de v , és a dir, ens queda la determinació de la matriu

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

5. Sigui $e = e(v)$ el temps de S corresponent a $t' = 1$ (és a dir, el temps que mesura el sistema S per unitat de temps del rellotge situat a l'origen de S').² D'aquesta manera l'esdeveniment $x' = 0, t' = 1$ es transforma en $x = ve, t = e$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} ve \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'aquí obtenim que

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} a & ve \\ c & e \end{pmatrix}.$$

6. Per veure quina forma tenen a i c , és còmode canviar el sentit de l'eix $O'x'$ de S' , per simetria amb el fet que l'orientació de Ox és envers l'origen O' de S' . D'aquesta manera la matriu Λ es transforma en la matriu

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} -a & ve \\ -c & e \end{pmatrix},$$

i és clar que s'ha de complir $\Lambda'^2 = Id$. Així, doncs,

$$\begin{pmatrix} -a & ve \\ -c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & ve \\ -c & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'on

$$a^2 - evc = 1$$

$$c(a - e) = 0$$

$$ev(a - e) = 0$$

$$e(e - vc) = 1$$

La tercera equació ens dóna $a = e$, amb la qual cosa la segona es satisfà idènticament i la primera i la quarta esdevenen equivalents. Qualsevol de les dues ens permet obtenir que

$$c = \frac{e^2 - 1}{ev}.$$

Per tant,

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} e & ve \\ \frac{e^2-1}{ev} & e \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 1 & v \\ \frac{e^2-1}{e^2v} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ens queda per determinar la funció $e = e(v)$.

7. Introduïm un sistema S'' que es desplaça amb velocitat v' respecte S' , disposat respecte de S' d'una manera similar a com S' ho està respecte de S . Si w és la velocitat de S'' respecte de S , s'ha de complir que

$$\Lambda(w) = \Lambda(v)\Lambda(v').$$

Posant $e' = e(v')$, tenim:

$$\Lambda(v)\Lambda(v') = ee' \begin{pmatrix} 1 + \frac{v(e'^2-1)}{v'e'^2} & v + v' \\ \frac{e^2-1}{ve^2} + \frac{e'^2-1}{v'e'^2} & 1 + \frac{v'(e^2-1)}{ve^2} \end{pmatrix} = \Lambda(w).$$

Per tal que $\Lambda(v)\Lambda(v')$ sigui de la forma $\Lambda(w)$, per algun w , és necessari que

$$\frac{v(e'^2 - 1)}{v'e'^2} = \frac{v'(e^2 - 1)}{ve^2}.$$

Ara bé, aquesta relació equival a

$$\frac{e'^2 - 1}{v'^2 e'^2} = \frac{e^2 - 1}{v^2 e^2},$$

la qual cosa ens indica que

$$\rho = \frac{e^2 - 1}{v^2 e^2}$$

és una constant universal, que en podem anomenar *constant de relativitat*.

Ara podem determinar e en funció de ρ :

$$e^2 - 1 = \rho v^2 e^2,$$

$$1 = e^2(1 - \rho v^2),$$

$$e = e(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho v^2}}.$$

Així tenim que

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} e & ve \\ \frac{e^2-1}{ev} & e \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 1 & v \\ \rho v & 1 \end{pmatrix}.$$

Notem que

$$\Lambda(0) = Id$$

$$\Lambda(v)^{-1} = \Lambda(-v).$$

$$\begin{aligned} \Lambda(v)\Lambda(v') &= ee' \begin{pmatrix} 1 + \rho vv' & v + v' \\ \rho(v + v') & 1 + \rho vv' \end{pmatrix} \\ &= ee'(1 + \rho vv') \begin{pmatrix} 1 & \frac{v+v'}{1+\rho vv'} \\ \rho \frac{v+v'}{1+\rho vv'} & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de manera que la *composició de velocitats* és

$$w = \frac{v+v'}{1+\rho vv'}, \quad e(w) = ee'(1 + \rho vv').$$

8. Per $\rho = 0$, Λ és la transformació de Galileu:

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix},$$

$$x = x' + vt', \quad t = t'.$$

La transformació inversa és

$$x' = x - vt, \quad t' = t.$$

Segons aquesta transformació, el temps és absolut.

La composició de velocitats és

$$w = v + v'.$$

9. Atès que $\rho < 0$ condueix a una situació en què la composició de dues velocitats positives pot ser negativa, o no estar definida, suposarem que $\rho > 0$.²

Si posem $\rho = 1/V^2$, V té dimensions de velocitat i

$$e = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/V^2}}, \quad \Lambda(v) = e \begin{pmatrix} 1 & v \\ v/V^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

És a dir,

$$x = e (x' + vt'), \quad t = e (t' + vx'/V^2).$$

Les transformacions inverses són

$$x' = e(x - vt), \quad t' = e\left(t - \frac{vx}{V^2}\right).$$

Composició velocitats: $w = \frac{v+v'}{1+\frac{vv'}{V^2}}$

Remarca. En el cas $\rho = 0$, la velocitat v pot prendre qualsevol valor, mentre que en el cas $\rho > 0$ tenim que V és el límit superior de les velocitats possibles.

Notes

1. (Pàg. 3) Per a detalls de com enfocar la demostració, vegeu, per exemple, S. Xambó, *Geometria* (Edicions UPC, 2001).
2. (Pàg. 5 i 11) Vistos els arguments donats a la introducció (particularment els relatius al “rellotge fotònic”), i atès que $e(v) = 1$ correspon a l’existència d’un temps absolut, cal esperar que la situació físicament rellevant serà quan $e(v) \neq 1$ (de fet, $e(v) > 1$).