

MMF 10 / 1. *Mecànica*

8. Principi de Hamilton

(o una introducció al càlcul de variacions)

S. Xambó

- Introducció
- Integral d'acció
- Primera variació de la integral d'acció
- Enunciat i demostració del principi de Hamilton
- Remarques sobre el càlcul de variacions
 - La corba més curta entre dos punts
 - El principi de Fermat
 - Llei d'Snell de la refracció

Introducció

El principi de Hamilton equival a l'observació que les equacions de Lagrange es poden obtenir imposant que l'acció (definida al principi de la secció que segueix) és estacionària, és a dir, que la seva primera variació (en un sentit que precisem més avall) és nul·la.

Aquesta formulació de les equacions de Lagrange resulta ser més fonamental que les equacions de Newton, bàsicament pel fet que es pot aplicar a situacions (com ara en electromagnetisme, relativitat, mecànica quàntica, teoria quàntica de camps, ...) en les quals les equacions de Newton no tenen sentit.

Integral d'acció

Si $x: [t_0, t_1] \rightarrow X$ és un camí diferenciable sobre l'espai de configuració d'un sistema lagrangià, es defineix l'*acció del sistema al llarg de x* com la integral

$$S(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt .$$

També es diu que S és el *funcional d'acció*.

Primera variació de la integral d'acció

La noció de diferencial en un punt d'una funció real de variable vectorial s'estén fàcilment a una noció de “diferencial de S en x ”. Vegem-ho.

Si $h: [t_0, t_1] \rightarrow E_3^N$ és una aplicació diferenciable arbitrària, es tracta d'expressar la diferència

$$S(x + h) - S(x)$$

com un funcional $\bar{\ell}(\mathbf{h})$ *lineal* en $\mathbf{h}$ més infinitèsims d'ordre superior (en un sentit que precisarem tot seguit) i posar $d_x S = \bar{\ell}$. A tal fi notem que

$$L(\mathbf{x} + \mathbf{h}, \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{h}}, t) = L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{h}} + \dots$$

on $\dots$ representa una expressió que és $O\left((|\mathbf{h}| + |\dot{\mathbf{h}}|)^2\right)$. Integrant respecte de t , tindrem

$$S(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = S(\mathbf{x}) + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{h}} \right) dt + \dots$$

Ara la regla d'integració per parts ens dóna que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{h}} \right) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h} dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \mathbf{h} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \mathbf{h} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \mathbf{h} dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \mathbf{h} \right]_{t_0}^{t_1}. \end{aligned}$$

Això mostra que el funcional lineal $\bar{\ell}$ definit per la fórmula

$$\bar{\ell}(\mathbf{h}) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \mathbf{h} dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \mathbf{h} \right]_{t_0}^{t_1}$$

és l'objecte que generalitza per a S i $\mathbf{x}$ la noció de diferencial d'una funció en un punt (S fa el paper de funció i $\mathbf{x}$ el de punt) dins l'espai vectorial de totes les funcions $\mathbf{h}$ de $[t_0, t_1]$ a E_3^N . Si ens restringim a funcions $\mathbf{h}$ que prenen valor 0 en els extrems t_0 i t_1 , aleshores el segon terme de la variació és nul i el funcional

$$\ell(\mathbf{h}) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \mathbf{h} dt \quad [*]$$

fa el paper de diferencial de S en $\mathbf{x}$ dins l'espai vectorial de les funcions $\mathbf{h}$ de $[t_0, t_1]$ a E_3^N que s'anul·len a t_0 i t_1 . Direm que ℓ (respectivament $\bar{\ell}$) és la *primera variació (primera variació en un sentit ample)* de S en $\mathbf{x}$, i posarem $\delta_{\mathbf{x}} S$ ($\bar{\delta}_{\mathbf{x}} S$) per denotar-la.

Enunciat i demostració del principi de Hamilton

Per analogia amb el cas de funcions reals de variable vectorial, direm que x és un camí *estacionari* per a S si $\delta_x S = 0$.

Teorema (Principi de Hamilton o de l'acció estacionària). Un camí x és un camí seguit per l'evolució del sistema entre dos instants del temps t_0 i t_1 si i només si x és estacionari per a S .

Prova. En efecte, si x és un camí seguit per l'evolució del sistema, aleshores x compleix les equacions d'Euler–Lagrange i $\delta_x S = 0$ per la fórmula [*]. Recíprocament, si $\delta_x S = 0$, aleshores $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$, ja que altrament podríem trobar una funció h nul·la per t_0 i t_1 tal que

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h dt \neq 0,$$

i això seria una contradicció.

Remarques. 1) El principi de Hamilton sovint s'anomena *principi de mínima acció*. Aquesta denominació, però, no és adequada, ja que si bé és cert que la primera variació és nul·la quan un camí [*] fa mínima l'acció, el recíproc no és cert en general.¹

2) Les equacions $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$ es coneixen com les equacions d'Euler—Lagrange corresponents a la condició que la primera variació de l'acció (amb extrems fixos), $\delta_x S$, sigui nul·la. Observem, com ja hem fet anteriorment, que si la funció L no depèn de x explícitament, aleshores les equacions d'Euler—Lagrange equivalen a dir que $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ no depèn de t (és una quantitat conservada).

3) Notem també que una anàlisi similar a la que hem fet per al hamiltonià ens diu que si L no depèn de t , aleshores

$$k = L - \dot{x} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \text{ no depèn de } t \text{ (és una quantitat conservada).}$$

Remarques sobre el càlcul de variacions

Les idees que han entrat en joc per a la definició de la primera variació constitueixen de fet una introducció al *càlcul de variacions* i es poden usar en general per estudiar problemes en els quals s'han de determinar valors que fan estacionari el valor d'un funcional.

Exemple (La corba més curta entre dos punts és la línia recta). Siguin A i B dos punts de l'espai euclidià E_n i $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow E_n$ una corba tal que $\mathbf{x}(a) = A$ i $\mathbf{x}(b) = B$. La longitud d'aqueta corba ve donada per la integral

$$\ell(\mathbf{x}) = \int_a^b g(\dot{\mathbf{x}}(u), \dot{\mathbf{x}}(u))^{1/2} du,$$

on g és la mètrica euclidiana. Com que l'integrand d'aquesta integral (com a funció de $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$) no depèn de $\mathbf{x}$, les equacions d'Euler–Lagrange corresponents a la condició $\delta_{\mathbf{x}}\ell = 0$ equivalent a

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} g(\dot{\mathbf{x}}(u), \dot{\mathbf{x}}(u))^{1/2} = \mathbf{v} \text{ (}\mathbf{v} \text{ un vector constant)}.$$

Com que g és una funció quadràtica simètrica, aquesta condició equival a $\dot{\mathbf{x}}/|\dot{\mathbf{x}}| = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}$ un vector constant. Però $\dot{\mathbf{x}}/|\dot{\mathbf{x}}| = d\mathbf{x}/ds$, on s és el paràmetre arc de la corba, i per tant $\mathbf{x}$ és estacionari pel funcional ℓ si i només si $\mathbf{x}(s) = A + s\mathbf{v}$, cosa que equival a dir que la corba ha de ser una parametrització del segment de recta que uneix els dos punts (naturalment, $B = A + \lambda\mathbf{v}$, on λ és la longitud de la corba, d'on $\mathbf{v} = (B - A)/\lambda$).

Exemple (Principi de Fermat). Aquest principi estipula que el camí $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ seguit per la llum per anar d'un punt $A = \mathbf{x}(a)$ a un punt $B = \mathbf{x}(b)$ d'un medi isòtrop és el que fa que el temps sigui estacionari, és a dir, ha de ser un camí que satisfaci $\delta_{\mathbf{x}}\tau = 0$, on $\tau(\mathbf{x}) = \int_a^b d\tau$ és el temps que tardaria la llum si seguís el camí $\mathbf{x}$. Ara bé, en un interval de temps infinitesimal dt , la distància recorreguda sobre $\mathbf{x}$ és $|\dot{\mathbf{x}}|dt$ i el temps que tarda la llum en recórrer-lo és

$$d\tau = \frac{|\dot{\mathbf{x}}|dt}{c/n(\mathbf{x})} = \frac{1}{c}n(\mathbf{x})|\dot{\mathbf{x}}|dt,$$

on c és la velocitat de la llum en el buit i $n = n(\mathbf{x})$ és l'*índex de refracció*² del medi en el punt $\mathbf{x}$. Com que c és una constant, el problema de determinar els camins $\mathbf{x}$ que satisfan $\delta_{\mathbf{x}}\tau = 0$ és equivalent al problema de determinar els que satisfan $\delta_{\mathbf{x}}\lambda = 0$, on $\lambda(\mathbf{x})$, anomenada *longitud òptica* del camí $\mathbf{x}$, es defineix per la fórmula

$$\lambda(\mathbf{x}) = \int_a^b n(\mathbf{x}(t))|\dot{\mathbf{x}}(t)|dt.$$

Proposició. Les equacions d'Euler—Lagrange corresponents al problema variacional $\delta_x \lambda = 0$ equivalen a l'equació vectorial

$$\partial n = \frac{d}{ds}(nt),$$

on $t = \dot{x}/|\dot{x}|$ és el vector unitari tangent a x i s és el paràmetre arc de la corba x .

Prova. Les equacions d'Euler—Lagrange corresponents a l'integrand

$$F(x, \dot{x}) = n(x)|\dot{x}|$$

són $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \mathbf{0}$. En aquest cas, $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(n(x)|\dot{x}|) = \frac{\partial}{\partial x}(n(x))|\dot{x}| = |\dot{x}|\partial n$, i $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(n(x)|\dot{x}|) = n(x) \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(|\dot{x}|) = n(x)t$. Per tant, el principi de Fermant equival a les equacions

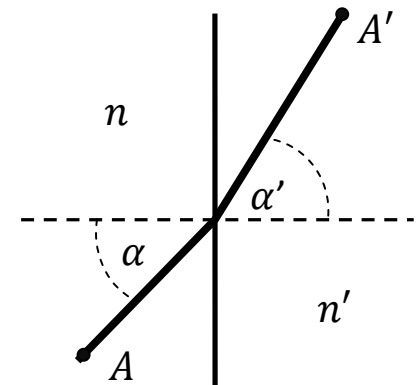
$$|\dot{x}|\partial n = \frac{d}{dt}(n(x)t).$$

D'aquí la proposició en resulta immediatament tenint en compte que

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} = |\dot{\mathbf{x}}| \frac{d}{ds}.$$

Corol·lari. Si n és constant, aleshores el principi de Fermat equival a dir que la llum segueix la línia recta (a la mateixa conclusió s'arriba aplicant l'exemple de la pàg. 8).

Aplicació (Llei d'Snell de la refracció). Considerem la situació indicada a la figura: la línia vertical (eix Oy) separa dos medis amb índexs de refracció n (semlà esquerra, $x < 0$) i n' (semlà dret, $x > 0$). Considerem una corba $y = y(x)$ que passi pels punts $A(a, b)$ del medi esquerra i $A'(a', b')$ del medi dret. La longitud òptica d'aquest camí és $\lambda(y, y') = \int_a^{a'} n(x) \sqrt{1 + y'^2} dx$. Com que l'integrand $n(x) \sqrt{1 + y'^2}$ no depèn de y , resulta que $\frac{d}{dy'} \left(n(x) \sqrt{1 + y'^2} \right)$ és una funció constant (de



x). En resulta que $\frac{n(x)y'}{\sqrt{1+y'^2}} = k$, una constant. Però $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \sin(\alpha)$, on α és l'angle que forma la tangent a la corba amb l'horitzontal. Tenim, doncs, que $n(x) \sin(\alpha) = k$. En particular tenim que en els semiplans $x < 0$ i $x > 0$ el camí es redueix a segments rectilinis i que els angles α i α' que aquests segments formen amb Ox compleixen

$$n \sin(\alpha) = n' \sin(\alpha').$$

M.8.1. Com que l'integrand $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = n(\mathbf{x})|\dot{\mathbf{x}}|$ del funcional

$$\lambda(\mathbf{x}) = \int_a^b n(\mathbf{x}(t))|\dot{\mathbf{x}}(t)|dt$$

que dona la longitud òptica del camí $\mathbf{x}$ no depèn explícitament de t ,

$$k = F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$$

és una integral primera (v. Remarca 3, pàg. 7). Tanmateix aquesta integral primera no ens dona cap informació, ja que fent els càlculs no és difícil veure que és idènticament nul·la.

M.8.2. Per trobar les funcions $y = y(x)$ que fan estacionària la integral

$$I = \int_a^b F(y, y', x) dx,$$

amb la condició que una altra integral

$$J = \int_a^b G(y, y', x) dx$$

és constant, podem formar les equacions d'Euler–Lagrange per la integral

$$I + \lambda J = \int_a^b (F + \lambda G) dx, \text{ és a dir,}$$

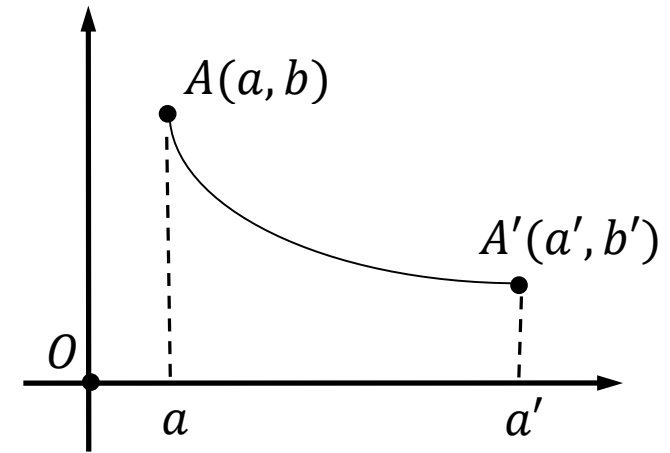
$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right) = 0$$

i usar la constància de J per eliminar λ .

Com aplicació, trobeu l'equació d'una cadena de longitud $2L$, penjada pels seus extrems en els punts $(-a, 0)$ i $(a, 0)$, imposant que la seva energia potencial sigui estacionària.

Resultat. $y(x) = \frac{k}{\rho g} \left(\cosh \left(\frac{\rho g x}{k} \right) - \cosh \left(\frac{\rho g a}{k} \right) \right)$, on k és la solució de l'equació $\sinh \left(\frac{\rho g a}{k} \right) = \rho g L / k$.

M.8.3 (Braquistòcrona). Considerem els punts $A(a, b)$ i $A'(a', b')$, amb $a < a'$ i $b > b'$, i una corba com la de la figura que els uneix. Suposem que una partícula de massa m sotmesa a la força de la gravetat $(0, -mg)$ cau sense fricció seguint la corba. Quina és la corba per a la qual el temps de caiguda és mínim?



(Solució: $x = a + \frac{a' - a}{\pi} (u - \sin(u))$, $y = b + \frac{b - b'}{2} (\cos(u) - 1)$, $0 \leq u \leq \pi$).

Remarquem que aquestes equacions són el resultat d'aplicar l'afinitat

$$x = a + \lambda x', y = b + \mu y' \quad (\lambda = (a' - a)/\pi, \mu = -(b - b')/2)$$

a la (semi)cicloide $x' = u - \sin(u)$, $y' = 1 - \cos(u)$, $0 \leq u \leq \pi$, generada per la circumferència de radi 1.

Notes

1. Fins i tot en el cas d'una funció real f d'una variable real, la condició $d_a f = 0 \Leftrightarrow f'(a) = 0$, necessària per a l'existència d'un mínim (o un màxim), no és suficient (hi pot haver una inflexió, com ara per $f(x) = x^3$ i $a = 0$).

2. Dir que el valor de l'índex de refracció d'un medi és n significa que la velocitat de la llum és c/n , on c és la velocitat de la llum en el buit. Alguns índexs de refracció: vidres, de 1.5 a 2; aigua, 1.3335 a 0°C (baixa una mica amb la temperatura: 1.3328 a 20°C i 1.3177 a 100°C); alcohol etílic, 1.36; gel, 1.309; diamant, 2.417.