

MMF 10 / 1. *Mecànica*

7. Petites oscil·lacions

S. Xambó

L'objecte d'aquesta secció és analitzar el comportament d'un sistema mecànic lagrangia *natural* (és a dir, que les lligadures no depenen del temps) en l'entorn d'un punt d'equilibri estable.

El resultat fonamental és que aquest comportament és, per a petites oscil·lacions en l'entorn d'un tal punt, com el d'un multioscil·lador harmònic.

- Punts d'equilibri
- Anàlisi de les petites oscil·lacions
- Càlcul efectiu de les freqüències i modes fonamentals

Punts d'equilibri

Un punt $\bar{\mathbf{q}}$ de l'espai de configuracio és un *punt d'equilibri* si $d_{\bar{\mathbf{q}}}V = 0$, és a dir, si $(\partial V / \partial \mathbf{q})(\bar{\mathbf{q}}) = 0$. Notem que això equival a dir que en el punt $\bar{\mathbf{q}}$ les forces (generalitzades) s'anul·len.

Canviant les coordenades si cal, podem suposar que $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, i, atès que V està definit llevat d'una constant no nul·la, també podem suposar que $V(\mathbf{0}) = 0$. Fet així, el desenvolupament de Taylor en el punt d'equilibri $\mathbf{0}$ comença amb termes quadràtics i la suma d'aquests termes quadràtics és

$$V_2 = \sum_{i,j} \frac{1}{2} k_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} \mathbf{q} K \mathbf{q}^T,$$

$$k_{ij} = \partial^2 V / \partial q_i \partial q_j (\mathbf{0}), \quad K = (k_{ij}).$$

El punt d'equilibri es diu que és *estable* si K és definida positiva. Com que K és simètrica, això equival a dir que tots els seus valors propis són nombres reals positius.

Notem que en aquest cas les forces que actuen en l'entorn de $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ (o sigui, $-\partial V/\partial \mathbf{q}$) són “restitutòries” en qualsevol configuració, és a dir, tendeixen a moure la configuració envers $\mathbf{0}$.

Anàlogament, els primers termes del desenvolupament de Taylor de l'energia cinètica en l'entorn del punt $(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{0})$ de l'espai d'estats comença per termes quadràtics, la suma dels quals és una expressió de la forma

$$T_2 = \sum_{i,j} \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} M \dot{\mathbf{q}}^T,$$

$$m_{ij} \in \mathbb{R}, M = (m_{ij}).$$

La matriu M també és simètrica i definida positiva. Notem que l'energia cinètica és definida positiva i que si

$$T = \sum_{i,j} \frac{1}{2} a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^T,$$

amb $a_{ij}(\mathbf{q}) = a_{ji}(\mathbf{q})$, de manera que $A(\mathbf{q})$ és simètrica i definida positiva, llavors $m_{ij} = a_{ij}(\mathbf{0})$.

L'estudi de les petites oscil·lacions en l'entorn d'una posició d'equilibri estable d'un sistema lagrangià natural és l'estudi de la dinàmica del sistema definit per la lagrangiana $L_2 = T_2 - V_2$.

Exemple. L'energia potencial d'un pèndol doble que efectua oscil·lacions en un pla vertical és

$$V = -mgl \cos \varphi - m'g(l \cos \varphi + l' \cos \varphi').$$

El potencial V_2 per a les petites oscil·lacions al voltant de la posició d'equilibri $\varphi = \varphi' = 0$ és

$$\frac{1}{2}(m + m')gl\varphi^2 + \frac{1}{2}m'gl'\varphi'^2 = \frac{1}{2}(\varphi, \varphi') \begin{pmatrix} (m + m')gl & 0 \\ 0 & m'gl' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}.$$

Anàlogament, l'energia cinètica és

$$T = \frac{1}{2} (ml^2 \dot{\varphi}^2 + m'(l^2 \dot{\varphi}^2 + l'^2 \dot{\varphi}'^2 + 2ll' \dot{\varphi} \dot{\varphi}' \cos(\varphi - \varphi')))$$

i l'expressió T_2 corresponent al problema de les petites oscil·lacions és

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} ((m + m')l^2 \dot{\varphi}^2 + 2m'll' \dot{\varphi} \dot{\varphi}' + m'l'^2 \dot{\varphi}'^2). \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\varphi}, \dot{\varphi}') \begin{pmatrix} (m + m')l^2 & m'll' \\ m'll' & m'l'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi}' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Anàlisi de les petites oscil·lacions

Les equacions d'Euler—Lagrange corresponents a la lagrangiana

$$L_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T K \mathbf{q}$$

de les petites oscil·lacions són les següents:

$$\ddot{\mathbf{q}} M = -\mathbf{q} K \Leftrightarrow \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{q} A, \quad A = KM^{-1}.$$

Adonem-nos que $\partial L_2 / \partial \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} M$, que la derivada d'aquesta expressió és $\ddot{\mathbf{q}} M$ i que $\partial L_2 / \partial \mathbf{q} = -\mathbf{q} K$.

Proposició. Existeix una matriu C tal que $CMC^T = I_n$ i CKC^T és diagonal positiva (és a dir, els elements de la diagonal de CKC^T són positius).

Prova. Atès que M és simètrica, existeix una matriu ortogonal C_1 tal que $D = C_1 M C_1^T$ és diagonal. Com que M és definida positiva, els elements de la diagonal de D són positius. Si ara posem $C_2 = \sqrt{D^{-1}} C_1$, llavors és clar que $C_2 M C_2^T = I_n$.

Considerem ara la matriu $K' = C_2 K C_2^T$. Aquesta matriu és simètrica i, per tant, existeix una matriu ortogonal C_3 tal que $C_3 K' C_3^T$ és diagonal (notem que els elements diagonals d'aquesta matriu són positius, atès que K' és definida positiva com a conseqüència del fet que K és definida positiva). Si finalment posem $C = C_3 C_2$, aleshores és clar que C satisfà la condició enunciada.

Corol·lari. La matriu A és diagonalitzable amb tots els seus valors propis positius.

Prova. Amb les notacions de la prova anterior,

$$\begin{aligned} CAC^{-1} &= CKM^{-1}C^{-1} = CKC^T(C^T)^{-1}M^{-1}C^{-1} \\ &= (CKC^T)(CMC^T)^{-1} = CKC^T, \end{aligned}$$

que és una matriu diagonal positiva.

Corol·lari. La dinàmica de la lagrangiana L_2 equival a la dinàmica d'un multioscil·lador harmònic.

Prova. Sabem que les equacions que corresponen a la lagrangiana L_2 són $\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{q}A$. Fent el canvi $\mathbf{q} = \xi C$ (usem les notacions de la prova de la proposició) obtenim $\ddot{\xi} C = -\xi CA$, és a dir, $\ddot{\xi} = -\xi CAC^{-1}$. Però com que

CAC^{-1} és diagonal, cadascuna de les variables ξ_i evoluciona com un oscil·lador harmònic amb freqüència angular $\omega_i = \sqrt{\rho_i}$, on ρ_i és el corresponent valor propi de A .

Les variables ξ_i i les freqüències ω_i s'anomenen *modes* i *freqüències fonamentals*, o *característics*, del sistema mecànic inicial.

Càlcul efectiu de les freqüències i modes fonamentals

Les freqüències característiques s'obtenen resolent l'equació característica de A :

$$\det(\rho I_n - A) = 0.$$

Com que $\rho I_n - A = (\rho M - K)M^{-1}$, també podem obtenir les ρ resolent l'equació $\det(\rho M - K) = 0$. D'aquesta manera ens estalviem de calcular M^{-1} . Per a cada ρ , la corresponent freqüència característica és $\sqrt{\rho}$.

Els modes fonamentals s'obtenen a partir dels valors propis de A :

Si λ és un vector propi de valor propi ρ de A , aleshores

$$\xi = q\lambda^T$$

és el corresponent mode fonamental:

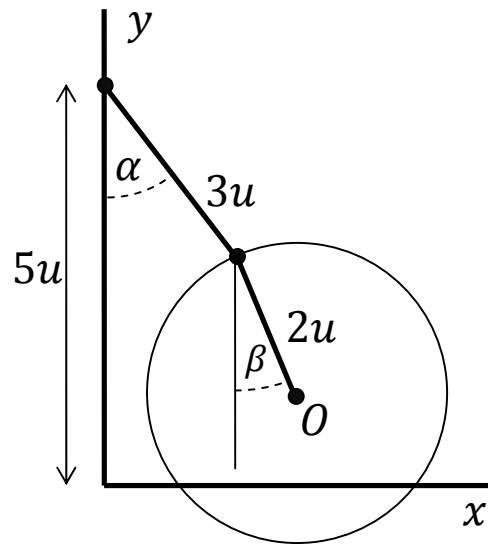
$$\ddot{\xi} = \ddot{q} \lambda^T = -qA\lambda^T = -q(\rho\lambda^T) = -\rho\xi.$$

Alternativament, si μ és un element del nucli de $\rho M - K$, aleshores

$$\xi = qM\mu^T$$

és el corresponent mode característic:

$$\ddot{\xi} = \ddot{q}M\mu^T = -qAM\mu^T = -qK\mu^T = -\rho qM\mu^T = -\rho\xi.$$



Exemple (cf. M.S. Longair: *Theoretical concepts in physics* (CUP, 1984), pàg. 93-98). Tenim un cilindre circular recte horitzontal de radi $2u$ suspès pels extrems d'una generatriu amb dos fils inextensibles paral·lels, de massa negligible i longitud $3u$ (a la figura hem representat una de les cares laterals del cilindre i el corresponent fil).

Anem a trobar les oscil·lacions característiques d'aquest sistema suposant que el cilindre és homogeni de massa m i que roman perpendicular al pla xy , de manera que podem prendre els angles α i β com a coordenades generalitzades. En el sistema $\{x, y\}$ tenim que O té coordenades

$$x = 3u \sin(\alpha) + 2u \sin(\beta), y = 5u - 3u \cos(\alpha) - 2u \cos(\beta).$$

L'energia potencial de és

$$V = mg(3u(1 - \cos \alpha) + 2u(1 - \cos \beta)) = mgu\left(\frac{3}{2}\alpha^2 + \beta^2\right) + \dots$$

i pren un mínim quan $\alpha = \beta = 0$. Tenim, doncs,

$$V_2 = mgu\left(\frac{3}{2}\alpha^2 + \beta^2\right) = \frac{1}{2}mgu(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Com hem vist en el primer tema del sòlid rígido, l'energia cinètica és la suma de la de rotació i la de translació de O . Atès que

$$\dot{x} = 3u\dot{\alpha} \cos(\alpha) + 2u\dot{\beta} \cos(\beta), \dot{y} = 3u\dot{\alpha} \sin(\alpha) + 2u\dot{\beta} \sin(\beta),$$

l'aproximació per a les petites oscil·lacions de l'energia de translació és

$\frac{1}{2}mu^2(3\dot{\alpha} + 2\dot{\beta})^2$. Si $I = \frac{1}{2}m(2u)^2 = 2mu^2$ és el moment d'inèrcia del cilindre respecte del seu eix, l'energia cinètica de rotació és $\frac{1}{2}I\dot{\beta}^2 = mu^2\dot{\beta}^2$, d'on resulta que l'aproximació de l'energia cinètica per a les petites oscil·lacions és

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \frac{1}{2}mu^2(3\dot{\alpha} + 2\dot{\beta})^2 + mu^2\dot{\beta}^2 = \frac{1}{2}mu^2(9\dot{\alpha}^2 + 12\dot{\alpha}\dot{\beta} + 6\dot{\beta}^2) = \\
 &= \frac{1}{2}mu^2(\dot{\alpha}, \dot{\beta}) \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Les freqüències característiques són les arrels de $\det(\rho M - K) = 0$, on

$$M = u \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, K = g \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(hem omès el factor constant mu comú a les dues matrius, ja que això no canvia les solucions). L'equació resultant és

$$3u^2\rho^2 - 6gu\rho + g^2 = 0$$

(hem omès un factor 6). Com que el discriminant d'aquesta equació és $24g^2u^2$, les seves solucions són

$$\rho = \frac{6gu \pm 2\sqrt{6}gu}{2 \cdot 3u^2} = \frac{3g \pm \sqrt{6}g}{3u} = \left(1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \frac{g}{u}$$

Substituint aquestes solucions a $\rho M - K$ és fàcil veure que

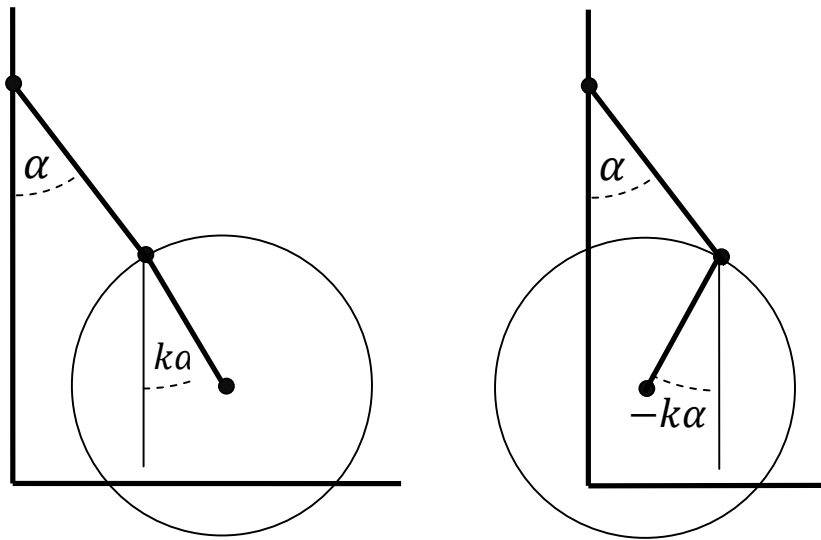
$$\lambda = (2 + \sqrt{6}, -(3 + \sqrt{6})), \quad \lambda' = (2 - \sqrt{6}, -(3 - \sqrt{6}))$$

generen el nucli per $\rho = \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \frac{g}{u}$ i $\rho' = \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \frac{g}{u}$, respectivament. En resulta, doncs, que

$$\xi = (2 + \sqrt{6})\alpha - (3 + \sqrt{6})\beta \text{ i } \xi' = (2 - \sqrt{6})\alpha - (3 - \sqrt{6})\beta$$

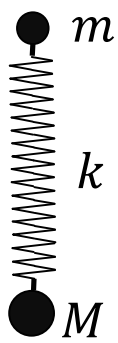
són els modes característics, és a dir, que aquests observables evolucionen independentment, per a qualsevol evolució de α i β en petites oscil·lacions, com oscil·ladors harmònics de freqüències $\omega = \sqrt{\rho}$ i $\omega' = \sqrt{\rho'}$. Fent $\xi' = 0$, que equival a $\beta = \frac{2-\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \alpha$, llavors l'angle α (i per tant també β) evoluciona harmònicament amb freqüència ω .

Anàlogament, fent $\xi = 0$, que equival a $\beta = \frac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\alpha$, llavors l'angle α (i per tant també β) evoluciona harmònicament amb freqüència ω' . En altres paraules, els modes fonamentals “purs” corresponen a $\beta = \pm k\alpha$, on $k = \sqrt{2}/\sqrt{3}$, amb la freqüència ω' per k i ω per a $-k$ (vegeu les figures).



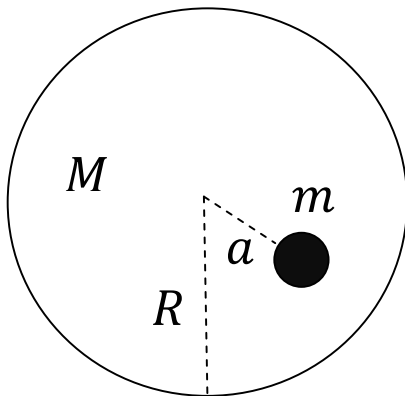
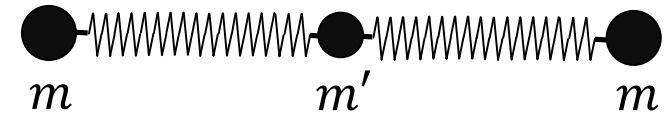
Modes fonamentals purs de freqüències ω' (esquerra) i ω (dreta) i períodes $\tau' = 2\pi/\omega'$ i $\tau = 2\pi/\omega$.

u	ω'	τ'	ω	τ
1	1.34	4.68	4.22	1.49
0.1	4.24	1.48	13.35	0.47
0.01	13.42	0.46	42.21	0.15



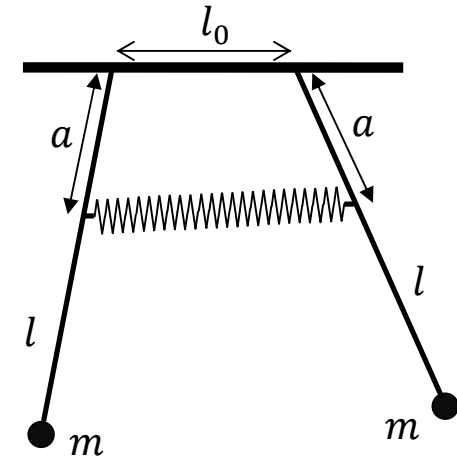
M.5.1. Una molla sense massa, de constant recuperadora k i longitud natural l_0 , està unida a dues masses m i M (com en la figura). Suposeu que el sistema està inicialment penjat per l'extrem de massa m , en equilibri, i que en l'instant $t = 0$ es deixa anar. Determineu l'evolució del sistema per a $t > 0$.

M.5.2. Algunes molècules triatòmiques, com la del CO_2 , estan formades per dues masses iguals m lligades a una tercera massa m' tal com indica la figura. Calculeu les freqüències i modes normals de vibració suposant que les forces que les uneixen es poden aproximar per forces elàstiques i que el moviment es realitza en la direcció de l'eix de la molècula.



M.5.3. Un disc de massa M i radi R està sotmès a un camp gravitatori i té adherida una massa m a una distància a del centre (v. la figura). El disc pot rodar sense lliscar. Calculeu la freqüència de les petites oscil·lacions en l'entorn del punt d'equilibri.

M.5.4. Dos pèndols simples de longitud l i massa m estan units amb una molla de constant recuperadora k . La molla està lligada a una distància a dels punts de suspensió (com a la figura). La longitud natural de la molla coincideix amb la distància l_0 entre els punts de suspensió dels pèndols. Calculeu les freqüències i modes normals per a les petites oscil·lacions al voltant de la configuració d'equilibri i efectuades en el pla que conté aquesta configuració.



M.5.5. Mostreu que l'equació $\det(\rho M - K) = 0$ de les petites oscil·lacions per al pèndol doble amb masses m i m' , i longituds l i l' , té la forma

$$c_0 \rho^2 + c_1 \rho + c_2 = 0,$$

on $c_0 = mm' l^2 l'^2,$

$$c_1 = -g(m + m')m'(l + l')ll',$$

$$c_2 = g^2(m + m')m' ll'.$$