

MMF 10 / 3. *Relativitat* (R)

S. Xambó

0. Introducció

1. Grups de relativitat

2. Transformacions de Lorentz

3. Espai de Minkowski

4. Dinàmica relativista

5. Electrodinàmica relativista

6. Òptica relativista

7. Reformulació dels principis de l'electromagnetisme

8. Síntesi: $dF = 0$, $\delta F = -\mathcal{J}$

9. Nocions de relativitat general

10. Relativitat i experiència

MMF 10 / **3 Relativitat**

0. Introducció

S. Xambó

The core of relativity theory consists of a new physical theory of space and time, and we specifically say “physical” rather than “philosophical” because this theory can be tested experimentally.

W. Rindler, *Essential Relativity*, pàg. 1.

Relativity describes Nature from quark to cosmos. Relativity empowers its user to ponder deeply, to analyze widely, to predict accurately. It is a theory of fantastic innocence, simplicity and power.

E.F. Taylor and J.A. Wheeler, *Spacetime Physics* [contraportada].

Les equacions de Maxwell impliquen que el camp elèctric i el camp magnètic en el buit satisfan l'equació d'ones de velocitat $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, valor que resulta coincidir amb la velocitat de la llum en el buit. Aquest fet va conduir a la teoria electromagnètica de la llum (Maxwell) i, un cop establerta, a la unificació de l'òptica i l'electromagnetisme.

Tanmateix va sorgir ben aviat la pregunta, per analogia amb la propagació del so en un fluid, sobre quin era el medi en el qual es propagava la llum. D'aquest hipotètic medi, identificat sovint amb l'espai absolut de Newton, se n'ha dit de diverses maneres des dels temps de Descartes: *èter*, *èter còsmic*, *èter lumínic* o *medi lumínic*. Sense entrar ara en les estranyes propietats mecàniques que aquest medi hauria de tenir,¹ el cas és que es va plantejar el dubte sobre si les equacions de Maxwell eren

- (a) només vàlides en el referencial en repòs respecte de l'èter,
- o bé si de fet eren
- (b) vàlides en tota referència inercial.

L'opció (b) avui ens sembla més natural,² ja que d'una banda les equacions de la mecànica tenen la mateixa formulació en qualsevol referència inercial (això és el *principi de relativitat de Galileu*) i de l'altra perquè les observacions experimentals que van servir de base per obtenir les equacions de Maxwell no es van fer en una referència en repòs respecte de l'hipotètic èter.³

Principi de relativitat

... les lleis dels fenòmens físics han de ser les mateixes per un observador fix que per un observador en moviment uniforme de translació respecte d'aquell.

J.H. Poincaré, *El valor de la Ciència*, pàg. 111.

La suposició que les lleis de l'electromagnetisme són vàlides en qualsevol referència inercial (o, més en general, que totes les lleis de la Física són vàlides en qualsevol referència inercial) constitueix el *principi de relativitat* (PR), usualment atribuït a Einstein, tot i que va ser proposat explícitament per Poincaré força abans (1899) que Einstein ho fes el 1905.

Una dificultat fonamental, però, és que el PR no és compatible, ni formalment ni experimentalment, amb la mecànica de Newton.

Formalment, perquè les transformacions que deixen invariants les equacions de Maxwell formen, com veurem posteriorment, un grup diferent del grup de les transformacions que deixen invariants les lleis de la mecànica (transformacions de Galileu). Vegeu també el paràgraf següent. Físicament, perquè hi ha nombrosos experiments que mostren la incompatibilitat de les lleis de la mecànica amb les de l'electromagnetisme. Més avall exposem els més significatius.

Així, doncs, si admetem el principi de la relativitat per a l'electromagnetisme, aleshores estem obligats a modificar la mecànica, i a acceptar un seguit de conseqüències que sovint xoquen amb la intuïció ordinària. A més, caldrà també completar la teoria de Maxwell, ja que hi situacions consistents amb el principi de relativitat per a les quals l'electromagnetisme de Maxwell és insuficient per explicar-les. Remarquem que el principi de relativitat implica, junt amb la relació $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, que la velocitat de la llum en el buit, c , ha de ser la mateixa per a qualsevol observador inercial, i això independentment de la manera com s'ha generat la

llum, ja que els experiments per determinar els valors de μ_0 i ε_0 han de donar el mateix resultat en qualsevol referència inercial.

Aquest estat de coses fou expressat de manera insuperable per Einstein en la introducció de l'article en el qual va introduir la relativitat:⁴

Sabem que l'electrodinàmica de Maxwell —tal com la solem entendre actualment— aplicada a cossos en moviment, condueix a asimetries que no semblen inherents als fenòmens. Pensem, per exemple, en la interacció electrodinàmica entre un imant i un conductor. El fenomen observable només depèn, en aquest cas, del moviment relatiu del conductor i l'imat,⁵ mentre que la concepció habitual distingeix molt clarament dos casos, segons quin d'aquests dos cossos es mou. Si l'imat es mou i el conductor està en repòs, es crea al voltant de l'imat un camp elèctric de certa energia, que genera un corrent en el [...] conductor. Però si l'imat està en repòs i el conductor es mou, no es crea al voltant de l'imat cap camp elèctric, sinó una força electromotriu en el conductor,⁶ a la qual no correspon pròpiament cap energia, però que —suposant que el moviment relatiu sigui idèntic en tots dos casos— genera corrents elèctrics de la mateixa intensitat i la mateixa evolució temporal que les que produeixen les forces elèctriques en el primer cas.

Exemples d'aquesta mena, així com els intents fallits de constatar cap moviment de la Terra respecte el *medi lumínic*,⁷ fan conjecturar que cap propietat dels fenòmens no correspon al concepte de repòs absolut, tant en la mecànica com en l'electrodi-

nàmica, sinó que, més aviat, en *tots els sistemes de coordenades en què són vàlides les equacions mecàniques, són vàlides també les mateixes equacions electrodinàmiques i òptiques*, com ja s'ha demostrat per a magnituds de primer ordre.⁸

Volem elevar aquesta conjectura (el contingut de la qual anomenarem “principi de relativitat”) a la categoria de postulat i introduir, a més, el postulat —només en aparença incompatible amb l'anterior— segons el qual la llum es propaga en l'espai buit amb velocitat constant c , independentment de l'estat del moviment del cos emissor.⁹

Aquests dos postulats basten per formular una electrodinàmica dels cossos en moviment simple i coherent, basada en la teoria de Maxwell per a cossos en repòs.

La introducció d'un “èter lumínic” es revelarà supèrflua, en la mesura que la concepció que desenvoluparem no requereix cap “espai en repòs absolut” dotat de propietats especials, com tampoc no atribueix un vector velocitat als punts de l'espai buit on tenen lloc els processos electromagnètics.

En la presentació desenvolupada en aquest curs no usem el segon postulat. El nostre enfocament consisteix en caracteritzar primer matemàticament totes les transformacions entre sistemes de referència inercials que són compatibles amb la definició de sistema inercial i en seleccionar després les que són compatibles amb les observacions.

La deducció de la forma de totes les possibles transformacions (v. **R.1**) és bàsicament una qüestió matemàtica i pot ser seguida profitosament per tot lector que estigui en disposició d'acceptar que **el temps físic pot no ser absolut**.

Observacions i experiments anteriors a 1905

En el que resta d'aquesta introducció trobareu detalls de diverses observacions i experiments que posen de manifest incompatibilitats entre la mecànica de Galileu—Newton i l'electrodinàmica (incloent-hi l'òptica) de Maxwell, o aspectes d'aquesta teoria que caldria completar o refinar, o conseqüències contradictòries de la suposició que existeix un èter lumínic. Aquests detalls no són estrictament necessaris per entendre el que segueix, però convé poder-s'hi referir quan arribi el moment que puguem explicar-los mitjançant l'anàlisi relativista.

Equació d'ones. El *principi de Relativitat de Galileu* afirma que les lleis de la *mecànica* tenen la mateixa forma en qualsevol sistema de referència inercial. Dit d'una altra manera, les esmentades lleis són invariants per les transformacions de Galileu:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t' = t \text{ (el temps és absolut).}$$

Aquestes lleis, però, són incompatibles amb l'electromagnetisme, ja que el grup que deixa invariant l'equació d'ones

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

vàlida en electromagnetisme, no és el grup de Galileu (grup dels desplaçaments), sinó que és, com veurem posteriorment, l'anomenat grup de Lorentz (v. R.2 i R.3).

W. Voigt (1887) fou el primer en escriure explícitament transformacions que deixen invariant l'equació d'ones. Aquestes transformacions, que van ser usades posteriorment per H.A. Lorentz (1892, 1895) i per Poincaré (el qual els donà el nom de *transformacions de Lorentz*), són les úniques que deixen invariant l'equació d'ones, com ho va mostrar J. Larmor (1900).

Aberració de la llum estel·lar. Aquest fenomen fou descobert en els anys 1726-1728 per l'astrònom James Bradley (1673-1762) i mostra que si la teoria de l'èter *lumínic* fos certa, aleshores *hi ha vent d'èter*. El fenomen consisteix en el fet que les posicions aparents de les estrelles (és a dir, la direcció en la qual cal disposar els telescopis) estan desplaçades, a causa de la velocitat orbital v de la Terra al voltant del Sol, en la direcció d'aquest moviment. Com que la velocitat de la Terra varia al llarg de l'any, la

posició aparent d'una estrella descriu una el·lipse, dita *el·lipse d'aberració*, i la seva mesura permet trobar el quocient v/c .¹⁰

Experiments de Fizeau (1851) i Zeeman (1915). La velocitat de la llum en un medi material és c/n , on n és l'índex de refracció del medi. En el cas de l'aigua, per exemple, $n = 1.33$, i $c/n \simeq 225000$ km/s. Si el medi es mou a velocitat v respecte del laboratori, la velocitat prevista en el paradigma newtonià seria $c/n + v$. En el context de l'èter lumínic, en canvi, si el medi arrastrés parcialment l'èter es podria esperar que la velocitat fos $c/n + kv$, per un cert **coeficient d'arrossegament** $k \in [0,1]$ (l'arrossegament és nul per a $k = 0$ i total per a $k = 1$). De fet, Fresnel havia argumentat (1818) que

$$k = 1 - 1/n^2 ,$$

de manera que la velocitat hauria de ser

$$\frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v .$$

Doncs bé, aquesta relació és precisament la que va establir l'experiment de Fizeau (fins al primer ordre en v/c). Aquest resultat es va interpretar com que el moviment d'un fluid (com ara l'aigua) arrossegava parcialment l'èter.

En medis dispersius (és a dir, en els quals l'índex de refracció depèn de la longitud d'ona), els experiments de Zeeman (1915) van mostrar que el coeficient d'arrossegament hauria de ser

$$1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}.$$

És un resultat que difícilment pot conviure amb la interpretació de l'experiment de Fizeau, ja que el coeficient d'arrossegament no hauria de dependre de λ .¹¹

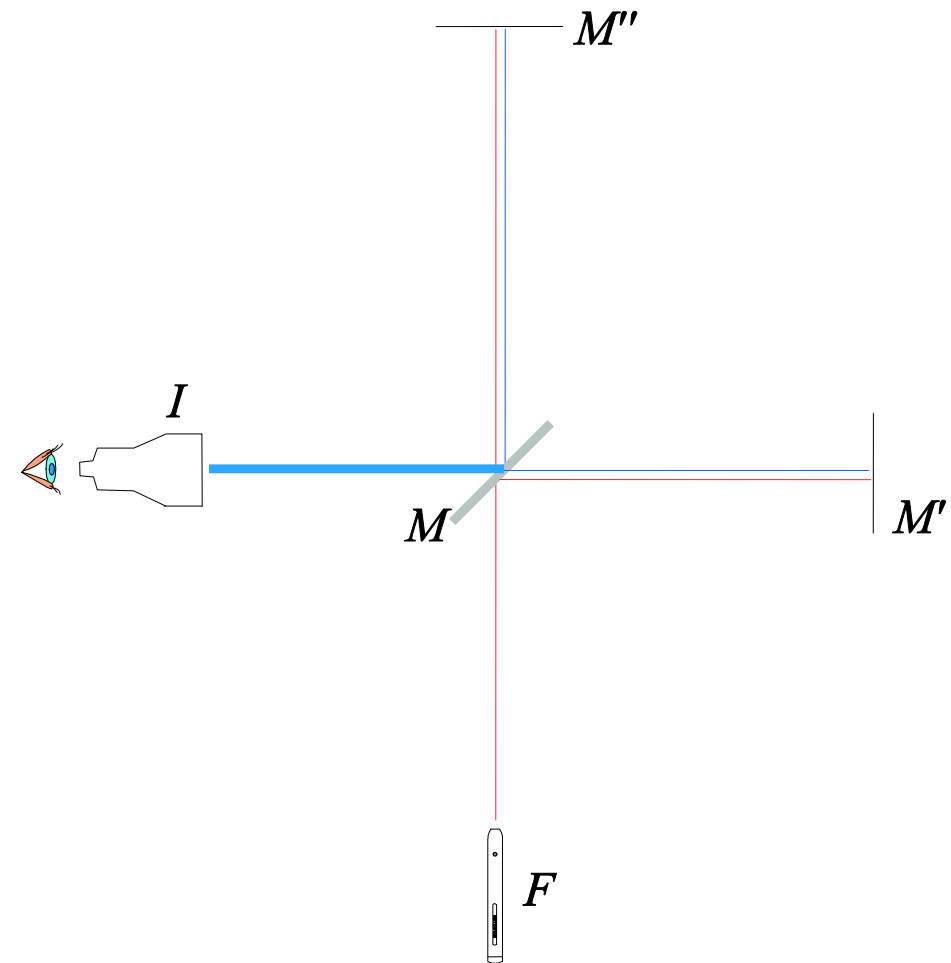
Aquest resultat també es poden interpretar com que la llei de la suma de velocitats vàlida en el context de la mecànica de Galileu no ho és en el cas de la llum. Posteriorment veurem que és una confirmació de la llei d'addició de velocitats de la relativitat.

Experiment de Michelson–Morley (1887). El resultat d'aquest remarcable experiment d'Albert A. Michelson (1852-1931) i Edward W. Morley (1834-1923) es va interpretar com que **no hi ha vent d'èter** degut al moviment de la Terra a través de l'espai. La contradicció amb la interpretació de l'aberració de la llum, segons la qual sí hi ha vent d'èter, no pot ser més manifesta.

La figura mostra l'esquema d'aquest experiment. Un raig de llum emès pel focus F és dividit pel mirall semiargentat M en raigs perpendiculars dirigits envers els miralls M' i M'' . Els raigs reflectits arriben a l'interferòmetre I , un refractat i l'altre reflectit a M . Segons les previsions de l'experiment, s'hauria de detectar una diferència de

$$\delta = \frac{L' + L''}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} \quad (L' = MM', L'' = MM'')$$

longituds d'ona entra les línies



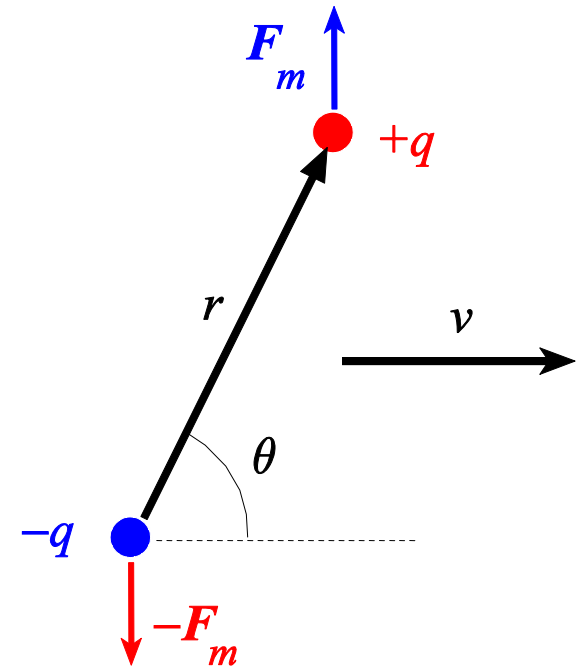
d'interferència produïdes quan MM' és la direcció de translació de la Terra i les produïdes quan aquesta direcció és MM'' (es pot passar d'una situació a l'altra girant l'aparell 90° al voltant de M). Amb una sensibilitat de 0.01 longituds d'ona, i amb $\delta \simeq 0.37$, el resultat observat de δ fou nul.¹²

Experiments del tipus del de Michelson—Morley, o variacions del mateix (com ara el de Kennedy—Thorndike, 1932), s'han repetit en nombroses ocasions, cada vegada amb més precisió, però sempre amb resultats en el mateix sentit.

Experiment de Trouton–Noble (1903). Dues càrregues puntuals $+q$ i $-q$ es mouen en el pla xy d'un sistema inercial amb velocitat $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$. El camp magnètic generat per cadascuna d'elles produeix una força sobre l'altra, i les dues forces creen un moment de forces sobre el sistema de les dues partícules. La magnitud d'aquest moment de forces és

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 v^2}{L} \sin(\theta) \cos(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 v^2}{Lc^2} \sin(\theta) \cos(\theta),$$

on θ és l'angle entre l'eix Ox i la recta que uneix les dues càrregues. En l'experiment en qüestió, aquest parell de forces, corresponent a la velocitat v , hauria d'haver estat observable, però en canvi el resultat va ser nul. És a dir, aquest experiment també s'interpreta com que **no hi ha vent d'èter**.¹³



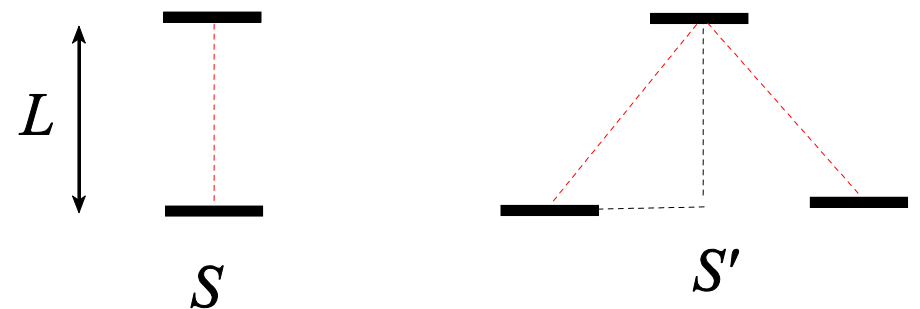
Constància de c . La constant $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299792458 \text{ m/s}$ coincideix amb la velocitat de les ones electromagnètiques en el buit, independentment de la manera com s'hagin generat aquestes ones.

Per exemple, s'ha comprovat que la velocitat de la llum emesa per mesons a $v = 0.99975c$ és igual a $2.9979 \pm 0.0004 \times 10^8 \text{ m/s}$.¹⁴ En el paradigma newtonià la velocitat prevista seria gairebé $2c$.

Aquí és oportú comentar l'observació de de Sitter sobre les estrelles dobles. Si la velocitat de la llum depengués de la del focus emissor respecte de l'observador, aleshores les estrelles llunyanes que estan en òrbita el voltant d'un altre objecte (com ara al voltant d'una altra estrella) no es veurien com un únic punt, sinó que en alguns casos podríem fins i tot rebre al mateix temps les imatges de l'estrella en dues posicions diferents, com ara una ocupada en un temps t_1 mentre s'allunya i una altra ocupada en un temps $t_2 > t_1$ mentre s'apropa. Però aquestes imatges dobles, o altres fenòmens que es poden deduir de la suposició que la velocitat de la llum depèn del focus emissor, no s'han observat mai.

Finalment també cal recordar l'**experiment mental** que Einstein va fer el 1896 i que va consistir en imaginar que anava a velocitat c en la mateixa direcció que un raig de llum, amb la qual cosa hauria hagut d'observar una ona electromagnètica **estacionària**. Com que la teoria de Maxwell no permet l'existència d'aquestes ones, la conclusió del jove Einstein va ser que c era una velocitat límit a la qual cap objecte físic podria arribar mai.

Esmentar també que la constància de c implica la relativitat del temps. Això es pot posar fàcilment de manifest mitjançant els **rellotges fotònics** d'Einstein. El temps es mesura comptant el nombre de vegades que un fotó de llum ha fet el camí d'anada i tornada entre els dos miralls paral·lels, com ara S a la figura. Si S' representa un d'aquets rellotges movent-se amb una velocitat uniforme v paral·lela als miralls, al temps t' de S' correspon un temps $t = t'\gamma$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, en el rellotge S . En particular, $t > t'$. De fet, un càlcul similar al fet per al cas de l'experiment de Michelson–Morley mostra que un “tic” de S' correspon a γ “tics” de S .



Vida mitjana dels rajos còsmics. L'observació dels rajos còsmics confirma les prediccions sobre la relativitat del temps que acabem de fer mitjançant el rellotge fotònic. Certes partícules còsmiques produeixen, en xocar amb l'alta atmosfera, partícules que tenen una vida mitjana que correspon, atesa la seva velocitat, a un recorregut d'uns pocs centenars de metres, però en canvi aquestes partícules arriben al nivell del mar. L'explicació és que si $\Delta t'$ és el temps mesurat pel “rellotge” intern de la partícula i Δt el mesurat pels rellotges de la Terra, llavors $\Delta t = \Delta t' \gamma$, on $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, v la velocitat de les partícules.

Notes

1. (Pàg. 3) Segons Maxwell, “similars a les d'un sòlid elàstic incompressible” (*Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. II, pàg. 434).
2. (Pàg. 4) Si es donés el cas (a), llavors es planteja el problema de saber quina forma han de tenir les equacions de Maxwell en altres referències inercials. Aquest enfocament (al qual van contribuir diversos investigadors, i especialment Lorentz i Poincaré, i que comentarem posteriorment amb més perspectiva), condueix també a les transformacions de Lorentz, però els resultats no tenien ni la simplicitat ni l'abast de la presentació que en va fer Einstein.
3. (Pàg. 4) Ultra el ben conegut moviment de la Terra al voltant del Sol, a una velocitat de l'ordre de 30 km/s, avui se sap que el sistema solar s'està movent a una velocitat 370 ± 18 km/s envers la constel·lació de Virgo a causa del moviment de la Via Làctia respecte de les galàxies veïnes i del Sol respecte del centre de la Via Làctia (220 km/s). Aquest moviment s'ha determinat a partir de les dades del satèl·lit COBE sobre la radiació còsmica de fons.

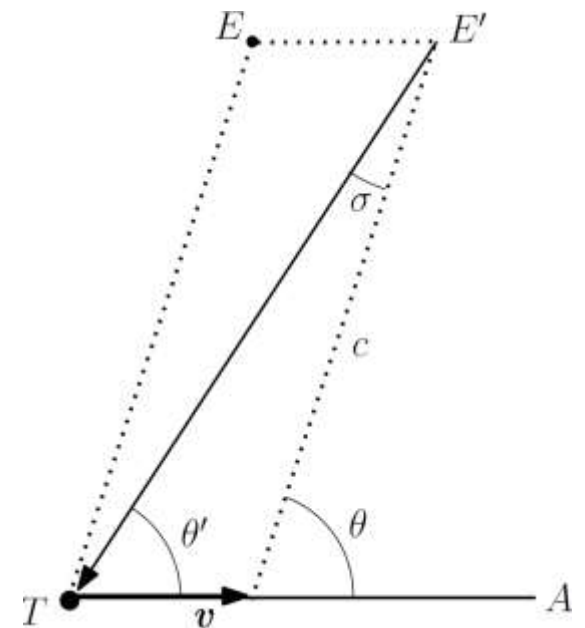
4. (Pàg. 6) *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik, 17, 1905, pàg. 891-921. En podeu trobar una traducció al català en els llibres *Einstein en català* (Edicions de la *Revista de Física*, Societat Catalana de Física i Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, Institut d'Estudis Catalans, 1998; traducció de d'Oliver Strunck i de Xavier Roqué) i *La teoria de la relativitat i altres textos* (Clàssics de la Ciència IV, Institut d'Estudis Catalans / Eumo Editorial / Editorial Pòrtic, 2000; introducció, traducció i notes de Xavier Roqué).

5. (Pàg. 6) És doncs un comportament consistent amb el principi de relativitat. De fet, en el capítol anterior hem usat aquest principi per determinar la relació quantitativa que expressa la llei d'inducció electromagnètica de Faraday en el cas d'un camp magnètic variable a partir del cas d'un circuit variable.

6. (Pàg. 6) Tal com s'ha vist en estudiar els camps magnètics, les càrregues del conductor, en moure's respecte del camp magnètic de l'imat, experimenten la corresponent força de Lorentz i aquesta força és la que mou les càrregues lliures del conductor.

7. (Pàg. 6) Experiments de Michelson—Morley (1887) o de Trouton—Noble (1903), dels quals es donen detalls més avall.
8. (Pàg. 7) És un resultat de Lorentz publicat el 1895 i que comentarem més endavant.
9. (Pàg. 7) Hem vist que aquest enunciat és conseqüència del PR i de la teoria de Maxwell. D'aquest fet Einstein no en dóna compta en l'article de 1905, però ho fa el 1907. El sentit de prendre'l com a postulat prové de no voler pressuposar la teoria de Maxwell sencera.
10. (Pàg. 11) L'aberració de la llum és un fenomen similar al que s'esdevé quan ens movem respecte de la pluja, ja que per evitar mullar-nos els peus cal donar una inclinació addicional al parai-gües en la direcció en la qual ens movem.

Els detalls de l'anàlisi de Bradley són com segueix. Sigui TE la direcció en la que es trobaria l'estrella E si la Terra fos immòbil. A causa de la velocitat orbital v de la Terra al voltant del Sol ($\simeq 29.8$ km/s), la direcció TE' en la qual es veu l'es-

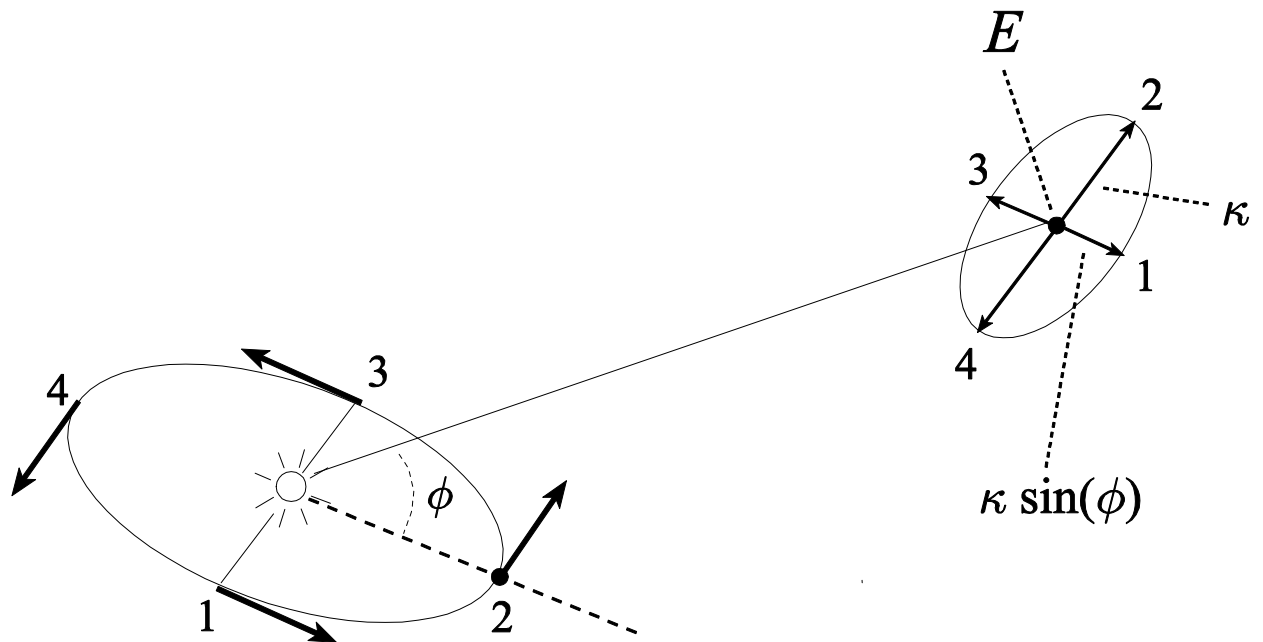


trella forma un angle θ' amb la direcció TA del moviment de la Terra inferior a $\theta = \angle(TA, TE)$:

$$\tan \theta' = \frac{c \sin \theta}{v + c \cos \theta} = \frac{\sin(\theta)}{\beta + \cos(\theta)}, \text{ on } \beta = v/c.$$

Com que l'angle σ és petit, ja que $v \ll c$, i com que tenim $\sin(\sigma) = \beta \sin(\theta')$, el valor de σ en segons d'arc ve donat per $\sigma = \kappa \sin(\theta')$, on $\kappa = 206265'' \beta$ s'anomena **constant d'aberració** ($206265'' = 1 \text{ rad}$). Aquesta relació implica que la posició aparent d'una estrella al llarg de l'any descriu una el·lipse amb semieix major κ i semieix menor $\kappa \sin(\phi)$, on ϕ és l'anomenada **latitud eclíptica** de l'estrella.

Remarquem que la mesura de l'el·lipse d'aberració permet obtenir κ i, com a conseqüència, β . Com que coneixem v , això dóna una mesura de c . Bradley va trobar que



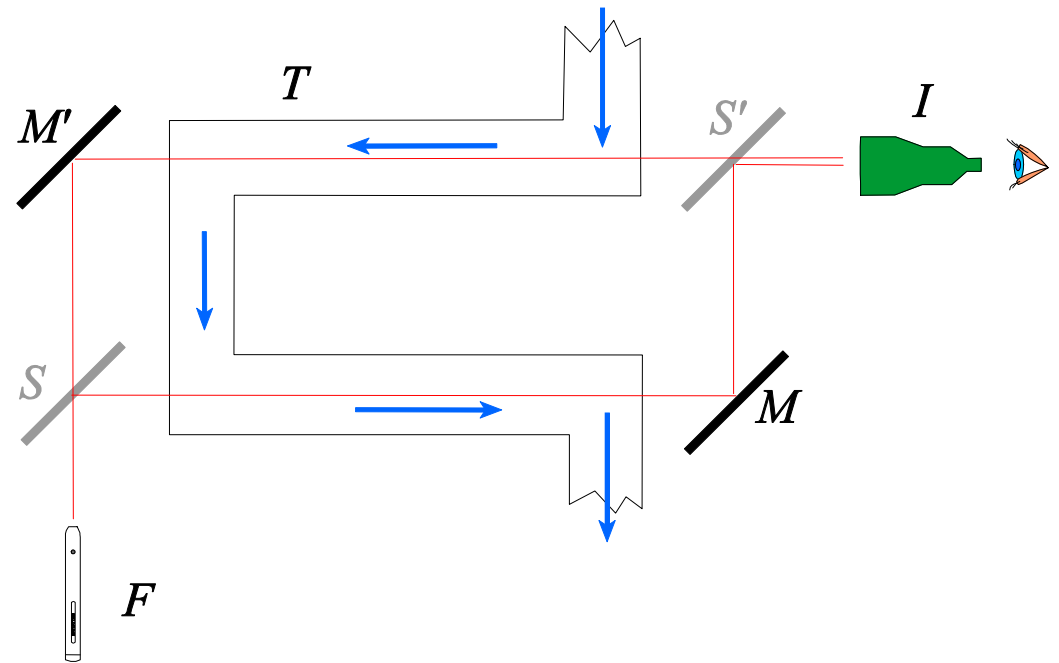
$\kappa = 20.25''$, $\beta = 1/10186$ ($c \simeq 304000$ km/s), molt propers als valors $\kappa = 20.50$, $\beta = 1/10060$ obtinguts amb mesures actuals ($c = 299792.458$ km/s).

La mesura de κ és especialment favorable per a les estrelles properes al pol de l'eclíptica ($\phi \simeq 90^\circ$), ja que en aquest cas l'el·lipse d'aberració és essencialment una circumferència de radi κ .

No s'ha confondre l'aberració de la llum amb el *desplaçament paral·làctic*. Quan la Terra T recorre la seva òrbita al voltant del Sol, la recta TE descriu un con el·líptic de vèrtex E , de manera que la posició de E , que es veu desplaçada envers el Sol, descriu una petita el·lipse. Aquesta el·lipse és tant més petita com més allunyada és l'estrella i fins i tot per a les estrelles més properes el seu semieix major és petit comparat amb κ : $0.76''$ per l'estrella més propera (α del Centaure, a 4.22 anys-llum). El primer desplaçament paral·làctic el va mesurar Bessel el 1838.

11. (Pàg. 12) En aquesta nota donem detalls de l'experiment de Fizeau (v. la figura). Les fletxes indiquen el moviment d'un fluid a través del tub T . La llum emesa pel focus F es divideix en un raig reflectit i un raig refractat

en el mirall semiargentat S . El raig reflectit entra a la part inferior del tub, es propaga en la mateixa direcció que la del corrent del fluid, es reflexa en el mirall M i finalment entra a l'interferòmetre I després de reflectir-se en el mirall semiargentat S' . El raig refractat a S es reflecta en el mirall M' , després segueix per la part superior del tub, en direcció contrària a la del moviment del fluid, i finalment es dirigeix a l'interferòmetre I després de refractar-se a S' . La interferència entre els dos raigs és una funció de la velocitat del fluid i l'objecte de l'experiment és determinar les interferències produïdes per a diversos valors de la velocitat.



L'anàlisi de Fizeau, sota l'hipòtesi d'un arrossegament parcial de l'èter, es pot resumir com segueix. El temps que tarda la llum en recórrer la llargada L del tub inferior és $L/(c/n)$ quan el fluid està en repòs i $L/(c/n + kv)$ quan la velocitat del fluid és v . La diferència entre aquests dos temps és

$$\Delta = L \left(\frac{1}{c/n} - \frac{1}{c/n+kv} \right) = \frac{Lkv}{\frac{c^2}{n^2} \left(1 + kn \frac{v}{c} \right)} \simeq \frac{Ln^2kv}{c^2}.$$

Anàlogament, la diferència de temps per al tub superior és

$$\Delta' \simeq -\frac{L'n^2kv}{c^2},$$

de manera que la interferència dels dos raigs depèn del temps

$$\Delta - \Delta' \simeq (L + L') \frac{n^2}{c^2} kv.$$

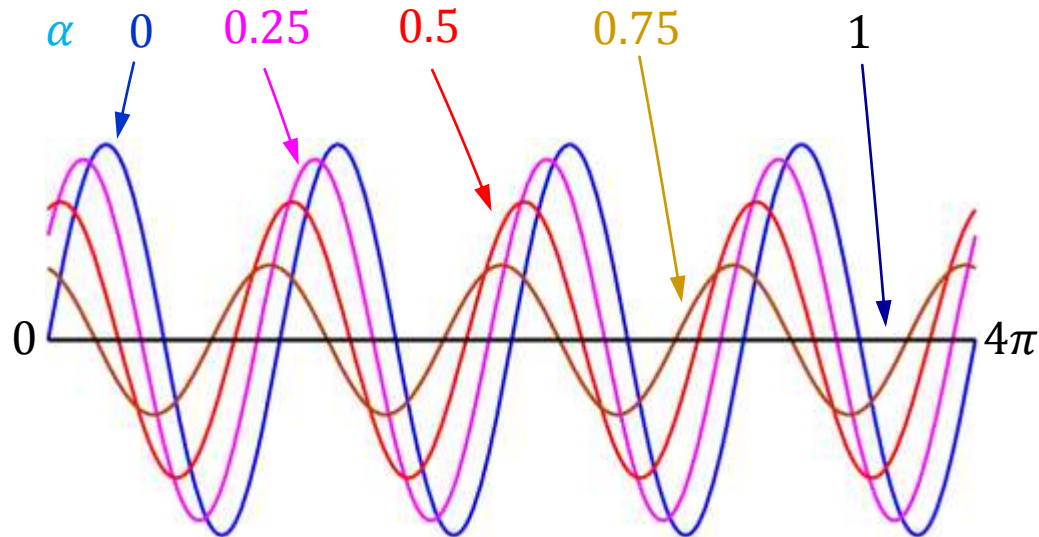
Si la freqüència de la llum és ν , i $\lambda = c/\nu$ la seva longitud d'ona, aquesta diferència equival a α semilongituds d'ona

$$\alpha = \frac{2(\Delta - \Delta')}{\frac{1}{\nu}} = \frac{2(\Delta - \Delta')}{\frac{\lambda}{c}} = 2 \frac{L+L'}{\lambda} \frac{n^2}{c} kv.$$

Per exemple, si $L = L' = 1.5$ m, $\lambda = 0.5 \times 10^{-6}$ m (llum visible de color verd-blau), $v = 14$ m/s i el fluid és aigua ($n = 1.33$), llavors $\alpha \simeq k$.

Per a la relació entre α i la interferència dels dos raigs de Fizeau, la figura mostra l'ona resultant de la interferència dels dos raigs de Fizeau segons diversos valors del nombre $\alpha \in [0,1]$ de semilongituds d'ona en què estan desplaçades. El gràfic s'ha generat mitjançant la fórmula

$$\sin(x) + \sin(x + \alpha\pi) = 2 \cos(\alpha\pi/2) \sin(x + \alpha\pi/2).$$



12. (Pàg. 14) L'anàlisi de Michelson—Morley és com segueix. Suposem primer que MM' és la direcció del moviment de la Terra. L'expressió per al temps d'anada i tornada al llarg del braç transversal MM'' es va considerar que era $t'' = 2\tau$, on $(c\tau)^2 = (v\tau)^2 + L''^2$ (vegeu la figura). D'aquí que $c^2(1 - \beta^2)\tau^2 = L''^2$ ($\beta = v/c$), és a dir,

$$t'' = \frac{2L''}{c} \gamma, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

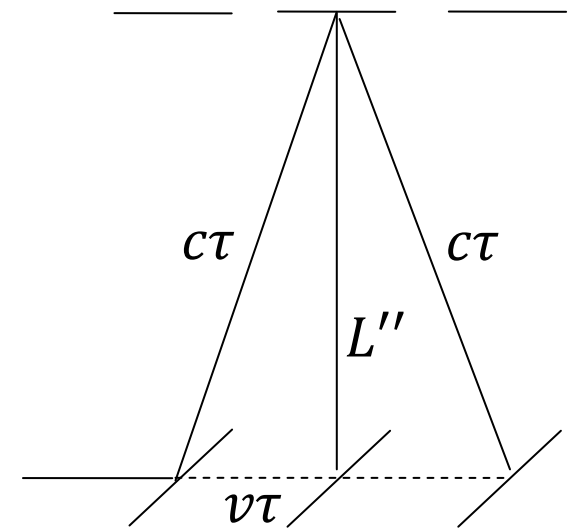
Com a expressió per al temps d'anada i tornada al llarg de MM' es va prendre

$$t' = \frac{L'}{c-v} + \frac{L'}{c+v} = \frac{2L'}{c(1-\beta^2)} = \frac{2L'}{c} \gamma^2.$$

La diferència entre aquests dos temps és

$$\Delta' = t' - t'' = \frac{2}{c} \gamma (L' \gamma - L'').$$

En girar l'aparell 90° , fins a fer coincidir MM'' amb la direcció del moviment, els papers de M' i M'' s'intercanvien i la diferència de temps (entre el raig que va per MM' i el que va per MM'') serà



$$\Delta'' = \frac{2}{c} \gamma (L' - L'' \gamma).$$

Per tant,

$$\Delta' - \Delta'' = \frac{2(L' + L'')}{c} \gamma (\gamma - 1) \simeq \frac{2(L' + L'')}{c} \beta^2.$$

Si la llum és monocromàtica amb longitud d'ona λ i freqüència f , a aquesta diferència correspon un nombre de longituds d'ona igual a

$$\delta = f(\Delta' - \Delta'') \simeq \frac{2(L' + L'')}{\lambda} \beta^2$$

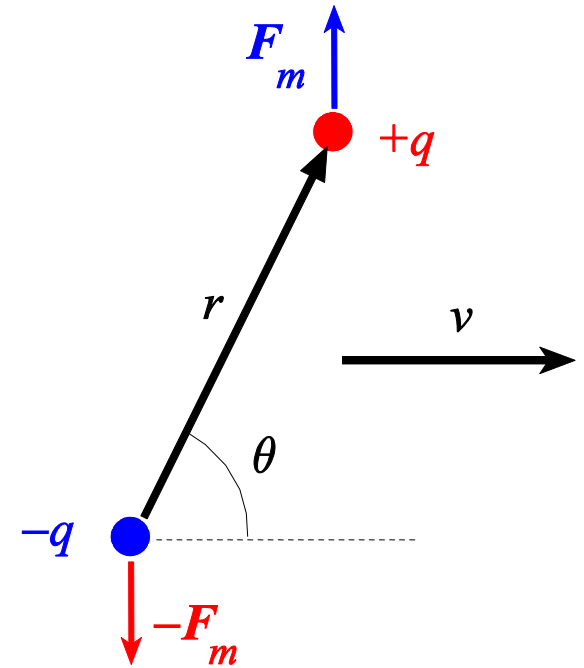
(ja que $f = c/\lambda$). Prenent $v = 30$ km/s, $\lambda = 5900\text{\AA}$ (llum groga) i $L' = L'' = 11\text{m}$ s'obté $\delta = 0.37$. Recordem que $1\text{\AA} = 10^{-10}\text{m}$.

13. (Pàg. 15) Si $\mathbf{r}$ és el vector de posició de q respecte de $-q$, la força magnètica $\mathbf{F}_m$ que $-q$ exerceix sobre q és

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_0 q^2}{4\pi r^3} \mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 q^2}{4\pi r^3} (v^2 \mathbf{r} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{v}) \\ &= \frac{\mu_0 q^2}{4\pi r^3} v^2 (\mathbf{r} - \text{pr}_v(\mathbf{r})) = \frac{\mu_0 q^2}{4\pi r^2} v^2 \sin(\theta) \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Això mostra que $\mathbf{F}_m$ és perpendicular a $\mathbf{v}$ i dirigida com indica la figura. La força magnètica que q exerceix sobre $-q$ és $-\mathbf{F}_m$, i el moment d'aquestes dues forces és $M\mathbf{e}_z$, on

$$M = \frac{\mu_0 q^2}{4\pi r} v^2 \sin(\theta) \cos(\theta).$$



14. (Pàg. 16) J. Bailey, F.J.M. Farley and E. Picasso, *Recent Experimental Verifications of the Theory of Relativity*, Nature 217, 17 (1968).