

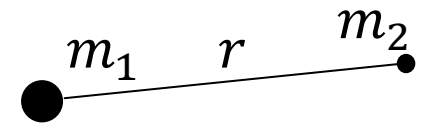
MMF 10 / 1. *Mecànica*

9. Problema dels dos cossos

S. Xambó

Considerem el cas de dues masses puntuals m_1 i m_2 sotmeses a una força d'interacció conservativa donada per un potencial $V = V(r)$ que només depèn de la distància r entre elles (*potencial central*).

El moviment es descompon en un moviment de translació uniforme del centre de masses i un moviment respecte d'aquest centre. Canviant de referència inercial, podem suposar que el centre de masses és l'origen:



$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0 .$$

Posant $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, tenim

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} .$$

Substituint aquestes expressions en la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r), \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

(m s'anomena *massa reduïda*).

Com que el moment angular $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times (\mu\dot{\mathbf{r}})$ és constant, i perpendicular a $\mathbf{r}$, el moviment s'efectua en el pla perpendicular a $\mathbf{M}$. En coordenades polars (r, φ) , $L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$.

Sabem (i això en particular ens dóna la *segona llei de Kepler*) que

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} = \begin{cases} M \text{ (mòdul de } \mathbf{M}) \\ 2\mu\dot{A} \text{ (}\dot{A} \text{ velocitat areolar)} \end{cases}$$

d'on

$$\dot{\varphi} = M/\mu r^2 .$$

Introduint aquesta expressió en la fórmula de l'energia,

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) ,$$

veiem que el sistema és equivalent a un sistema amb un únic grau de llibertat, descrit per la coordenada r , amb potencial

$$V_e = \frac{M^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

(*potencial efectiu* dels dos cossos) i energia E . Podem, doncs, aplicar el mètode estudiat en el cas de sistemes 1D. Concretament,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V(r)) - \frac{M^2}{\mu^2 r^2}}$$

d'on

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V(r)) - \frac{M^2}{\mu^2 r^2}}} + c \text{ (} c \text{ constant).}$$

Com que $d\phi = \frac{M}{\mu r^2} dt$, podem escriure que

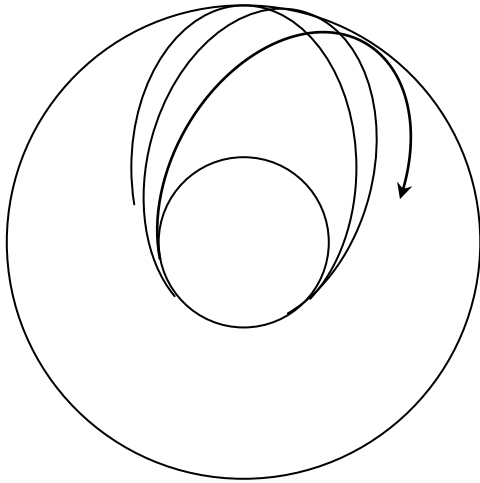
$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu(E - V(r)) - \frac{M^2}{r^2}}} + c' \text{ (} c' \text{ constant).}$$

Aquesta expressió ens dóna φ com a funció de r i ens permet obtenir, en principi, r com a funció de φ . Així, doncs, en principi podem obtenir r i φ com a funcions de t .

Els valors de r que compleixen

$$E = V(r) + M^2/2\mu r^2$$

determinen els límits radials de la regió on és possible el moviment. Si la regió de possible variació de la r té la forma $r \geq r_0$, el moviment és infinit, mentre que si el domini de variació és un interval d'extrems $r_{\min}$ i $r_{\max}$, el moviment és finit i la trajectòria està continguda a l'interior de la corona limitada per les circumferències



$$r = r_{\min} \text{ i } r = r_{\max}.$$

A més, la variació de r és periòdica, i el període d'aquesta variació és el doble del temps per anar de $r_{\min}$ a $r_{\max}$ (aquest temps coincideix amb el temps per anar de $r_{\max}$ a $r_{\min}$). La trajectòria, però, no és en general tancada, ja que la condició

per ser-ho és que en un període la variació de φ sigui un múltiple racional de 2π .

Primera i tercera lleis de Kepler

En el cas del potencial newtonià, és a dir,

$$V(r) = -\alpha / r, \quad \alpha > 0,$$

podem precisar exactament la dependència de r respecte de φ . El potencial efectiu és

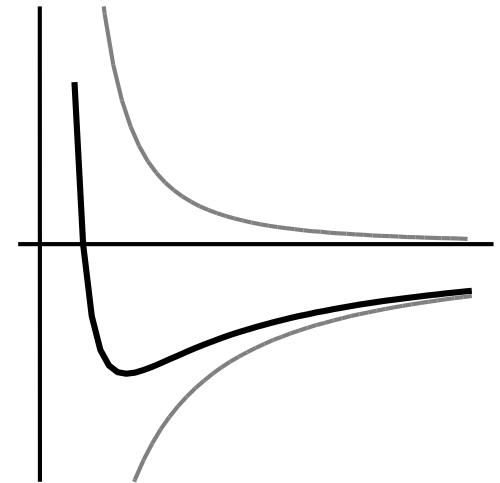
$$V_e = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2\mu r^2}$$

i tenim, integrant l'expressió de φ en funció de r ,

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{\frac{M}{r} - \frac{\mu\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{\mu^2\alpha^2}{M^2}}} + C.$$

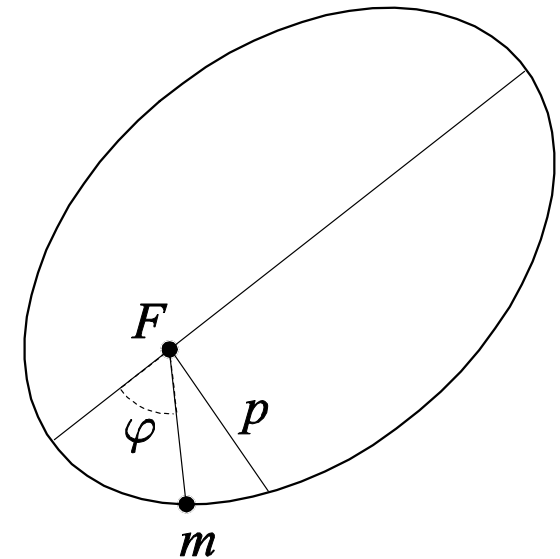
Prenent l'origen del temps de manera apropiada, podem suposar que $C = 0$, amb la qual cosa tenim, posant

$$p = M^2 / \mu\alpha \quad \text{i} \quad e = \sqrt{1 + 2EM^2 / \mu\alpha^2},$$



$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi ,$$

que representa una cònica de semicostat recte p , excentricitat e i amb un focus a l'origen de coordenades. És una el·lipse si $E < 0$, una paràbola si $E = 0$ i una hipèrbola si $E > 0$.



En el cas d'una el·lipse, de la segona llei de Kepler ($M = 2\mu\dot{A}$) obtenim la relació

$$2\mu A = TM \quad (A = \pi ab \text{ l'àrea de l'el·lipse i } T \text{ el període}).$$

Com que

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_\pi) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}\right) = p/(1 - e^2),$$

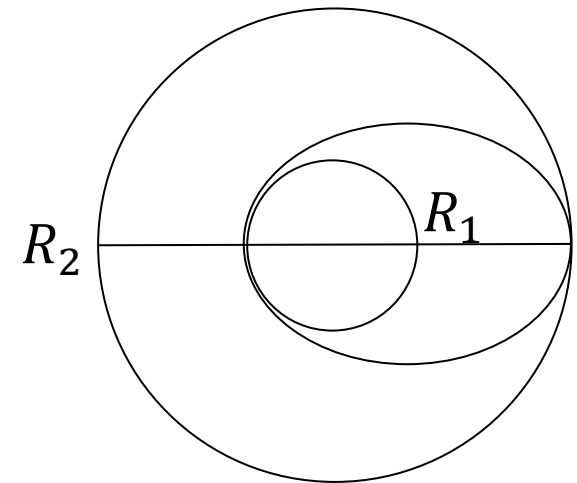
$$b = a\sqrt{1 - e^2} = a\sqrt{p/a} = \sqrt{a}\sqrt{p} = \sqrt{a}M/\sqrt{\mu\alpha},$$

obtenim

$$T = \frac{2\pi\mu ab}{M} = \frac{2\pi\mu a}{M} \frac{\sqrt{aM}}{\sqrt{\mu\alpha}} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}},$$

que és la tercera llei de Kepler.

M.9.1. Una estació espacial que és en òrbita circular de radi R_1 al voltant de la Terra ha de ser traslladada a una altra òrbita circular coplanària de radi $R_2 > R_1$. El canvi d'òrbita es vol fer utilitzant com a òrbita de transferència la semiel·lipse de la figura. Per a fer-ho, en un cert instant es comunica en un cert instant a l'estació un increment de velocitat Δv_1 per tal que passi a l'òrbita de transferència i, en arribar a l'apogeu, se li comunica un altre increment de velocitat adient Δv_2 per a deixar-la a la circumferència de radi R_2 . Trobeu:



1) Les característiques de l'òrbita de transferència.

2) Els increments de velocitat Δv_1 i Δv_2 en funció de R_1 i R_2 .

3) La duració de la transferència.

(Aquest tipus de transferència, coneguda com a *òrbita de Hohmann*, fou proposta per aquest astrònom el 1925).

M.9.2. Una partícula de massa m es mou per un camp de forces atractiu del tipus $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -4kr^2\mathbf{r}$, on k és una constant positiva.

1) Comproveu que la força és conservativa i calculeu-ne el potencial.

2) Si inicialment la partícula es troba en el punt $(a, 0, 0)$, determineu quina ha de ser la seva velocitat en aquest punt per tal que descrigui una òrbita circular de radi a .

3) Què passa si la velocitat és tal que el moment angular és nul?

M.9.3. Una partícula descriu una òrbita circular en un camp de forces del tipus $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r^3}\mathbf{r}$, on α és una constant positiva. Proveu que si el valor de α disminueix sobtadament a la meitat del seu valor original, aleshores l'òrbita de la partícula esdevé parabòlica.

M.9.4. Una partícula de massa m es mou sotmesa a una força central repulsiva del tipus $F(r) = k/r^3$, on k és una constant positiva. Suposant que la partícula parteix de l'infinit amb velocitat v_0 , determineu a quina distància mínima del centre de forces passarà en termes de m , k , v_0 i de la distància b del centre de forces a la recta tangent a la trajectòria a l'infinit (es diu que b és el *paràmetre d'impacte*).